

## DIFICULTADES DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE RAZÓN Y PROPORCIÓN: ESTUDIO DE CASO

Marta Elena Valdemoros Álvarez

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

mvaldemo@cinvestav.mx

Campo de investigación: Educación de adultos

México

Nivel: Superior

**Resumen.** *El caso que estamos comunicando es el de Roberto, un profesor de Matemáticas, responsable del primer grado de secundaria de una escuela pública. Nuestro seguimiento sistemático de dicho maestro, durante tres años, está inserto en el estudio de tres casos desarrollado en una maestría orientada a la educación matemática, donde él decidió dedicarse en profundidad a la planeación y enseñanza de razón y proporción en su grupo escolar, privilegiando el uso de las fracciones. Nuestro estudio de este caso está organizado en tres fases: 1) La exploración de la enseñanza impartida por este maestro antes de incorporarse al posgrado. 2) La planeación didáctica de varias clases de razón y proporción por parte de Roberto. 3) La intervención didáctica del mencionado maestro en el aula, aplicando lo ya programado. En todo ello, nuestras preguntas de investigación estuvieron referidas a cómo enseñaba razón y proporción dicho profesor y cuáles eran las dificultades que enfrentaba en la planeación de clases y en su aplicación en el aula.*

**Palabras clave:** razón y proporción, planeación, enseñanza, dificultades

### Introducción

Durante tres años llevamos a cabo un seminario referido a la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, en una maestría centrada en la educación matemática, donde se brindó formación a profesores pertenecientes al sistema de educación básica, quienes se encontraban en pleno ejercicio de sus labores docentes. En este ámbito, realizamos una investigación longitudinal de tres años, a través de un *estudio de casos con tres estudiantes* incorporados a dicho seminario, los cuales *reconocían múltiples dificultades en la enseñanza de fracciones*, tanto con referencia a distintos contenidos curriculares relativos a dichos números como a diferentes grados de primaria y secundaria (razón por la cual, estos casos son escasamente comparables entre sí).

Aquí, tan sólo presentamos el caso de Roberto, maestro de primer grado de secundaria, quien escogió profundizar la *enseñanza de razón y proporción mediante el uso de fracciones* e identificar las *dificultades asociadas a la misma*, problema que aquí es *reconstruido a la luz de cómo lo desarrolla el profesor* de educación básica (desde su *planeación* hasta su *abordaje concreto en el aula* y su posterior *evaluación*). En la presente investigación, el *problema de estudio* es la identificación de las *dificultades didácticas* que en tal recorrido enfrenta este profesor. De acuerdo

con Bishop (2000), el caso de Roberto se integra en el sector de la *educación de adultos* constituido por aquellas personas que retoman y continúan su formación para actualizar sus posibilidades de ejercicio profesional, perfil de adultos que se suma al de muchos otros, con necesidades educativas diversas y contrastantes características entre sí.

### Marco teórico

La literatura especializada abordada en el seminario de la maestría privilegió la gran riqueza semántica de las fracciones, entre cuyos *constructos intuitivos* se destacan los *significados* de la relación parte-todo, el cociente, la medida, el operador multiplicativo y la *razón*, según Kieren (1984, 1988). Atendiendo a tales contenidos semánticos de la fracción, los integrantes del seminario de la maestría escogieron con cuáles de ellos llevarían a término un proyecto de desarrollo consistente en estudiar a profundidad sus fundamentos, planear clases referidas a dicho tópico y luego aplicarlas en el aula; Roberto asumió estas labores en vinculación con el abordaje de razón y proporción.

La *razón* fue definida en el seminario de la maestría como la relación entre dos magnitudes, en tanto que la *proporción* fue entendida como la relación de equivalencia entre dos o más razones (Hart, 1988). Cuando las magnitudes eran del mismo tipo se identificaron las *razones internas*, en contraste con las *razones externas*, cuya composición remitió a magnitudes de distinta naturaleza, de acuerdo a Freudenthal (1983).

