

## VARIABLES, FUNCIONES Y CAMBIOS: ¿QUÉ CONOCEN NUESTROS ALUMNOS?

Adriana Engler, Silvia Vrancken, Marcela Hecklein, María Inés Gregorini, Daniela Müller, Natalia Henzenn  
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina  
aengler@fca.unl.edu.ar, svrancke@fca.unl.edu.ar  
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio, Superior

**Resumen.** *El estudio de la matemática permite la modelización de situaciones que conducen a la resolución de problemas. Por esto, es primordial que los estudiantes analicen los cambios que ocurren en diferentes fenómenos biológicos, económicos y sociales. Sin embargo, durante la escuela media, no se favorece demasiado el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, base para la comprensión de los conceptos de la matemática de la variación y el cambio, es decir el cálculo. Por este motivo, este trabajo, enmarcado en el proyecto de investigación "Pensamiento y lenguaje variacional: bases para la construcción de conceptos del cálculo diferencial", tiene como objetivo el análisis y valoración de los resultados obtenidos en una experiencia de aula centrada en el diseño, implementación y corrección de una guía de actividades que indaga las nociones que tienen los alumnos que ingresan al nivel universitario con respecto a variables, cambios, funciones, imagen, gráficas, expresión analítica, valor numérico y comportamiento de funciones.*

**Palabras clave:** variables, funciones, cambios, pensamiento variacional

### Introducción

El estudio de la matemática permite la modelización de situaciones que conducen a la resolución de problemas en diferentes áreas y disciplinas. Por esto, es primordial que los estudiantes analicen los cambios que ocurren en distintos fenómenos biológicos, económicos, sociales.

De acuerdo con el Dr. Cantoral, el pensamiento variacional es parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por un lado y los procesos del pensamiento por el otro. Implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio. Los rasgos característicos del comportamiento variacional de las funciones son: crecimiento, decrecimiento, puntos estacionarios; región donde la función es: positiva, negativa o nula. Estos rasgos pueden ser expresados (o mediatizados) en forma verbal, numérica, gráfica, analítica, etc. y se constituyen en los medios que adoptamos para explorar concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento de funciones. (Dolores, Guerrero, Martínez y Medina, 2002, p. 73)

Sabemos que los conceptos básicos sobre los cuales se construye la matemática de la variación y el cambio son el de variable y el de función.

Los datos y evidencias mostradas por los investigadores indican, que la construcción de la idea de variable no es una tarea sencilla, pues surgen dificultades, confusiones y concepciones alternativas que interfieren en ese proceso. Ante estas dificultades, es conveniente que los estudiantes comprendan este concepto, pues es pieza fundamental para la formación de nuevos conceptos como función, concepto importante en la matemática de la variación y el cambio. Presumimos que si los estudiantes construyen y se forman en la mente la comprensión de la noción de variable, serán más asequibles los nuevos conceptos asociados a esta noción. (Gómez, 2008, p. 10)

Siempre que dos magnitudes (variables) están relacionadas mediante una función, se puede estudiar el cambio de una de ellas con respecto a la otra. De ahí la importancia del estudio de las funciones. En este sentido, Dolores (2004, p. 197) manifiesta:

... poder analizar el comportamiento de funciones es una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, que precisa – como señalan Cantoral y Farfán (2000) – de procesos temporalmente prolongados, a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con los estilos del pensamiento prevariacional, como el algebraico.

Un elemento fundamental para entender el proceso de variación de las funciones es trabajar sus aspectos cualitativos y cuantitativos. Las funciones se utilizan como modelos de situaciones del mundo real, incluyendo aquellas que son resultado del avance tecnológico y que tienen enorme aplicación para la descripción de fenómenos físicos.

La forma en que usualmente se suele transmitir el concepto en la escuela deja de lado el proceso de construcción del concepto de función; las experiencias de aprendizaje en las aulas no favorecen apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes. (López y Sosa, 2008, p. 309)

Valero (2003, p. 4) asegura:

Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, se precisa entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende pues el conocimiento superficial no resulta suficiente para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis.

