ELEMENTOS DE HISTORIA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica — Costa Rica
edefaria@emate.ucr.ac.cr, edefaria@gmail.com
Campo de investigación: Historia de la Matemática — Nivel: Superior

Resumen. *En este curso corto se compartió algunos elementos de historia del cálculo, empezando con los trabajos de los babilónicos hasta llegar al nacimiento del cálculo diferencial e integral con Newton y Leibniz, así como algunas estrategias metodológicas que podrían ser pertinentes para un curso de esta naturaleza, como son el uso de portafolios, la participación de conferencistas que son especialistas en campos específicos de las matemáticas, y las exposiciones presentadas por los propios estudiantes del curso.*
Palabras clave: historia de la matemática, estrategias metodológicas, portafolios

Introducción

La historia de las matemáticas es uno de los recursos más importantes que pueden utilizarse en la enseñanza de la matemática, para tratar de construir en los estudiantes una visión humana, interesante y motivadora de esta disciplina que por muchos es considerada deshumana, rígida y desligada de la realidad.

La Asociación Matemática de América (MAA por sus siglas en Inglés) recomienda a los futuros profesores de matemática de enseñanza secundaria que "aprendan a apreciar las contribuciones realizadas por las diversas culturas a favor del crecimiento y el desarrollo de las ideas matemáticas, así como a investigar las aportaciones dadas por individuos de ambos sexos al desarrollo histórico de los principales conceptos matemáticos". Para la MAA, un conocimiento de la historia de las matemáticas permite que el futuro profesor de matemática enseñe la disciplina de una forma más eficiente.

En sintonía con esta recomendación es que compartí algunas experiencias de aula correspondientes a un curso de historia de la matemática impartido a futuros docentes de matemática de la carrera de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. En el curso se procuró ofrecer al estudiante un panorama general acerca del desarrollo histórico del conocimiento matemático y crear conciencia en el estudiante acerca del potencial didáctico de la historia de la matemática como recurso metodológico, además de la importancia de su incorporación en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática.

Otro aspecto importante del curso tuvo que ver con la evaluación. Cada estudiante desarrolló, y expuso para todo el grupo, un proyecto que consistió en seleccionar dos objetivos del plan de estudios de matemática del Ministerio de Educación para la enseñanza secundaria y elaborar un planeamiento didáctico que incorporara elementos de la Historia de la Matemática como recurso metodológico. Un elemento evaluativo, considerado innovador para los estudiantes, consistió en la elaboración de un portafolio por parte de cada estudiante. El portafolio educativo es un método de enseñanza, aprendizaje y evaluación que consiste en la aportación de producciones de diferente índole por parte del estudiante a través de las cuáles se pueden juzgar sus capacidades en el marco de una disciplina o materia de estudio. Estas producciones informan del proceso personal seguido por el estudiante, permitiéndole a él y los demás ver sus esfuerzos y logros, en relación a los objetivos de aprendizaje y criterios de evaluación establecidos previamente. La diversidad de material presentado en un portafolio permite identificar diferentes aprendizajes: conceptos, procedimientos, actitudes, proporcionando una visión más amplia y profunda de lo que el estudiante sabe y puede hacer. A través de los distintos trabajos mostrados se puede identificar cómo piensa el estudiante, cómo cuestiona, analiza, sintetiza, crea o interactúa con otros (intelectual, emocional y socialmente).

Al finalizar el curso referido, se aplicó un cuestionario anónimo a todos los estudiantes, para conocer sus opiniones acerca de las fortalezas y las debilidades del curso. Por lo general, consideraron que las principales fortalezas fueron las investigaciones y exposiciones, el planeamiento didáctico de contenidos de la enseñanza secundaria incorporando la historia de la matemática y la construcción del portafolio. También mencionaron que las conferencias dadas por profesores invitados, especialistas en filosofía de las matemáticas, lógica, topología y en matemáticas aplicadas despertaron sus intereses.

En la siguiente sección desarrollo parte de la temática presentada en el curso dado en la RELME 23: Elementos de historia del cálculo diferencial e integral.

Origen del cálculo

Considero que podríamos ubicar los orígenes del cálculo en las antiguas civilizaciones babilónica y egipcia. Conocemos los trabajos babilónicos por medio de unas 500000 tabletas de arcillas que fueron encontradas, de las cuales unas 500 son de interés para las matemáticas. Las tabletas más antiguas son de aproximadamente 2500 A.c. (Ruiz, 2003, p. 13).