Asimismo, fue adoptado el enfoque didáctico de Freudenthal (1983) y Streefland (1991) con el sentido de que la enseñanza a desarrollar en el aula debe ser fenomenológicamente rica, marcadamente variada, bien integrada y con gran apego a la vida real de los sujetos del aprendizaje y de sus experiencias cotidianas.

Roberto asumió el planteamiento de Ruiz (2002) y Ruiz y Valdemoros (2004, 2006) según el cual, para el sujeto del aprendizaje, *la proporcionalidad cualitativa precede a la proporcionalidad cuantitativa*, requiriéndose a partir de ello que el diseño didáctico de la enseñanza se ajuste a tal circunstancia; en ese marco de referencia, el pensamiento proporcional cualitativo se expresa mediante palabras (como “grande”, “mediano”, “pequeño”, las que permiten hacer diversas comparaciones), en tanto que el pensamiento proporcional cuantitativo se manifiesta a través de

relaciones numéricas. La raíz última de dicho eje teórico de planeación instruccional la retoman las mencionadas investigaciones de Piaget e Inhelder (1978) y de Van den Brink y Streefland (1979), quienes formulan que el *pensamiento cualitativo* del sujeto cognoscente evoluciona hacia un *pensamiento cuantitativo*, llegando luego a coexistir ambos y brindando el primero fundamento y sentido al segundo.

### **Problema, preguntas de investigación y objetivo del estudio**

Nuestro *problema de investigación* es:

La indagación de las dificultades implícitas tanto en la planeación didáctica como en la enseñanza inicial de razón y proporción, atendiendo en especial a la emergencia de los números fraccionarios en este ámbito.

Las *preguntas del estudio* son:

¿Cómo desarrolla el maestro la enseñanza de razón y proporción? ¿Qué dificultades didácticas debe superar en dicha práctica?

El *objetivo de la investigación* es:

Explorar la enseñanza de razón y proporción que Roberto diseña y desarrolla en su grupo de primer grado de secundaria.

En este estudio de caso *no se formula ninguna hipótesis inicial* porque la investigación es de naturaleza exploratoria. Por no haberse realizado indagaciones previas en este terreno, sus resultados representan una aportación bastante original a esta disciplina.

### **Método**

El *sujeto* del presente estudio de caso fue Roberto, maestro de primer grado de secundaria (cuyos alumnos tenían doce y trece años de edad), con quince años de práctica docente previa, quien decidió abordar el *tratamiento didáctico de razón y proporción*.

El *escenario* en el que llevamos a término la investigación fue la institución educativa en donde este profesor estudió su maestría.

Para el seguimiento del caso que nos ocupa aquí, involucramos varios *instrumentos metodológicos*:

a) Diversas modalidades de *observación indirecta* de la enseñanza (presentación de *reportes verbales* del maestro y de *videgrabaciones* de la *intervención didáctica* en el salón de clases) y, al final, varias experiencias de *observación directa* del aula.

b) Seis *entrevistas* individuales y semiestructuradas (dos en cada una de las tres fases de la investigación).

La *validación* del estudio la realizamos a través de *triangulaciones entre diversos métodos y de triangulaciones en el tiempo*, de acuerdo con Cohen y Manion (1990), Woods (1998), Taylor y Bodgan (1987). Por los primeros procedimientos contrastamos unos con otros, dentro de una misma fase de la investigación, los resultados obtenidos mediante las entrevistas y las diferentes modalidades de observación. Apoyándonos en los segundos procedimientos, comparamos entre sí los contenidos similares dados en las tres fases de la investigación. Así, también se nutrió el análisis del caso.