En nuestro país, desde la escuela primaria los alumnos abordan situaciones donde intervienen la variación y el cambio. En general, el hilo conductor lo constituyen la lectura, elaboración, análisis de tablas y gráficas donde se registran y analizan procesos de variación. Sin embargo, durante la escuela media no aparecen los procesos de cambio como eje temático. Generalmente se trabaja el tema funciones pero no desde un enfoque variacional. Se hace hincapié en la elaboración de tablas y el traslado de las mismas al registro gráfico construidas a partir de un enunciado relacionado con situaciones de la vida cotidiana. Se estudian las diferentes funciones (primer grado, segundo grado, exponencial, entre otras) desde su definición y gráfica. Lo enunciado anteriormente justifica el hecho de que en nuestro trabajo cotidiano en el aula observemos el problema del escaso y, en algunos casos hasta deficiente, desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en ingresantes a la universidad. Numerosos trabajos en Matemática Educativa realizados durante las últimas décadas avalan nuestra afirmación. Valero (2003) destaca que Dolores, Solache y Díaz abordan el problema en estudiantes que terminan el bachillerato y en ingresantes a la universidad, especialmente en lo relacionado con conceptos y procedimientos relativos a las variables, funciones, derivadas y análisis del comportamiento variacional de funciones.

En este contexto, resulta interesante buscar la manera de abordar mejor su estudio indagando sobre las ideas y conocimientos formados y adquiridos en los niveles previos ya que, en muchos casos, están fuertemente arraigados y condicionan la adquisición de nuevos conceptos. Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación “Pensamiento y lenguaje variacional: bases para la construcción de conceptos del cálculo diferencial” y tiene como objetivo el análisis y valoración de los resultados obtenidos en un trabajo de aula con alumnos ingresantes a la carrera Ingeniería Agronómica. La experiencia se centró en el diseño, implementación y corrección de una guía de actividades que indaga las nociones que tienen los alumnos que ingresan al nivel universitario con respecto a variable, variación y cambio, relación de una variable con otra,

valoraciones cualitativas y cuantitativas, gráficas, expresión analítica, valor numérico, signos de la función, ceros, crecimiento y decrecimiento.

### **Desarrollo de la propuesta**

La guía se propuso a todos los alumnos inscriptos en Matemática I que estaban presentes en una clase habitual, en grupos de a dos integrantes (53 grupos) antes de comenzar a desarrollar el tema “Funciones” del programa analítico.

Para la preparación de las diferentes actividades que forman parte de la propuesta de clase se tuvieron en cuenta contenidos ya trabajados por los alumnos dado que para cursar esta primer asignatura deben tener aprobada el área Matemática en el marco del Programa de Articulación Disciplinar exigido por la Universidad Nacional del Litoral.

En términos metodológicos el trabajo se desarrolló en tres momentos: el diseño y discusión de las actividades a incluir (según revisión bibliográfica realizada y, desde la práctica docente, dificultades observadas en trabajos recogidos de años anteriores), la resolución de las actividades y finalmente la utilización de las respuestas obtenidas (con sus logros, dificultades y errores) para el desarrollo de los contenidos y la puesta en común de conclusiones. Los alumnos se mostraron muy dispuestos al trabajo. Posteriormente, desde el equipo docente, se analizaron y valoraron los resultados obtenidos y se favoreció la toma de decisiones estratégicas en acciones futuras. Las distintas actividades abarcan los conceptos de variable, función, dominio, conjunto de imágenes, intervalos de variación, representación gráfica y comportamiento de una función.

Las situaciones se presentan en distintas representaciones: verbal, tabular, algebraica, gráfica, y se constituyen en los medios para indagar las concepciones de los alumnos.

### **Presentación de algunas actividades y análisis de los resultados más importantes**

A continuación enunciamos algunas actividades y los resultados que consideramos más significativos. (La guía completa puede solicitarse a los autores).