Las principales referencias que tenemos en relación con las matemáticas egipcias son documentos escritos sobre papiros que lograron sobrevivir con el tiempo. El papiro de Moscú que se encuentra en el museo de Bellas Artes de Moscú y el papiro Rhind que se encuentra en el museo Británico. En los papiros mencionados y en algunas tabletas babilónicas encontramos métodos y fórmulas (sin demostraciones) para calcular áreas de figuras planas y volúmenes de pirámides Katz, 2009, pp. 2-10).

Los griegos dieron un impulso al desarrollo del cálculo al utilizar ideas que fueron retomadas por los creadores del cálculo diferencial e integral. Demócrito (siglo V a.C.) calculó el volumen de pirámides y conos, considerándolos formados por un número infinito de secciones de grosor infinitamente pequeñas (indivisibles).

Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) creó el método de exhausión, antecedente del cálculo integral para calcular áreas y volúmenes, al postular que “toda magnitud finita puede ser agotada mediante la resta de una cantidad determinada”. Con este método él logró demostrar que el volumen de una pirámide es la tercera parte del de un prisma de su misma base y altura. Además demostró que el volumen de un cono es la tercera parte del de un cilindro de su misma base y altura (Katz, 2009, p. 84).

El problema con el método de Eudoxo es que involucra el concepto de infinito, y las paradojas de Zenón de Elea reforzaron los argumentos de la filosofía de Parménides que negaban la existencia del movimiento y afirmaba que el espacio no está formado por elementos discontinuos.

Aristóteles en un intento por regular el concepto de infinito prohibió el infinito en acto: “no es posible que el infinito exista como ser en acto o como una substancia y un principio”, añadió “es claro que la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles” de manera que el infinito “existe potencialmente [...] es por adición o división” (Katz, 2009, p. 45).

Arquímedes (287-212 A.c.), considerado el precursor del cálculo integral, utilizó el método de Eudoxo (de exhausión) para el cálculo de áreas y volúmenes, sin tomar en cuenta la prohibición aristotélica de usar el infinito en acto.

Su tratado denominado “El método” fue descubierto en 1899 en una biblioteca en Constantinopla. El manuscrito es del siglo X, pero la escritura fue parcialmente lavada en el siglo XIII y el material reutilizado para un trabajo religioso. Afortunadamente la escritura anterior todavía se puede leer en una parte considerable y en 1906, J L Heiberg, profesor de filología clásica en la Universidad de Copenhague, logró descifrar mucho del material. Esta obra proporciona un destacable acercamiento a cómo Arquímedes descubrió muchos de sus resultados.

En la obra “Medidas de un círculo”, encontramos resultados numéricos relacionados con la aproximación de π y con la cuadratura del círculo. Él utilizó el método de exhausión de Eudoxo, y para ello se utiliza dos principios (Ruiz, 2003, pp. 94-95):

1. Si α y β son dos magnitudes y $\alpha \neq 0$ entonces existe un número natural n tal que $n\alpha > \beta$. (axioma de continuidad o de Arquímedes, Libro I “Sobre la esfera y el cilindro”, citado en Ruiz, 2003, p. 95)
2. Si de cualquier magnitud mayor entre dos magnitudes distintas dadas restamos una parte mayor que su mitad, y si del resto restamos de nuevo una cantidad mayor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de resta, entonces en alguna etapa del proceso obtendremos como resto una magnitud menor que la menor que las dos magnitudes dadas al inicio.

Lo anterior se puede expresar así: Dadas dos magnitudes distintas α y β con $\alpha<\beta$ existe un número n tal que $(1-p)^n\beta < \alpha \text{ con } p > \frac{1}{2}.$ (Elementos de Euclides, Libro X, definición 1, citado en Ruiz, 2003, p. 95).

En su tratado “Sobre la medida del círculo” Arquímedes demostró que “El área A de cualquier círculo es igual al área de un triángulo rectángulo en el cuál uno de los catetos es igual al radio y el otro a la circunferencia.”, y que “la razón entre la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro es menor que $3\frac{1}{7}$ pero es mayor que $3\frac{10}{71}$”, proporcionando una buena aproximación para π. (Katz, 2009, pp. 101- 102). En el trabajo “Cuadratura de la Parábola”, Arquimedes utilizó el método de exhausión de Eudoxo y reducción al absurdo para calcular el área de un segmento de parábola (Katz, 2009, p 108).