### Resultados del estudio

I. En la *primera fase* de la investigación (consistente en el reconocimiento de la *experiencia docente previa* a su integración al posgrado), en las *entrevistas* pudimos *reconstruir críticamente la enseñanza de razón y proporción* desarrollada por Roberto antes de incorporarse a la maestría, práctica que él caracterizó como:

“Una enseñanza muy cargada de algoritmos, aislada de las situaciones reales que viven los alumnos y sin que yo llegase a despertar la intuición de ellos... Comenzaba la clase presentando uno o dos ejercicios a ser resueltos por los alumnos e inmediatamente iniciaba una extensa ejercitación del algoritmo de la regla de tres... No usaba libros de texto”.

A lo cual agregó:

“Ya vieron el error que yo cometí ahora [con esto, se estaba refiriendo a los problemas que tomé de la investigación de Hart (1988) y los aplicó a sus estudiantes, durante el primer año de su permanencia en la maestría], empecé con el algoritmo para obtener proporciones y me di cuenta

de que yo carezco de los elementos necesarios para poderles enseñar a los niños, por ejemplo, a conceptualizar la proporcionalidad y a dar sentido a la unidad”.

Con respecto a las *dificultades de enseñanza* de razón y proporción que Roberto podía reconocer en su práctica docente de los años previos, él enfatizó: “No logro que el alumno entienda qué es la razón ni sus distintos significados... por eso yo estoy aquí, porque quiero aprender todo esto para podérselo enseñar a mis alumnos”.

Cuando se le preguntó acerca de la algoritmización de su enseñanza de la que ya había estado hablando, Roberto respondió:

“Sin lugar a dudas, ésa fue una gran dificultad años atrás; pero algo que he podido reconocer en la maestría, ahora, es que llegar al algoritmo es el último paso de la enseñanza porque es conveniente empezar por lo más sencillo hasta trabajar lo más complejo, lo que viene siendo el conocimiento formal, lo algorítmico... Porque no es con una constante ejercitación de los algoritmos aislados que los estudiantes van a aprender más; ése es un error y es el error de muchos maestros”.

Por último, Roberto destacó: “Otra dificultad de enseñanza muy importante consistió en que yo no podía reconocer los errores comunes de los estudiantes” y por eso “tampoco ajustaba mi enseñanza para ayudarlos a superar dichos errores”.

La *observación indirecta del aula* se logró a través de varios *reportes verbales* en el seminario de la maestría, donde Roberto informó acerca de *diversas aplicaciones de problemas a sus estudiantes* (tareas que fueron retomadas de la literatura especializada en razón y proporción, durante el primer año de la maestría) y, también, mediante *videograbaciones* de dichas experiencias. De conjunto, estas observaciones indirectas nos permitieron confirmar buena parte de lo planteado por este maestro, en las entrevistas.

II. Durante la *segunda fase* de la investigación (etapa de *planeación de la instrucción*), Roberto diseñó siete sesiones de enseñanza cuya progresión inició con la *resolución cualitativa* de distintos problemas de proporcionalidad, avanzando poco a poco hacia la *resolución cuantitativa* de nuevas tareas, previendo en ellas el desarrollo final de los algoritmos básicos. *Los problemas de estas clases eran de naturaleza mixta: incluían breves textos y figuras, comúnmente presentadas en papel cuadriculado para que pudieran ser ampliadas o reducidas. Para el desarrollo del*

*pensamiento proporcional cuantitativo también se incluyeron tablas a ser interpretadas o elaboradas por los estudiantes.* Ejemplo de un problema propuesto para indagar la proporcionalidad cualitativa: en una misma hoja, presentación del dibujo grande de una casa (modelo), acompañado de cuatro dibujos menores de casas, entre las cuales debía reconocer el alumno cuál era la que correspondía a una “reducción” del modelo. Ejemplo de una tarea destinada a explorar la proporcionalidad cuantitativa: en papel cuadriculado se presentaban dibujados un objeto y su sombra, requiriéndose al estudiante dibujar y cuantificar la sombra del segundo objeto representado en esa misma hoja.

