

ANÁLISIS COGNITIVO DE LOS ALUMNOS AL RESOLVER PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS

Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo

UTVM

México

CICATA-IPN

ESIME-IPN

elitret@hotmail.com

Campo de investigación: Resolución de problemas

Nivel: Superior

Resumen. *En todos los niveles educativos se plantea como una necesidad que los alumnos sean competentes en matemáticas, particularmente en la resolución de problemas reales. Debido a ello y teniendo como marco teórico a los Campos Conceptuales de Vergnaud y marco de referencia a la Matemática en el Contexto de las Ciencias se realiza el análisis del conocimiento del estudiante en relación al campo conceptual de sistema de ecuaciones en el balance de materia, atendiendo particularmente situaciones de mezclado de sustancias químicas. Los resultados mostrados son derivados de la observación de un grupo de enfoque que trabajo durante seis sesiones tanto en laboratorio como en salón de clases.*

Palabras clave: contexto, ecuaciones, matemática, campos conceptuales

Introducción

La instrucción matemática en el nivel Técnico Superior Universitario vive condiciones particulares pues de acuerdo al modelo educativo se debe privilegiar un conocimiento matemático contextualizado, coincidiendo con lo que propone Camarena (1995), Riodan & Noyce (2001) y Meyer & Diopulus (2002). Adicionalmente el estudiante se forma para insertarse directamente en el mercado laboral y en su vida profesional deberá resolver problemas técnicos donde se requiere integrar conocimientos específicos de su formación con conocimientos matemáticos básicos. Un caso particular lo ocupan los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, concepto matemático que de forma recurrente se requieren para modelar fenómenos del área de competencia de los Técnicos Superiores en Tecnología de Alimentos (balance de materia, estandarización de leche, jugos, soluciones químicas, por citar algunas). Sin embargo, a pesar de ser un tema que se aborda desde secundaria, en el nivel educativo de interés se ha detectado que los estudiantes presentan dificultades para modelar mediante este objeto matemático problemas contextualizados. Algunos investigadores como Camarena (1995) y Rivera *et al* (2003) consideran que esto se ve favorecido por la falta de conceptualización y desde luego por presentar conocimientos aislados, desarticulados y sin significado para los estudiantes; para subsanar en la

medida de lo posible esta situación proponen el presentar a los estudiantes una matemática con problemas reales de la vida cotidiana de tal manera que se logre la aprehensión del conocimiento. En relación con los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas se han realizado investigaciones como las de Herrero (2004) y Ochoviet (2009) donde se hace manifiesta la necesidad de estudios que generen propuestas didácticas. Empero, hasta el momento no se tiene reportada ninguna en el contexto del nivel de estudios de interés, siendo un campo de aprendizaje con condiciones particulares.

Derivado de lo anterior se tiene la necesidad de entender cómo se da el proceso cognitivo de los estudiantes al enfrentarlos a un conocimiento matemático en un contexto particular, por lo que en este reporte se hace mención a una alternativa entre otras, para explicar cómo el estudiante adquiere el concepto de sistemas de ecuaciones lineales en el contexto del balance de materia, en situaciones de mezclado de sustancias químicas. La explicación de los resultados se realiza utilizando como marco teórico a los campos conceptuales de Vergnaud (1990), por lo que se analizan los esquemas mentales de un grupo de enfoque. Dado que se trabajó con un problema contextualizado se tuvo como marco metodológico a la fase didáctica de la Matemática en Contexto de las Ciencias (Camarena, 1995).

Metodología

El estudio cognitivo se realizó a través de dos componentes básicos, a saber:

1. La actuación de los estudiantes sobre el campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el balance de materia. Ubicándose las situaciones que le dan utilidad y significado al concepto. Por lo tanto en esta investigación se han considerado tareas, actividades y problemas en donde se requieren conceptos matemáticos en vinculación con el mezclado de sustancias químicas.
2. Esquema mental, visto como una forma de organización de la actividad que genera la acción, en donde están presentes los siguientes elementos: propósitos, invariantes operatorios, inferencias y reglas de acción. En relación con los esquemas mentales de entendimiento se clasificaron como canónicos, no canónicos; los esquemas de solución en e algorítmicos y no algorítmicos tal como lo

propone Flores (2005). De igual manera se caracteriza el dominio progresivo del campo conceptual de interés para lo cual se establece una propuesta de la progresividad.

