

## A TRANSIÇÃO ENSINO MÉDIO E SUPERIOR: A NOÇÃO DE RETAS E PLANOS EM $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$

Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos, Christianne Coletti

UNIBAN

Brasil

alvesdias@ig.com.br, taniammcampos@hotmail.com, christianne.coletti@uiban.br

Campo de investigación: Pensamento geométrico

Nível: Médio e Superior

**Resumen.** *Os resultados apresentados referem-se à pesquisa sobre a transição Ensino Médio e Superior para as noções de Geometria Analítica. O referencial teórico da pesquisa é a Teoria Antropológica do Didático de Bosch e Chevallard (1999), a noção de quadro de Douady (1984), a noção de ponto de vista de Rogalski (1995, 2001) e a abordagem teórica em termos de níveis de conhecimento de Robert (1997). As análises das relações institucionais foram efetuadas por meio de documentos oficiais e livros didáticos e as relações pessoais por meio de macro avaliações. Os resultados encontrados mostram uma crescente preocupação institucional com a articulação dos ostensivos e não ostensivos associados às noções de Geometria Analítica e uma tendência em deixar o tratamento do espaço  $\mathbb{R}^3$  para Ensino Superior.*

**Palabras clave:** geometria analítica, retas e planos, pontos de vista

### Introdução

Vários problemas são encontrados por estudantes e professores na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior no Brasil, no que se refere ao ensino da matemática, o que pode ser constatado em diferentes macro-avaliações, como o SARESP (Sistema de Avaliação do Estado de São Paulo).

Para melhor identificar esses problemas, propomos uma pesquisa cujo objetivo é estudar a transição entre o Ensino Médio e Superior, em particular, quando se trata do estudo das noções de retas e planos nos espaços  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , no ensino das disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Observamos que no Ensino Médio se trabalha apenas com os conceitos de Geometria Analítica.

Para o Ensino Médio, novas propostas têm sido implementadas, que, em geral, demandam a aplicação de novas estratégias de trabalho. Essas mudanças tem tido influências de resultados de pesquisas recentes na área de Educação Matemática e por vezes os professores têm encontrado dificuldades em desenvolvê-las em suas aulas.

Para o Ensino Superior, quando consideramos a disciplina de Geometria Analítica, poucas mudanças são observadas, mas os novos livros didáticos de Álgebra Linear tendem a revisitar as

noções de retas e planos em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , articulando essas noções para esses dois espaços com as noções de cálculo vetorial, antes de introduzir os espaços “mais abstratos”.

Sendo assim, é importante observar que o papel mediador do professor é fundamental, uma vez que ele é o responsável pela elaboração de tarefas por meio de atividades, que permitam a articulação entre os diferentes conhecimentos.

Para isso, é necessário identificar o que podemos considerar como conhecimentos prévios para os egressos do Ensino Médio.

Escolhemos, assim, como referencial teórico da pesquisa a teoria antropológica do Didático de Chevallard (1996) e Bosch e Chevallard (1999) e as abordagens teóricas em termos de quadros e mudanças de quadros de Douady (1984, 1992), de pontos de vista de Rogalski (1995, 2001) e de níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1997). Apresentamos abaixo uma breve descrição do referencial teórico escolhido.

### **Referencial teórico da pesquisa**

O referencial teórico central da pesquisa é a teoria antropológica do didático de Chevallard (1996) e Bosch e Chevallard (1999) que consideram que a atividade matemática se decompõe, como toda atividade humana, em certo número de tarefas. Para o cumprimento destas tarefas são desenvolvidas técnicas, que para se tornarem viáveis devem ser compreensíveis e justificáveis, dando desta forma lugar ao desenvolvimento das tecnologias ou discurso sobre as técnicas. Estas tecnologias são objetos de outras tecnologias que são identificadas como as teorias sobre as técnicas.

Além disso, do ponto de vista das representações, Chevallard (1996) enfatiza que a dimensão semiótica da atividade matemática não é um simples subproduto da conceituação. Ele insiste no fato que a utilização de palavras só pode ser compreendida a partir da idéia de instrumento semiótico. Para tanto, todo sistema de trabalho supõe a combinação de vários registros semióticos: oral, escrito e gestual.