*Actividad.* Expresar en lenguaje matemático los intervalos de variación presentes en cada situación:

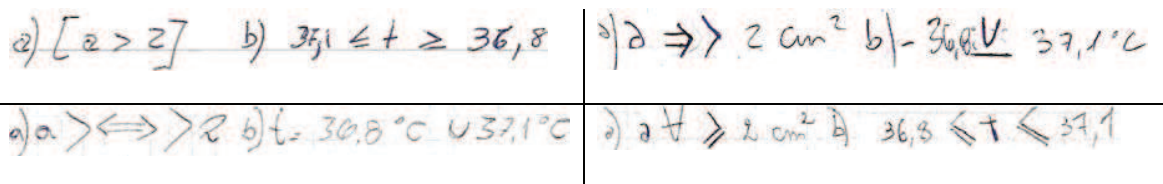
- a) El área “a” de un círculo aumenta de manera que siempre es mayor que  $2 \text{ cm}^2$ .
- b) La temperatura “t” del cuerpo de un hombre sano varía desde  $36,8^\circ\text{C}$  hasta  $37,1^\circ\text{C}$ .

Para poder analizar fenómenos que cambian, es necesario en primer lugar trabajar adecuadamente con magnitudes variables y ser capaces de representarlas matemáticamente.

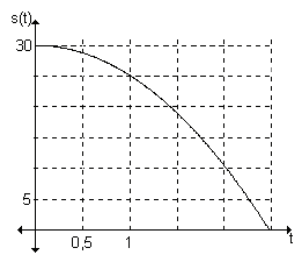
En esta actividad, que requiere la conversión del lenguaje coloquial al numérico, se busca indagar sobre el manejo de la notación para intervalos de variación. Algunos optaron por utilizar la notación de intervalos y otros de desigualdades. En ambos casos observamos que el manejo de simbología es deficiente en muchos alumnos.

El 55% de los grupos resolvió correctamente el ítem a). Se observa que del 34% respondido mal, el 56% escribe mal la notación como intervalo. El 11% no responde.

Con respecto al ítem b) el 66% respondió correctamente. Del 23% de respuestas incorrectas, el 50% escribe mal el sentido de la desigualdad y el 33% no incluye los extremos. Algunas respuestas obtenidas fueron:



**Actividad.** Una piedra es lanzada desde lo alto de un edificio de 30 metros de altura. Su posición a los t segundos de ser lanzada se describe con la función de la gráfica.



- a) ¿Qué es lo que cambia en la situación planteada?
- b) ¿Cuál es el intervalo de tiempo en que la piedra permanece en el aire?
- c) ¿Cuál es el intervalo de variación de la altura de la piedra?

En esta actividad exploramos, a partir de información presentada gráficamente, la identificación de las magnitudes que cambian y cómo cambian.

En el inciso a) se observan grandes dificultades para identificar que en la situación presentada intervienen dos variables. En algunos casos, los alumnos no se limitan a responder lo solicitado sino que intentan explicar la relación entre las dos variables: “A medida que varía la altura varía el

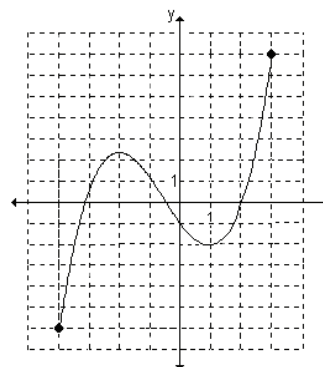
tiempo”, “Disminuye la altura y aumenta el tiempo”, “Cambia de posición a medida que transcurre el tiempo”. Aparecen algunas respuestas erróneas: “A mayor altura, su posición a los  $t$  segundos será mayor, es proporcional”, “lo que cambia es el tiempo, a mayor distancia mayor es el tiempo transcurrido”.

- a) Sólo el 9% responde bien. Del 76% que responde mal, el 45% no considera la variable tiempo y más de la mitad de los grupos considera una sola variable.