El grupo de enfoque estuvo formado por dos estudiantes de 17 años de edad, los cuales cursaban Matemáticas I en el Programa Educativo de Tecnología de Alimentos de la Universidad Tecnológica del Valle del Mezquital, ubicada en Ixmiquilpan, Hidalgo México. Los cuales se enfrentaron a situaciones (en el sentido de Vergnaud) de salón de clases (lápiz y papel). Se diseñaron cuatro situaciones. La primera situación tuvo una duración de dos horas, la segunda situación se atendió en dos clases de laboratorio de 3 horas cada una; al igual que la tercera situación. Finalmente la última en una sesión de salón de tres horas.

Resultados y discusión

1) Determinación de las situaciones

Vergnaud (1990) establece que un estudiante le dará sentido a un concepto a través de diferentes situaciones en que esté presente dicho concepto. Entonces, la operacionalidad de un concepto debe ser experimentada por medio de situaciones diferentes, de tal forma, que el análisis de la variedad de conductas del sujeto ante estas situaciones muestre un panorama cognitivo sobre el concepto. Esta definición pragmática, relaciona el conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades y el conjunto de las acciones de los estudiantes para el análisis de su aprendizaje. Con esta idea y de acuerdo a resultados de investigaciones previas se consideró que las situaciones de contexto que propician la vinculación de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas son las que se derivan del mezclado de sustancias químicas. Estas situaciones se identifican mediante el cambio de concentración de la sustancia en donde está presente el planteamiento de sistema de ecuaciones lineales. Entonces el campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales se puede formar por un conjunto de situaciones cuyo marco sea el mezclado de sustancias químicas, en donde se propongan una serie de tareas ya sea en condiciones de laboratorio o en lápiz y papel que permitan analizar la acción del estudiante ante dichas situaciones.

Cobijados en la idea anterior y de acuerdo con la caracterización de los sistemas de ecuaciones lineales en el fenómeno de balance de materia se propusieron cuatro situaciones de las cuales

emanaron tareas. Las tareas establecidas se caracterizan por la relación entre los conceptos derivados de los contenidos matemáticos y del contexto. Las situaciones se enuncian a continuación

Situación A	Estado inicial del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales en el contexto del balance de materia.
<p>Para determinar el estado inicial del campo conceptual de interés se plantea a los estudiantes una serie de preguntas que permitirán la exploración del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales en el contexto del balance de materia. Así mismo se propone la solución de un problema contextualizado.</p> <p><i>Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 500 L de solución de ácido al 25%. Si en existencia hay disponibles solución al 30% y al 18% ¿Cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?</i></p>	

Situación B	Comprensión del fenómeno.
<p>La parte sustantiva de la segunda situación en el reconocimiento del fenómeno a través de la fase experimental: Preparación de soluciones químicas con concentración porcentual, específicamente soluciones azucaradas. Un aspecto importante a analizar será la interacción, la observación, la comprobación y la toma de datos. Al realizar esta segunda etapa se ha considerado que el estudiante cuente con los conocimientos previos sobre preparación de soluciones químicas, específicamente de concentración porcentual, dado que precisamente de este conocimiento se desprenden las tareas.</p>	