Isso deixa evidente a necessidade de considerar as relações institucionais esperadas e existentes para o Ensino Médio, que, aqui, são analisadas em termos de tarefas, técnicas, tecnologias e

teorias em função dos ostensivos e não ostensivos possíveis para a sua solução. Os objetos ostensivos são as escritas, os símbolos, as palavras e os gestos mobilizados na atividade matemática. Por exemplo, um nome, uma notação, um gráfico ou um esquema gestual que pode ser efetivamente manipulado na sua materialidade. E os objetos não ostensivos são noções, conceitos, idéias que aparecem associadas às técnicas, tecnologias e teorias e que só podem ser evocados com a ajuda dos objetos ostensivos, conforme Bosch e Chevallard (1999).

Para melhor identificar as possibilidades de trabalho com as noções de retas e planos no Ensino Médio e Superior apoiamo-nos na noção de quadro de Douady (1984, 1992), de níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1997) e de ponto de vista de Rogalski (1995, 2001), pois as relações institucionais associadas a essas noções podem ser diferenciadas por meio de mudanças de quadros e de pontos de vista. Permitem ainda a escolha de diferentes níveis de conhecimento esperados dos estudantes para o desenvolvimento da própria noção e das outras noções em jogo nas tarefas.

A noção de quadro definida por Douady (1984) evidencia a dualidade dos conceitos matemáticos que, em geral, funcionam inicialmente como ferramentas implícitas e, depois, ferramentas explícitas da atividade matemática antes de ter status de objeto e ser trabalhado como objeto do saber. Destaca o papel das mudanças de quadro na atividade e na construção do conhecimento matemático e transpõe estas características do funcionamento do matemático ao domínio da didática, por meio das noções de dialética, ferramenta, objeto e jogo de quadros. Douady (1984 e 1992).

Para auxiliar a escolha do uso de diferentes quadros consideramos a noção de níveis de conhecimento esperado dos estudantes de Robert (1997), pois ela permite verificar o nível de desenvolvimento do conhecimento prévio dos estudantes em relação a uma determinada noção matemática. Os níveis de conhecimento de Robert são: técnico, mobilizável e disponível.

O nível técnico corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas numa dada tarefa. Exemplo: Resolver um sistema de equações lineares pelo método do escalonamento. O nível mobilizável corresponde a um início de justaposição de saberes de um domínio, podendo até atingir uma organização dos mesmos. Neste nível o caráter ferramenta e objeto do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é explicitamente solicitado. Exemplo: Identificar o subespaço solução de um dado

sistema de equações lineares. O nível disponível corresponde, a saber, responder corretamente o que é proposto sem indicações. De poder apresentar contra-exemplos, mudar de quadro e fazer relações. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas, de questionamentos e de ser capaz de organizar diferentes noções. Exemplo: Identificar as equações de um sistema de equações lineares com retas, planos ou hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$ .

Para distinguir as diferentes representações de retas e planos em  $\mathbb{R}^n$  consideramos a noção de ponto de vista introduzida por Rogalski (1995) que observa que: Dois pontos de vista diferentes sobre um mesmo objeto matemático são duas maneiras diferentes de enxergá-los, de fazê-los funcionar, eventualmente de defini-los. Neste sentido, enxergar um objeto em diferentes domínios é ter diferentes pontos de vista. Mas podemos ter vários pontos de vista em um mesmo domínio. (Rogalski, 1995, tradução nossa).

### **Metodologia da pesquisa**

Para alcançar o objetivo proposto na pesquisa consideramos a seguinte metodologia:

Num primeiro momento, estudamos as relações institucionais esperadas via documentos oficiais: PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000); PCN+ Ensino Médio (2006); Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008); as relações institucionais existentes via livro didático de Barreto Filho e Xavier da Silva (2005) indicado no PNLEM/ 2005 e o caderno do professor (2008) distribuído pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo na sua rede de escolas.

Para verificar quais os traços sobre as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes do Ensino Médio analisamos o resultado do SARESP (2005) para as questões associadas às noções matemáticas escolhidas para a pesquisa.

### **Análise e comentários das propostas**

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio (PCNEM e PCN+)

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio é dada ênfase ao papel da linguagem da matemática enquanto instrumento de expressão e comunicação, ou seja, a Matemática é considerada como uma ferramenta que permite explicar o funcionamento do mundo por meio dos ostensivos escritos, orais, gestuais, visuais e táteis.