En el segundo y tercer inciso se presentaron básicamente los mismos problemas que en la actividad anterior.

- b) El 25% responde correctamente mientras que el 73% no logra escribir el intervalo correcto.
- c) Fueron escasas las respuestas correctas (4%) y el 85% resultó incorrecto. En el 73% de los grupos, las respuestas equivocadas se deben a que escriben mal el orden de los extremos del intervalo. En muchos casos consideran el intervalo abierto.

**Actividad.** Analice la función cuya gráfica se muestra y responda:



- d) ¿Cuál es el intervalo de variación de  $x$ ?
- e) ¿Cuál es el intervalo de variación de  $y$ ?
- f) ¿Para qué valores de  $x$ ,  $y > 0$ ?
- g) ¿Para qué valores de  $x$ ,  $y < 0$ ?
- h) ¿Para qué valores de  $x$ ,  $y = 0$ ?
- i) ¿Para qué valores de  $x$ ,  $y$  crece?
- j) ¿Para qué valores de  $x$ ,  $y$  decrece?
- k) ¿Para qué valores de  $x$ ,  $y$  no crece ni decrece?

En esta actividad se trabaja con el registro gráfico y el simbólico. Los ítems a) y b) tuvieron el 51% y el 49% de respuestas correctas respectivamente y los “no responde” alcanzaron el 2%. Las mayores dificultades se relacionaron con no incluir los extremos en los intervalos de variación. En general, más dificultades aparecieron en los incisos siguientes. Los porcentajes de respuestas incorrectas fueron: c) 79%; d) 91%; e) 55%; f) 87%; g) 58% y h) 85% (el 44% no considera los

extremos). El 4% no respondió lo solicitado en c), d) y e), el 6% en f), el 8% en g) y en h) alcanzó el 15%.

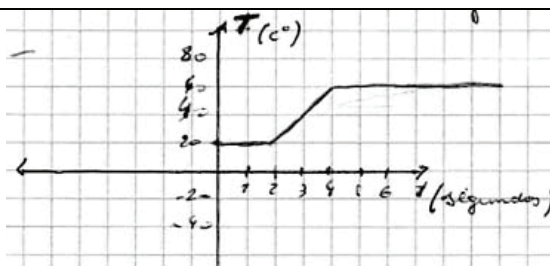
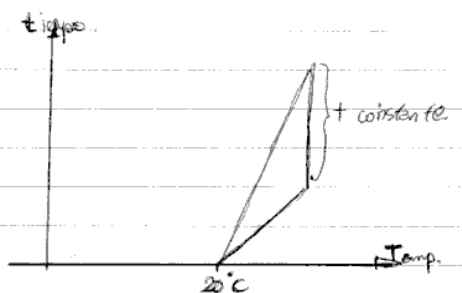
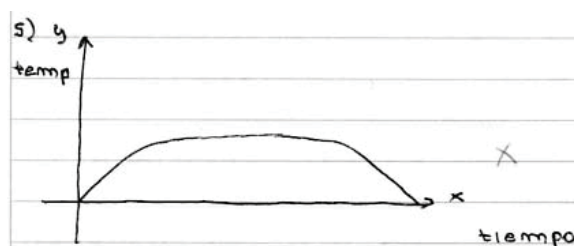
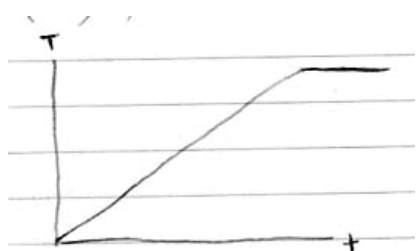
En los incisos c) y d) los alumnos identificaron en general los intervalos donde la función es negativa o positiva, pero presentaron dificultades para su notación, mostrando confusiones en la identificación del tipo de intervalos (abiertos o semiabiertos).