Pudimos reconstruir esto a través de dos *entrevistas* donde Roberto expuso sus reflexiones acerca de los fundamentos del diseño didáctico de clases y las dificultades asociadas a tal planeación. Con respecto a la *programación de actividades*, él destacó:

“Lo más importante en el tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo es que, en este último terreno, el alumno construya los conceptos de *razón* y de *proporción*, así como también, de *razón interna* y *externa*... Las tareas que se diseñen deben generar discusión y enriquecer a los estudiantes, quienes elaborarán aquellos conceptos a medida que vayan descubriendo los valores numéricos de las relaciones que estén considerando... Todo esto tiene que desarrollar competencias en los alumnos”.

En cuanto a las *dificultades del diseño de clases* Roberto señaló:

“Lo más notable fue romper con el paradigma de algoritmización de la enseñanza, muy fuerte y arraigado para mí... Otra dificultad importante fue decidir acerca de la estructura que debían presentar las actividades diseñadas... Muy relevante fue que las clases resultasen interesantes para los estudiantes... También me preocupaba poder reconocer qué preguntas realmente guiaban a los alumnos hacia la comprensión de los problemas”.

La *observación indirecta del aula* se ejerció a través de la presentación de *reportes verbales* en el seminario de la maestría, los que eran contrastados con las *videograbaciones* del *piloteo* realizado en torno a los problemas y las clases planeadas por Roberto. Así, pudimos establecer que los cambios introducidos por él, en su práctica docente, habían producido mejorías notorias en el aprendizaje de los estudiantes del *piloteo*. Por otra parte, después de esta última experiencia y como resultado de ella, Roberto mejoró el diseño de las actividades didácticas programadas.

III. En la *tercera fase* del estudio (consistente en la *intervención didáctica en el aula*), Roberto desarrolló las clases diseñadas y evaluó los avances de sus estudiantes mediante la aplicación de un cuestionario previo a la enseñanza y de un cuestionario final, a los que en último término contrastó, haciéndose evidente un claro progreso en el aprendizaje de todo el grupo porque al concluir disminuyó ostensiblemente el total de errores de los alumnos y no se registraron ya tareas sin respuesta.

En las *entrevistas*, con respecto a la *enseñanza*, Roberto expresó:

“Tuve que hacer grandes esfuerzos para que los estudiantes comprendieran *qué son la razón y la proporción* ... Además, tuve que indagar por qué cometían errores, para procurar guiarlos en su superación ... En el terreno cuantitativo, continué modificando los factores escalares para que los alumnos *no creyeran* (como habían empezado a hacerlo) *que “ampliar” una figura es duplicarla y que “reducirla”, es dividirla a la mitad* ... Un gran logro fue la facilidad con la que los estudiantes llegaron a leer y organizar tablas de proporcionalidad”.

En cuanto a las *dificultades didácticas* que aún experimentaba, Roberto dijo:

“A pesar de haber avanzado mucho como maestro, me cuesta modificar el estilo algoritmizado de enseñanza que antes tenía; por ejemplo, no me resultaría sencillo enseñar, sobre los nuevos fundamentos didácticos, la división de fracciones o la función lineal, mencionando contenidos matemáticos próximos al que ya trabajé en la maestría”.

También en esta fase, la *observación indirecta* del salón de clases se cumplió a través de la presentación de *reportes verbales* en el seminario de la maestría, los que fueron comparados con las *videgrabaciones* del desarrollo de las clases planeadas por Roberto para el primer grado de secundaria. Otro miembro del seminario sobre fracciones realizó *observaciones directas* del aula, en las que pudo detectar las dificultades de Roberto para dar sentido a los algoritmos y para ayudar a los estudiantes a superar errores.

Tanto las entrevistas como las observaciones indirectas se complementaron adecuadamente y nos permitieron comprobar que este profesor produjo un profundo giro en sus tratamientos de razón y proporción; aunque reconocemos que son muchas las causas que determinaron dichos cambios, sin lugar a dudas, en un lugar fundamental se sitúa la planeación progresiva y crítica que Roberto realizó en la segunda fase de nuestra investigación. Por otra parte, es remarcable que las

dificultades didácticas que este maestro reconoció en la enseñanza de razón y proporción, tendieron a evolucionar en el transcurso de nuestro estudio y a consecuencia de sus progresos en la maestría a la que él se incorporó.