Los problemas con números irracionales y con el infinito impidieron el desarrollo del cálculo y pasaron casi 2000 años para que se lograra superar estos obstáculos. Bonaventura Cavalieri (1598-1647), un discípulo de Galileo, fue el primero en desarrollar una teoría completa de los indivisibles, iniciada por Galileo. En ella se retomaba el método utilizado por Arquímedes al considerar los objetos geométricos hechos de objetos geométricos de una dimensión menor. Estas ideas fueron beneficiadas por el nacimiento de la geometría analítica, obra de Fermat y Descartes en la primera mitad del siglo XVII. La importancia de este descubrimiento consiste en que la geometría analítica permite el tratamiento algebraico de problemas geométricos.

Otro impulsor del cálculo fue Pierre de Fermat (1602-1665). Fermat retomó la ecuación $bx - x^2 = c$ obtenida al dividir un segmento de longitud b en dos partes con producto c y estudiada por Viéte, y el método de "adigualdad" utilizado por Diofanto de Alejandría, para determinar el valor de x que proporcionaba el valor máximo del parámetro c. Posteriormente él generalizó su método para maximizar un polinomio $p(x)$ y para encontrar la tangente a una curva (Katz, 2009, pp. 473-477).

El 22 de setiembre de 1636 Fermat escribió a Gilles Persone de Roberval (1602-1675): logré cuadrar varias figuras compuestas de líneas curvas. Puedo cuadrar el área de una región bajo cualquier parábola de la forma $y = px^k, k \in \square$ mediante un método distinto del desarrollado por Arquimedes (quién utilizó triángulos). En su "Tratado sobre Cuadratura" publicado en 1658 Fermat extendió su método, para determinar el área bajo la curva $y = px^{-k}, k \in \square$ (Katz, 2009, pp. 519-523).

Otro precursor del cálculo diferencial e integral fue John Wallis (1616-1703), miembro fundador de la Royal Society de Londres y editor de obras de Arquímedes. Wallis convirtió el cálculo de áreas bajo curvas (hasta el momento algo meramente geométrico) en cálculos aritméticos. Él obtuvo fórmulas de integración como las obtenidas por Fermat para k racional y propuso la siguiente genealogía del cálculo: El método de Exhausión (Eudoxo, Arquímedes); el método de los indivisibles (Cavalieri); la aritmética de los infinitos (Wallis) y los métodos de las series infinitas (Newton).

En 1668 Nicolaus Mercator (1620-1687) calculó el área bajo la curva $y=\frac{1}{1+x}$ de 0 a x, dividiendo el intervalo en n subintervalos de igual longitud y obtuvo el desarrollo de $\log(1+x)$ en serie de potencias.

Isaac Barrow (1630-1677) fue probablemente el científico que estuvo más cerca de descubrir el cálculo diferencial e integral. En la lección X de su obra "lecturas geométricas" demostró su versión geométrica del Teorema fundamental del cálculo (Katz, 2009, pp. 536-537).

Los trabajos de Wallis, Fermat, Barrow y otros influyeron grandemente en Isaac Newton. Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), de manera independiente, sintetizaron de la maraña de métodos infinitesimales usados por sus predecesores dos conceptos fundamentales: la derivada y la integral. Ellos desarrollaron reglas de derivación y lograron mostrar que ambos conceptos eran inversos (teorema fundamental del cálculo).

En su segunda obra sobre el cálculo "De methodis serierum et fluxionum" (1671) publicada en1737 (66 después de escrita), Newton describe sus conceptos de fluente -es una variable en función del tiempo- y fluxión de la fluente -la derivada respecto al tiempo de la fluente- como entidades propias, con unas reglas algorítmicas de fácil uso. En ella consideró la curva descrita por la ecuación $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, en dónde x, y son variables que dependen del tiempo t (fluentes), $\dot{x},\dot{y}$ son las fluxiones y "o" una cantidad infinitesimal. Reemplazó y por $y+\dot{y}o$, x por $\mathrm{x}+\dot{x}o$ en la ecuación dada, simplificó, dividió el resultado por o y después eliminó los términos que multiplicaban o (infinitesimal, cantidad infinitamente pequeña) obteniendo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{3x^2-3ax+ay}{3y^2-ax}$ para la velocidad del móvil descrito por la ecuación dada. Esto corresponde a la derivada de y respecto a x como conocemos hoy, pero el método utilizado por Newton fue bastante extraño: división por o (distinto de cero) y eliminación de todo lo que multiplica o.