Quando se considera, mais especificamente, as noções de retas e planos no contexto da Geometria Analítica, constatam-se a proposta de passagem do quadro geométrico para o algébrico por meio da articulação entre figura geométrica e equação e vice-versa. Privilegia-se, assim, o ponto de vista cartesiano. Mas, também é prevista a introdução da noção de vetor por meio do ostensivo de representação gráfica, isto é, segmento orientado. Supõem-se a utilização do ostensivo de representação coordenada que possibilita a articulação de ostensivos orais, visuais e táteis para o espaço  $\mathbb{R}^3$ , em que é possível dispor de um discurso que considere esses ostensivos e o uso de materiais concretos para melhor visualizar as condições de solução dos sistemas  $2 \times 2$ ,  $2 \times 3$  e  $3 \times 3$ . O discurso oral permite discutir e justificar as possibilidades de solução dos sistemas lineares articulando quadro algébrico e geométrico e pontos de vista cartesianos e paramétricos.

#### A proposta curricular do Estado de São Paulo

Assim como nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, a Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo considera a Matemática uma linguagem que permite representar a realidade e, mais especificamente, permite expressar os fenômenos das Ciências Naturais.

Quando se considera especificamente o quadro da Geometria Analítica observamos que a nova proposta sugere o estudo das coordenadas por meio da localização em mapas e o estudo das simetrias e homotetias como extensão do que foi visto no ensino fundamental.

A grade curricular permite concluir que o desenvolvimento dos conteúdos deve privilegiar o estudo de retas e curvas no plano e o ponto de vista cartesiano uma vez que não existe nenhuma referência ao estudo matemático da noção de vetor.

#### Análise de um livro didático do Ensino Médio e do Ensino Superior e do caderno do professor

O livro didático é atualmente uma das ferramentas mais adaptadas para analisar as relações institucionais existentes para o ensino de uma determinada noção, pois são avaliados pelo

Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) sob a luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que segundo nosso referencial teórico corresponde à relação institucional esperada. Além disso, escolhemos analisar também o caderno do professor, pois ele permite identificar a relação institucional existente para uma determinada noção quando se considera a nova proposta do Estado de São Paulo.

A análise do livro didático apresentado e do caderno do professor foi estruturada em torno das seguintes questões: - A abordagem das noções de pontos, retas e planos se restringe aos espaços  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ ? - Quais os pontos de vista trabalhados no Ensino Médio e Superior? - Que ostensivos são relacionados aos pontos de vista considerados? - Quais as articulações levadas em conta e se elas possibilitam uma mudança de quadros? - Quais os conhecimentos prévios esperados dos estudantes e qual o nível esperado para esses conhecimentos segundo definição de Robert (1997)? - Há um discurso tecnológico, isto é, um discurso que acompanha as técnicas desenvolvidas nas tarefas apresentadas como exemplos para os estudantes?

**Análise da obra: Matemática aula por aula – Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva – volume único – 2005**

A obra de Barreto e Silva (2005) apesar de indicada pelo PNLEM, não contempla todas as propostas dos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio, principalmente no que se refere à articulação de conhecimentos, ou seja, cabe ao professor identificar os conhecimentos prévios e propor atividades que podem ser trabalhadas em conjunto com a noção de retas. Nesse caso, a obra pode auxiliar tanto estudantes como professores a questionarem sobre tecnologias e teorias que justificam as técnicas nela apresentadas.

Mesmo iniciando com uma revisão da geometria plana desenvolvida no Ensino Fundamental, os autores pouco aproveitam para justificar o trabalho algébrico apoiando-se no quadro geométrico como propõe Douady (1984). A articulação de pontos de vista cartesianos e paramétricos não é trabalhada na obra, pois não se introduz a noção de vetores. O ponto de vista cartesiano é desenvolvido utilizando diferentes ostensivos de representação, mas falta um discurso que justifique sua necessidade. A obra se centraliza principalmente nas representações das noções de retas em  $\mathbb{R}^2$ , permitindo um trabalho mais associado aos procedimentos de determinação dessas representações o que tende a proposição de tarefas que privilegiam o nível técnico.

### Análise da obra: Matemática –Luiz Roberto Dante – volume único – 2005

A obra de Dante (2005) é considerada como inovadora pelo PNLEM, pois o autor segue as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio preocupando-se em integrar de forma lógica e harmônica os conteúdos, retomando-os quando possível nos diferentes capítulos. A articulação entre os conhecimentos prévios e os novos conhecimentos é acompanhada de um discurso tecnológico que justifica a necessidade de novas técnicas e representações. Além disso, as tarefas resolvidas e propostas aos estudantes, apesar de exigirem nível técnico, são classificadas como mobilizável e disponível em relação às noções de retas e outras noções em jogo.

Ao desenvolver técnicas e tarefas utilizando os conhecimentos prévios supostos disponíveis, o autor apresenta um discurso tecnológico para justificar essas técnicas que permite estender o campo conceitual dos estudantes, mesmo para aqueles que tenham alguma lacuna, que poderá ser preenchida no desenvolvimento do curso pelo professor.