Situación B: Comprensión del fenómeno.	
Tarea 1	<p>Se solicita a los estudiantes preparar:</p> <p>100 mL de solución azucarada al 35%. Comprobar la concentración mediante el refractómetro. Indicar cuantos gramos de azúcar se requieren y que volumen de agua.</p>
Tarea 2	<p>100 mL de solución azucarada al 60%. Comprobar la concentración mediante el refractómetro. Indicar cuantos gramos de azúcar se requieren y que volumen de agua.</p>
Tarea 3	<p>Construir una tabla en donde se indique cuantos gramos de azúcar se requieren para preparar 100 mL de las siguientes soluciones porcentuales: 5%, 10%, 15%, 20%, 30%, 35%, 40%, 45%, 50%, 55%, 60%, 65% y 70%.</p>
Tarea 4	<p>Con la tabla construida elaborar una gráfica. ¿Qué representa la gráfica?; ¿Qué variable representa el eje x? ¿Qué variable representa al eje y?; ¿Dónde se espera que la gráfica corte al eje de las y? Explica por qué. Se puede obtener la ecuación de la gráfica ¿Cuál es?.</p>

Situación C	Mezclado de soluciones químicas (Balance de materia).
<p>Las tareas que se plantean en esta situación tienen el objetivo de que el estudiante analice el comportamiento lineal mediante la obtención de combinaciones de concentraciones y volúmenes (Cada uno por separado) para posteriormente confrontarlo con la idea de manejar las dos variables simultáneamente. Induciéndolo a la búsqueda de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas para su solución. Una vez obtenido el modelo matemático se busca el análisis en la representación gráfica. De tal manera que los conceptos que se trabajan en esta situación estén relacionados con ecuaciones lineales y sistema de ecuaciones lineales (representación analítica y gráfica). A su vez se vinculan los conocimientos matemáticos con los técnicos al estarse resolviendo un problema del área profesional.</p>	

Situación C: Mezclado de soluciones químicas	
Tarea 1	A partir de los 100 mL al 35% y los 100 mL al 60%, indica que volumen podrías colocar de cada una de las soluciones si quieres obtener un volumen final de 100 mL (no consideres la concentración); escribe estas combinaciones en una tabla de datos y luego graficalos. Explica que representa la gráfica. Escribe una ecuación matemática que describa la mezcla de volúmenes.
Tarea 2	Ahora solo toma en cuenta las concentraciones para obtener una mezcla resultante al 50% (no tomes en cuenta el volumen).Escribe estas combinaciones en una tabla de datos y graficalos. Explica lo observado en la gráfica. Escribe una ecuación que represente el mezclado de las concentraciones.
Tarea 3	Ahora se debe considerar tanto el volumen como la concentración para reparar con las dos soluciones una mezcla para obtener una solución resultante de 100 mL al 50%. Debes comprobar la concentración mediante el refractómetro. ¿Cuántas posibles combinaciones existen que satisfagan las dos condiciones?¿Por qué? Escribir cuál es la(s) expresión(es) matemática(s) que permite obtener los mililitros a mezclar de cada una de las dos soluciones para obtener 100 mL al 50%. La expresión matemática ¿Se puede representar gráficamente? Si es así ¿Qué representa la gráfica?. En relación con la representación gráfica, explica qué sentido tendría un resultado obtenido en el segundo y cuarto cuadrante.

Situación D	Aplicación en la industria.
<p>Con el objetivo de analizar la progresión en la adquisición del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el balance de materia, se plantea una última actividad enmarcada por un problema de mezclado de sustancias azucaradas, teniendo la finalidad de preparar un néctar. Es decir este problema emula una situación real ubicada en la industria de los alimentos.</p>	

Situación D: aplicación en la industria.	
Tarea 1	Se desea obtener un lote de néctar de mora que tenga 20% de pulpa y 12 ° Bx finales, con un índice de madurez de 15. (Recordar que el índice de madurez es la relación de azúcar/ácido

	presentes en el néctar). La pulpa disponible tiene 12° Bx y 1.6% de acidez. ¿Cuántos Kg de pulpa y de sacarosa se deben mezclar para obtener un lote de néctar con 20% de pulpa y 12° Bx?
--	---

II) Aproximación cognitiva

La aproximación cognitiva del concepto de interés se realizó en cada una de las etapas de las situaciones planteadas, se analizó y clasificó el tipo de representación e invariantes operatorios utilizados por el grupo de enfoque para dar respuesta a las tareas planteadas (tabla 1).

