ALGUNAS REFLEXIONES DE CONTRASTE DEL FORMALISMO CON LA ALGORITMIA EN LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN EN ESCUELAS DE INGENIERÍA

Ernesto Bosquez[1,2], Javier Lezama[2], César Mora[2]
Instituto Tecnológico de Toluca[1] Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional[2] México
ernestok1@hotmail.com, jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *Nuestras reflexiones se basan en el trabajo de investigación doctoral titulado "Un estudio Didáctico de los problemas de enseñanza y aprendizaje del teorema de convolución en escuelas de ingeniería en un contexto de la transformada de Laplace" (Bosquez, 2009), sustentada en la aproximación socioepiestemológica (Cantoral, 2006) Estas reflexiones nos permiten identificar dos prácticas en la enseñanza del Teorema de Convolución (TC), una con enfoque formalista, y otra con* **enfoque** *algorítmico. Estas prácticas de enseñanza, según nuestro análisis, no permiten al estudiante de ingeniería vincular ni construir un significado con los objetos matemáticos relacionados con el teorema, la ecuación diferencial y la posible construcción de significado basado en las prácticas de uso tanto en el aula como en su ingeniería. El contraste entre estas prácticas de enseñanza nos induce a cuestionarnos ¿Cuál es la práctica de enseñanza del TC que permita vincular a este teorema con los elementos involucrados del mismo?*
Palabras clave: Enfoque formalista, enfoque algorítmico

Introducción

En la disciplina científica de la Matemática Educativa se han realizado investigaciones relevantes correspondientes a la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales; se han estudiado fenómenos, prácticas docentes asociadas a la enseñanza y aprendizaje de las mismas, detectándose prácticas que generan desinterés y aburrimiento, debido a su carácter rutinario y carentes de un contenido claro para los estudiantes; tal es el caso de estudiar múltiples técnicas para resolver ecuaciones diferenciales en las que no se entiende de dónde surgen y qué modelan, llevando a los estudiantes a considerar tales prácticas como "el más aburrido recetario de cocina"(Hirsch, 1984 p, 22). En otros resultados, se afirma que hay tres escenarios fundamentales en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales; algorítmico- algebraico, numérico y geométrico (Artigue, 1995, p. 128). Así mismo se afirma que el escenario más utilizado en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales es el algorítmico algebraico (Hernández, 1996). Siguiendo esta perspectiva, las reflexiones que haremos están enfocadas al sentido de la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en escuelas de ingeniería, en nuestro caso particular, se trata de una problemática didáctica asociada a la enseñanza y aprendizaje del teorema de convolución.

Identificamos a dos tipos de enseñanza de este teorema, una es con enfoque formalista y la otra con un enfoque algorítmico. A continuación se dará una descripción de cada una de estas prácticas asociadas a los enfoques mencionados.

Enfoque *formalista*. Un primer enfoque lo encontramos en lo siguiente:

En la filosofía de las matemáticas, se reconocen los trabajos, entre otros, de Hilbert, Banach, Gödel, tanto sus aportaciones como sus controversias con respecto a el formalismo (Cavaillès, 1992) Este enfoque encadena de una manera a lo formal, como un conjunto de axiomas y teoremas rigurosamente demostrados que permitirán demostrar otras proposiciones de manera lógica y éstas podrán implementar nuevas proposiciones que requerirán de nuevas demostraciones. Aunque la postura anterior sería normal y necesaria para un matemático, no lo es así para un estudiante de ingeniería (y ésta es una postura de enfoque teórico y por supuesto discutible) y consideramos que no debería ser tampoco, esta práctica de enseñanza, de un profesor de matemáticas en una escuela de ingeniería. La exploración (diálogos, encuestas y entrevistas con profesores y estudiantes) nos muestra, que tal postura provoca en los estudiantes, una desvinculación entre la práctica y la construcción conceptual de los objetos matemáticos en estudio, como es el caso, de enseñar el teorema de convolución, con un enfoque formalista. Por ejemplo, el profesor comunica este objeto matemático como sigue; primero da a conocer el objeto matemático, es decir,

Teorema de Convolución

Sea $F(s) = \mathfrak{L}\left[f(t)\right]$ y $G(s) = \mathfrak{L}\left[g(t)\right]$,

entonces $\mathfrak{L}\left[(f * g)(t)\right] = F(s)\,G(s)$

Para que se complete la comunicación de este objeto matemático se define la operación de convolución entre dos funciones como sigue.

Definición de Convolución de dos funciones.