Algunos escriben como puntos y otros expresan los intervalos que corresponden a la variable dependiente. En cuanto a los incisos donde se solicita analizar los intervalos donde la función crece o decrece, las mayores dificultades no se encontraron en la obtención de los intervalos, sino en la escritura de los mismos. Tienen serios problemas para expresar intervalos discontinuos. Presentamos algunas producciones obtenidas:

f) y crece de  $[-4, -2) \cup (1, 3]$  | f)  $\{-4, -2\} \cup \{1, 3\}$

*Actividad.* Al abrir una canilla de agua caliente, la temperatura  $T$  del agua depende de cuánto tiempo ha estado corriendo. La temperatura inicial está cercana a la ambiente, debido al agua que ha estado en los tubos. Cuando empieza a salir agua caliente, la temperatura aumenta con rapidez. A partir de ahí, la temperatura se mantiene constante. Cuando la canilla se cierra, la temperatura decrece hasta alcanzar la temperatura de la alimentación del agua. Realice un bosquejo aproximado de la temperatura  $T$  en función del tiempo  $t$ .

Esta actividad pretende que los alumnos puedan interpretar un fenómeno de cambio presentado en el registro verbal. Procuramos analizar por un lado, la identificación y la correcta representación de las variables involucradas y por otro, cómo describen gráficamente su comportamiento variacional (la temperatura aumenta con rapidez, se mantiene constante, disminuye). Si bien sólo el 8% no responde, el 62% lo hace mal. Muchas de las representaciones fueron incompletas. No consideraron uno o más de los intervalos de variación. La mayoría de los errores estuvieron relacionados con no establecer cuál es la temperatura ambiente y comenzar la gráfica directamente a partir del origen. En algunos casos, las dificultades para representar los cambios llevaron a los alumnos a representar gráficas que no son funciones. A continuación presentamos algunas gráficas realizadas por los distintos grupos:



### Conclusiones

Los resultados obtenidos nos hacen reflexionar y pensar por qué los conceptos matemáticos involucrados en el estudio de la matemática de la variación y el cambio presentan tantas dificultades. Los estudiantes no los comprenden y, como consecuencia de ello, en el aula surgen interpretaciones que no se corresponden con el conocimiento matemático aceptado.

Pudimos confirmar en nuestra aula los resultados de numerosas investigaciones sobre el escaso e inadecuado desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en alumnos ingresantes a la universidad. Detectamos:

- Claras dificultades en el manejo de diferentes notaciones.
- Confusión entre las variables dependiente e independiente.
- Errores en el manejo de la recta real y la determinación de intervalos.
- Dificultades relacionadas con el concepto de función según sus diferentes representaciones.
- Inconvenientes con la interpretación de los gráficos.
- Dificultades en la identificación y manejo de variables.



Con esta forma de trabajo logramos motivar a los alumnos en la búsqueda de sus propias estrategias de solución para resolver las actividades, propiciamos el aprendizaje activo en el aula y fuera de ella mediante la construcción y reflexión. El trabajo en grupo favoreció la discusión de estrategias y soluciones, el uso de vocabulario específico, la defensa de ideas y el debate. Es muy importante brindarles un espacio que les permita argumentar sobre los conceptos expresando sus propias ideas y darles la oportunidad para estar o no de acuerdo con sus pares y con el profesor. Los resultados obtenidos nos permitieron tomar decisiones al momento de abordar el tema Funciones y desarrollar actividades que favorezcan la construcción de la idea de variación y cambio. De esta manera llegaron mejor preparados para abordar los temas del cálculo durante el dictado de Matemática II.

Realizar una mirada reflexiva y crítica sobre nuestras acciones nos permite diseñar, implementar y rediseñar estrategias para favorecer el aprendizaje de nuestros alumnos.

### Referencias bibliográficas

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa* 7(3), 195-218.

Dolores, C.; Guerrero, L.; Martínez, M. y Medina, M. (2002). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15 (1) 73 – 84. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Gómez, E. (2008). La construcción de la noción de variable. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el estudio de funciones en estudiantes de bachillerato. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21, 308 – 318. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Valero, M. (2003). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.