Tabla 1. Aproximación cognitiva al campo de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto de mezclado de soluciones químicas.

Situación	Tarea	Tipo de representación		Invariantes operatorios	
		Esquema de entendimiento	Esquema de solución	Invariante	Categoría de análisis
A. Estado inicial del CC de SEL2 -BM <i>Escenario: salón de clases</i>	Comprensión del campo conceptual de SEL2 en el contexto del BM	C N	NA SE	Ec. Lineal, rep. Graf y anal.# de incógnitas y # de ecuac. Métodos de solución, BM, Concentración	EE,R, CL
	Solución de un problema contextualizado por medio de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	<i>No se resolvió el problema.</i>			
B. Comprensión del fenómeno <i>Escenario: salón de laboratorio</i>	Preparar 100 mL de solución azucarada al 35%.	C C	A NA	Entradas y salidas del BM, [Solutos] [%]; azúcar=°Bx	R, OP, RS
	Preparar 100 mL de solución azucarada al 60%.	C C	A NA	Cálculos matemáticos [%]; azúcar=°Bx	R, OP, RS
	Comportamiento gráfico de una ecuación lineal.	C C	NA A	Correspondencia entre pares ordenados. Grafica a partir de datos (interpretación de c/u de los elementos)	R, OP, RS

Situación	Tarea	Tipo de representación		Invariantes operatorios	
		Esquema de entendimiento	Esquema de solución	Invariante	Categoría de análisis
C. Mezclado de soluciones químicas. <i>Escenario: salón de laboratorio</i>	Mezcla de soluciones química (volumen). Considerar soluciones azucaradas	C	A	$Y=mx+b$, comportamiento decreciente (signo -) relación c/fenómeno.	RP, OP, RS
	Mezcla de soluciones química (concentración).	C	A	Relación de rep. Grafica, tabular y analítica.	RP, OP, RS
	Mezcla de soluciones (Considerando volumen y concentración)	NC NC C	NA A A	Relación azúcar vs °Bx Variables, constantes. Planteamiento y solución de un SELC2 Relación gráfica-anal.	RP, OP, RS
D. Aplicación en el área técnica y la industria. <i>Escenario: salón de laboratorio</i>	Resolución de un problema contextualizado.	C	A	Obtención de SEL. Sol gráfica; relación gráfica y analítica.	RP, OP, RS
	Resolución de un problema de la industria	C	A	Elementos de contexto. Vinculación Elementos gráficos y analíticos.	RP, OP, RS

Fuente: Clasificación de resultados derivados del análisis cognitivo del grupo de enfoque (2009).

NOTA: C= canónica; NC=no canónica; A=algorítmica; NA=no algorítmica; CL=clasificación; EE=Expresión escrita; RP=representación; OP=operacional; RS=resolución.

III) Progresividad en el dominio del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales en situaciones de mezclado de sustancias químicas

Atendiendo cada una de las situaciones se posibilitó el analizar el progreso del grupo de enfoque en el dominio del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales en el contexto del mezclado de sustancias químicas. Como resultado se presenta una propuesta de diferentes niveles de dominio del campo conceptual de interés (tabla 2) misma que sirvió para caracterizar el avance

de la adquisición del conocimiento del grupo de enfoque en torno al campo conceptual de interés (Tabla 3) observándose que el dominio del campo conceptual, por parte del grupo de enfoque, ocurrió a lo largo del tiempo, a través de la experiencia, madurez y aprendizaje dado por las situaciones propuestas.

Tabla 2. Niveles de dominio del Campo Conceptual de Sistema de ecuaciones lineales en situaciones de mezclado de sustancias químicas.