La convolución de f *con* g *es :*

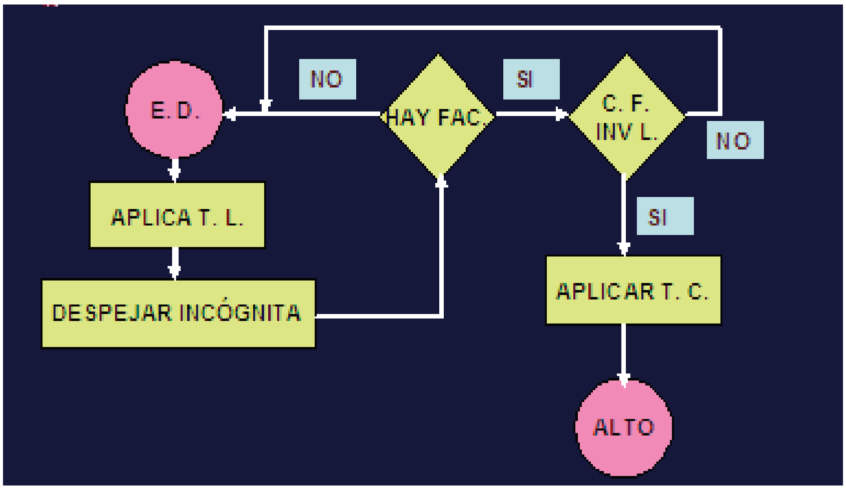
$$f * g\,(t) = \int_0^t f(t-\alpha)\,g(\alpha)\,d\alpha$$

Esta definición induce a los estudiantes a plantearse los cuestionamientos; ¿Cómo se llega a la misma? ¿Qué significa? - Aquí parte de nuestra propuesta es de construir un significado de tal enunciado, dándole un sentido en las prácticas de aplicación en su entorno profesional, ante la dificultad de darle un significado en estricto sentido matemático, debido a la complejidad teórica (Mellin, 1896) - seguidamente el profesor da la demostración del teorema mencionado, y en este caso la demostración juega un papel justificativo, en el sentido de que se muestra al estudiante que la definición es consistente, operativamente hablando. Esta demostración es generalmente expuesta en los textos típicos de uso en estos cursos, por ejemplo, Zill (Zill, 2008, p.220-221). Finalmente la exposición concluye con un ejemplo que por lo general contiene la frase "Pruebe usted….", provocando en el estudiante aún mayor desconcierto con este tipo de práctica educativa o enseñanza.

Enfoque *Algorítmico*. Aquí tenemos que:

El Algoritmo" es un instrumento de desbloqueo y de resolución de conflictos didácticos, en cuanto a que permite momentáneamente un reparto claro de las responsabilidades. El maestro muestra el algoritmo. El alumno lo aprende y lo "aplica" correctamente debe ejercitarse pero su incertidumbre es casi nula. Se le asegura que existe una clase de situaciones distintas en las que el algoritmo da una solución (el conflicto volverá a aparecer cuando se trate de elegir un algoritmo para un problema determinado). (Brousseau, 1986, p. 21.)

Sin embargo para evitar lo anterior, él propone extender el término de *"procedimientos algorítmicos"*, lo que da valor o le quita a un procedimiento es su *función y su presentación didáctica*. En nuestra reflexión nos referimos a la enseñanza del teorema de convolución con una tendencia algorítmica a lo siguiente. El profesor comunica el objeto matemático, en este caso el *teorema de convolución,* seguidamente se propone un algoritmo, por ejemplo, una manera es la siguiente.



Y se finaliza dando un ejemplo en dónde se enfatiza el uso de este algoritmo, por ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial siguiente.

$$y' - 2y = 1, \text{ tal que } y(0) = 0$$

Solución:

Aplicando T. L. $\qquad \mathcal{L}[y' - 2t] = \mathcal{L}[t]$

Despejando a la Incógnita $\qquad \mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{s}\frac{1}{s-2}$

Cómo $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$ y $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = e^{2t}$ entonces aplicando el teorema de convolución, se tiene que la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = 1 * e^{2t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$$

Aunque este enfoque, como menciona Brousseau, aparenta resolver la enseñanza del teorema de convolución (para nuestro caso), resulta en la experiencia docente, y en el estudiante un fracaso, ya que a éste, en efecto, por un lado se le quita su responsabilidad de aprendizaje del mismo y por otro queda aún un vacío de sentido, pues no hay elementos claros que permitan la construcción de significado, es decir, las prácticas no articulan la relación entre los objetos matemáticos involucrados; la ecuación diferencial, la solución, la transformada de Laplace, el teorema de convolución y la convolución misma.

La experiencia docente nos reporta que una enseñanza del teorema de convolución con ambos enfoques tanto *formalista* como *algorítmico*, deja en los estudiantes de alguna manera, con problemas en su aprendizaje, nuestra apreciación de la problemática anterior nos permite suponer, que esto pueda ser una causa de uso de elementos matemáticos vacíos de significado en el aula, y difícilmente utilizables en ámbitos ajenos a ella. Ante la problemática planteada de la enseñanza y aprendizaje del teorema mencionado, podemos plantear los cuestionamientos siguientes y considerarlos como objetos primarios de investigación dentro de la disciplina de la matemática educativa.

¿A través de un nuevo diseño del discurso escolar para la enseñanza y aprendizaje del T C se lograría vincular los elementos relacionados con el teorema mencionado?

¿Este nuevo diseño del discurso escolar incorpora necesariamente alguna de las actividades de enseñanza con enfoque *formalista o algorítmico* o requiere de la ampliación o resignificación de alguna de ellas?