### Conclusiones

Al comienzo del estudio, Roberto reconstruyó críticamente la enseñanza de razón y proporción por él desarrollada durante quince años, indicando que *su instrucción estaba cargada de algoritmos y reglas, pero carente de nexos con la vida real de los estudiantes* y que por ello, éstos no comprendían los conceptos de razón y proporción. *Pudimos constatar esto mediante la observación indirecta* desarrollada y también comprobamos, por esa vía, que *la algoritmización de la enseñanza era el rasgo común en la práctica docente previa de los tres casos*, en nuestra investigación.

En la segunda etapa del presente estudio, habiendo avanzado en la maestría respecto a sus conocimientos didácticos de razón y proporción, Roberto efectuó la planeación de siete clases que involucraron problemas tendientes a generar, en los estudiantes, una evolución desde el pensamiento proporcional cualitativo al cuantitativo. También, llevó a cabo un ensayo preliminar de toda esta experiencia y de su evaluación. *Nosotros pudimos advertir que, por la fecunda realización de la planeación de clases, la práctica docente de Roberto en esta etapa evidenció profundos cambios y avances, en contraste con el período previo.*

En la tercera fase de nuestro seguimiento, Roberto aplicó sistemática y secuencialmente sus siete clases, procurando lograr la comprensión de la razón y la proporción en sus alumnos y dejando para el momento final la introducción de algoritmos y reglas. La evaluación del aprendizaje de sus estudiantes indicó grandes progresos en ellos, atendiendo al contraste entre el cuestionario inicial y el final que les aplicó (en el último, se pudo constatar una marcada disminución de los errores registrados en cada tarea). Pese a todo eso, *detectamos que Roberto continuaba evidenciando dificultad para reconocer los errores de los alumnos, en el desarrollo de las clases.*

Aunque las dificultades didácticas experimentadas por Roberto fueron cambiando en las diversas etapas de esta investigación longitudinal de tres años ya concluida, pudimos constatar que *las labores de planeación desarrolladas en la segunda fase fueron profundamente esclarecedoras para*



*este profesor* y le permitieron incursionar en la subsiguiente fase de intervención en el aula y de evaluación de resultados, con mayor claridad y consistencia, así como con menos conflictos didácticos.

### Referencias bibliográficas

- Bishop, A. (2000). Preface. En: D. Coben, J. O. Donoghue y G. FitzSimons (Eds.), *Perspectives on adults learning Mathematics* (xi-xiii). Dordrecht, Holanda: Kluwer Publishers.
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Reidel Publishing Company.
- Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Concepts and operations in the middle grades*, 2 (pp. 198-219). Reston, EUA: NCTM.
- Kieren, T. (1984). *Mathematical knowledge building: The Mathematics teacher as consulting architect*. 35th International Congress on Mathematics Education, 187-194.
- Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Concepts and operations in the middle grades*, 2 (162-181). Reston, EUA: NCTM.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1978). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En: J. Delval (Ed.), *Lecturas en Psicología del Niño*, 1 (70-119). Madrid, España: Alianza Editorial.
- Ruiz, E. F. (2002). *Estudio de estrategias de solución y una propuesta para la enseñanza de razón y proporción*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
- Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. E. (2004). Connections between qualitative and quantitative thinking about proportion: The case of Paulina. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, (pp. 201-208). Bergen, Noruega.
- Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. E. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: El caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 9 (2), 299-324.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education*. Disertación doctoral. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Van den Brink, J. y Streefland, L. (1979). Young children (6-8) – Ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 403-420.

Woods, P. (1998). *Investigar el arte de la enseñanza. El uso de la Etnografía en la educación*. Barcelona: Paidós.