Nivel	Descripción
N ₀	Ausencia de invariantes operatorios para comprender el concepto de Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto del balance de materia.
N ₁	Reconocimiento de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas sin explicación de significados científicos aceptables del concepto.
N ₂	Reconocimiento de sistema de ecuaciones lineales y explicación parcial de significados científicos del concepto: reconoce situaciones en donde se pueden utilizar ecuaciones, ecuaciones lineales, representación grafica de ecuaciones lineales así como sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y representación gráfica.
N ₃	Transición entre un reconocimiento y significación parcial del concepto de Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, con aplicación del concepto a situaciones y problemas del contexto de balance de materia.
N ₄	Aprehensión del concepto para el nivel de instrucción: manifiesta comprensión y explicitación de conocimientos en acción del concepto. Usa operaciones, representaciones simbólicas y propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales en diferentes situaciones de contexto.

Fuente: Caracterización de niveles de conocimiento derivados del análisis cognitivo del grupo de enfoque (2009)

Tabla 3. Nivel de conceptualización del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en situaciones de mezclado de sustancias químicas.

Situation	Tarea	Nivel de conceptualización				
		N ₀	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄
A. Estado inicial del CC de SEL2 -BM	Comprensión del campo conceptual de SEL2 en el contexto del BM	✓	✓			
	Solución de un problema contextualizado por medio de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	✓				

Situation	Tarea	Nivel de conceptualización				
		N ₀	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄
B. Comprensión del fenómeno	Preparar 100 mL de solución azucarada al 35%.		✓	✓		
	Preparar 100 mL de solución azucarada al 60%.			✓		
	Comportamiento gráfico de una ecuación lineal.			✓		
C. Mezclado de soluciones químicas.	Mezcla de soluciones química (volumen). Considerar soluciones azucaradas			✓		
	Mezcla de soluciones química (concentración).			✓		
	Mezcla de soluciones (Considerando volumen y concentración)			✓	✓	
D. Aplicación en el área técnica y la industria.	Resolución de un problema contextualizado.				✓	
	Resolución de un problema de la industria				✓	✓

Fuente: Resultados derivados del análisis cognitivo del grupo de enfoque (2009).

Conclusiones

Con los resultados presentados se puede concluir que es necesario conocer en los alumnos las características de sus conocimientos previos y el desarrollo conceptual, siendo condiciones necesarias para un aprendizaje significativo de conceptos científicos, de igual manera resulta importante conocer el grado de comprensión de los estudiantes en un ambiente de aprendizaje matemático contextualizado, para saber previamente si pueden comunicar y explicar fenómenos de contexto, usando el lenguaje propio del área, debido a que en muchas ocasiones los estudiantes no comprenden los significados y estructuras simbólicas del contexto, lo cual obstaculiza necesariamente el logro de aprendizajes significativos.

El conocimiento de los estudiantes en torno al campo conceptual de interés se ha descrito a partir del análisis de la variación en las representaciones de entendimiento y solución de las situaciones planeadas, posibilitando la identificación de las invariantes operatorias en las conceptualizaciones de los estudiantes.

Finalmente la importancia de proponer en la clase de matemáticas problemas en el contexto profesional o técnico de los alumnos permite que ellos se involucren en su resolución así mismo se

posibilita dotar de significado a las matemáticas al mostrar al alumno dónde aplicarlas en su vida profesional o laboral, cobrando interés por su estudio.

Referencias bibliográficas

Camarena, G. P. (1995). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, (pp. 123-153). México.

Flores, M. R. C. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática*. 17(2), 7-34.

Herrero, S. M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 7(1), 49-78.

Meyer, M. R. and Diopoulos, G. (2002). Anchored learning in context. *Mathematics Teaching in the Middle School* 8 (1), 16.

Ochoviet, F. (2009). Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Riodan, J. E. and Noyce, P.E. (2001). The impact of two standard based mathematics curricula on student achievement in Massachusetts. *Journal for Research in Mathematics Education* 32 (4), 368.

Rivera, C. R. E., Leyva, S.E., Amado, M. M.G. (2003). El estudio del dominio del lenguaje algebraico que prevalece entre alumnos de nuevo ingreso, Universidad Autónoma de Baja California-Instituto Tecnológico de Mexicali. *Mosaicos Matemáticos*. 11, 115-120.

Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales, en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2), 133-170.