Este extraño método llevó al obispo y filósofo George Berkeley (1684-1753) a publicar en 1734 el folleto "el analista o discurso dirigido a un matemático infiel" en que decía: "¿Y que son estas fluxiones? ¿Las velocidades de incrementos evanescentes? ¿Y qué son estos mismos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas ni cantidades infinitamente pequeñas, sin ser tampoco un simple nada. ¿No podríamos llamarlos los fantasmas de las cantidades desaparecidas? (Berkeley, 1734)

Lo cierto es que todo esto llevó a profundos debates acerca de los fundamentos del naciente cálculo diferencial e integral y que condujo al rigor en las matemáticas en el siglo XIX, gracias al trabajo de grandes matemáticos como Bolzano, Cauchy, Weierstrass, Dedekind y Cantor.

Polémica Newton-Leibniz

Newton tenía cierta fobia a publicar, posiblemente por temor a la controversia, y guardó casi en secreto su descubrimiento acerca del cálculo de fluxiones. Mientras tanto Leibniz, para facilitar la difusión de sus resultados los publicó en una de las recién creadas revistas “Acta Eroditorum” que el mismo había ayudado a fundar.

En sus publicaciones "Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas” (1680) y “Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles e infinitos” (1686), en las Actas Eroditorum, Leibniz utilizó la notación dx para diferencial e $\int$ para integral. Lo cierto es que los discípulos de Leibniz publicaron el primer libro sobre el cálculo denominado “Analyse des infiniment petits” que redactó el Marquéz de L'Hospital a partir de las lecciones particulares que le dio Juan Bernoulli. En la obra mencionada no se hace referencia a Newton (Katz, 2009, p. 575).

En el libro “De quadratura curvarum”, Newton alega lo siguiente: “En una carta escrita a Sr. Leibniz en 1676 y publicada por Wallis, mencionaba un método por el cual había encontrado algunos teoremas generales acerca de la cuadratura de figuras curvilíneas [...] Hace años yo presté un manuscrito conteniendo tales teoremas; y habiéndome encontrado desde entonces con varias cosas copiadas de él, lo hago público en esta ocasión”.

Leibniz contraataca diciendo que “Para entender mejor este libro los siguientes hechos deben ser conocidos. Cuando una cantidad varía continuamente como, por ejemplo, una línea varía por el fluir de un punto que la describe, aquellos incrementos momentáneos son llamados diferencias

[...] Y por tanto ha aparecido el cálculo diferencial y su converso, el cálculo sumatorio. Los elementos de este cálculo han sido publicados por su inventor el Dr. Gottfried Wilhelm Leibniz en estas Actas, y sus varios usos han sido mostrados por él y por los Drs. y hermanos Bernoulli y por el Dr. Marquéz de L'Hospital. En vez de las diferencias leibnizianas, el Dr. Newton empleó, y ha empleado siempre, fluxiones".

La controversia Newton-Leibniz fue tan grande que la Royal Society nombró una comisión -que resultó estar plagada de amigos de Newton- que luego de varias deliberaciones dictaminó que Newton fue el primero en crear el cálculo diferencial. Esta absurda guerra duró hasta principios del siglo XIX cuando finalmente los matemáticos ingleses deciden adoptar la notación leibniziana -que hasta el momento habían ignorado.

Conclusión

En el curso desarrollado en la RELME 23 se logró motivar a los participantes con las estrategias metodológicas utilizadas por el expositor en el curso de historia de la matemática (investigación, uso de portafolios, planeamiento didáctico incorporando la historia de la matemática como recurso metodológico) y también se dedicó parte del tiempo para desarrollar las ideas matemáticas presentadas en este trabajo.

Referencias bibliográficas

Berkeley, G. (1974). El Analista: Discurso a un matemático infiel. En James Nwman (Ed.) Sigma. El mundo de las matemáticas. Selección de textos matemáticos de todos los tiempos I (pp. 218-219). Barcelona: Ediciones Grijalbo.

Katz, V. (2009). A history of mathematics: An introduction. New York: Addison Wesley

Ruiz, A. (2003). Historia y filosofía de las matemáticas. San José: Editorial EUNED.