### Análise do caderno do professor da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (2008)

No caderno do professor verificamos que a abordagem proposta considera apenas o plano  $\mathbb{R}^2$  e conseqüentemente limita o estudo de retas ao plano. Dessa forma, o ponto de vista privilegiado é o cartesiano. Ressaltamos a articulação com a noção de função afim que é uma recomendação dos PCNEM.

### Análise da obra: Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial – Paulo Boulos e Ivan de Camargo – Ensino Superior – 2005

O estudo da Geometria Analítica é considerado apenas para o espaço  $V^3$ , para a obra considerada, apenas as noções de geometria euclidiana e determinante de uma matriz são consideradas como conhecimentos prévios disponíveis pelos autores. Nenhuma articulação com os conhecimentos de Geometria Analítica estudados no Ensino Médio é considerada nessa obra.

### Uma breve análise das relações pessoais esperadas dos estudantes via SARESP 2005.

A Análise das relações pessoais esperadas dos estudantes foi feita nessa pesquisa via SARESP 2005. Observamos que em 2005 dava-se uma grande ênfase às questões de Geometria Analítica,

pois encontramos oito questões que demandavam: a distância entre dois pontos, as coordenadas do ponto médio, a área de um triângulo, a equação geral de uma reta, verificar se um ponto pertence a uma reta, a passagem de uma representação paramétrica para uma representação cartesiana, a posição relativa de uma reta e determinar o centro e o raio de uma circunferência dada sua equação. É importante observar que, nestas questões, o nível de conhecimento esperado dos estudantes variava entre o mobilizável e o disponível.

### Considerações Finais

As análises das relações institucionais feitas neste estudo sugerem que na transição entre o Ensino Médio e Superior, no que se refere às noções de retas e planos, existe uma lacuna na articulação entre plano e espaço. É preciso observar que  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  são espaços de naturezas distintas. Um elemento pertencente ao  $\mathbb{R}^2$  é um par enquanto um elemento pertence ao  $\mathbb{R}^3$  é uma terna, o que supõe um discurso que justifique as regularidades e diferenças entre estes dois espaços. Ressaltamos a relevância do desenvolvimento das noções e técnicas associadas ao estudo da geometria por meio de suas equações a partir de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  o que pode favorecer a visualização e compreensão das noções em jogo e a negociação de significado entre professor e aluno.

A lacuna aqui observada está associada à proposta de análise de documentos. Essa lacuna pode ser trabalhada pelo professor por meio de comparações entre os diferentes materiais propostos para o Ensino Médio e Superior.

### Referências bibliográficas

- Barreto Filho, B. & Xavier da Silva, C. (2005) Matemática: aula por aula. São Paulo: FTD.
- Bosch, M. & Chevillard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, Recherches en didactique des mathématiques 19(1), 77-123.
- Boulos, P. & Camargo, I. (2005) Geometria Analítica: Um tratamento Vetorial. São Paulo: McGraw-Hill.
- Brasil. (2000). Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: MEC, SEMTEC.

Brasil. (2005) Matemática: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2005 / Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Brasil. (2006). Parâmetros Curriculares nacionais: ensino médio +: Ciências da Natureza e suas tecnologias. Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: MEC, SEMTEC. Acesso em: 20/03/2010. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>

Chevallard, Y. (1996). Les outils sémiotiques du travail mathématique *Petitx*, 42, 33-57.

Dante, L.R. (2005) Matemática: livro do professor. São Paulo: Ática.

Douady, R. (1984). „Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l’enseignement des mathématiques. Paris : IREM de l’Université de Paris VII.

Douady, R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l’enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

Robert, A. (1997). Quelques outils d’analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l’université. En *Actes de la IX école d’été de didactique des mathématiques de Houlgate* (pp. 193-212). França: Houlgate.

Rogalski, M. (1995). Notas manuscritas do seminário em São Paulo. Brasil.

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et les jeux de cadres de Régine Douady En *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (pp. 13-30). França : Paris.

São Paulo (2008) Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.. São Paulo: SEE.

São Paulo. (2005) Saresp Encontro de Matemática Avaliações Externas. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP. São Paulo: SEE. Acesso em: 21/03/2010, Disponível em: <http://saresp.edunet.sp.gov.br/2008/>

São Paulo. (2008) Caderno do professor: Matemática, Ensino Médio – 3ª série, 1º bimestre. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. São Paulo: SEE.