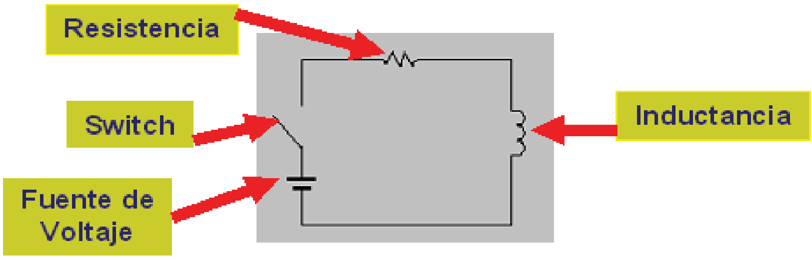
Para dar una posible respuesta a estos cuestionamientos usaremos resultados de investigaciones en nuestro campo. Primero se justifica que el teorema de convolución se relaciona de alguna manera con las EDO. El marco teórico que respalda esta investigación es la *aproximación socioepistemológica* (Cantoral, Farfán, Lezama, 2006). Básicamente esta aproximación socioepistemológica comprende los siguientes aspectos. *Aspectos Cognitivos*: Con los dos tipos de prácticas de enseñanza del TC descritas, el estudiante de ingeniería presenta dificultades para su aprendizaje, ya que en ambos casos no vincula los elementos involucrados. *Aspectos Didácticos*: El discurso escolar del docente, según nuestra apreciación, se identifican dos prácticas de enseñanza de este teorema, una con enfoque *formalista* y otra con enfoque *algorítmico*, sin embargo en ambas se presentan el mismo vacío de significado. *Aspecto Epistemológico*: La génesis del TC crece en un escenario formal y teórico con un alto grado de complejidad lo que plantea como un reto orientar o ampliar el enfoque de enseñanza con enfoque *algorítmico*, en el sentido de incorporar los aspectos de funcionalidad así cómo de presentación didáctica (Brousseau, 1986). *Aspecto*

Sociocultural: Para el estudiante de Ingeniería, cuáles son las prácticas y técnicas en el sentido de uso en los escenarios de la ingeniería que permitan construir un significado al uso y al contenido del mismo del TC, es decir, ¿Tiene algún sentido el TC como demanda social de conocimiento?

Lo anterior nos permite situar y orientar nuestra investigación en la necesidad de una ampliación en el discurso de la enseñanza de este teorema en el sentido de un enfoque *algorítmico*, incorporando los aspectos de funcionalidad y presentación didáctica (Brousseau, 1986) que llene los vacíos de significado de la enseñanza común de dicho contenido matemático. En este aspecto la funcionalidad y presentación didáctica se incorpora un contexto electrónico que permite al estudiante modelar, y a través de esta vincular a la ecuación diferencial con su solución, la transformada de Laplace y el teorema de convolución, es decir esta propuesta didáctica permitirá darle un sentido de relación a estos objetos. La manera en que funciona este contexto electrónico se describe a continuación.

¿Cómo se relaciona el T. C. con éstos circuitos?

Para responder esto consideremos la representación siguiente del circuito RL, es decir;



Al cerrar el Switch, la corriente fluye en el circuito, bajo las condiciones siguientes:.

1.- El resistor, que se opone a la corriente, implica una caída de voltaje igual a,

$$E_R = Ri$$

2.- El inductor produce una caída de voltaje igual a,

$$E_L = L\frac{d}{dt}i$$

3.- La suma algebraica de todas las caídas de voltaje es cero, es decir,

$$E_R + E_L = E \Rightarrow E - E_R - E_L = 0$$

De lo anterior se deduce que:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

Un circuito RL se modela con una EDO, de primer orden lineal.

Consecuentemente se muestra que la EDO está relacionada siempre al TC.

Aplicando la transformada de Laplace a la EDO que modela un circuito eléctrico RL es decir,

$$\mathcal{L} \longrightarrow L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

$$LsF(s) - i(o) + RF(s) = \mathcal{L}[E(t)]$$

$$F(s) = \frac{\mathcal{L}[E(t)]}{Ls+R}$$

aplicando inversa de Laplace

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[E(t)]\cdot\frac{1}{Ls+R}\right] = \frac{1}{L}E(t) * e^{-\frac{R}{L}t}$$

Es decir, se obtiene siempre, con las condiciones indicadas, una expresión, la cuál depende del teorema de convolución.

Finalmente nos resta incorporar los resultados ante la problemática planteada de una manera sistémica, para que finalmente a través de la metodología de la *ingeniería didáctica* (Artigue, 1995), se pongan en escena que permitirán aproximar una respuesta a la problemática planteada.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica.* México: Grupo Editorial Iberoamérica

Bosquez, E. (2009). *Un estudio Didáctico de los problemas de enseñanza y aprendizaje del teorema de convolución en escuelas de ingeniería en un contexto de la transformada de Laplace*. Memoria predoctoral no publicada. CICATA-IPN, México.

Brousseau, G. (1986). Fondements et mèthodes de la didactiques des Mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 33-115.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y Representación, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, 82-102

Cavaillès, J., (1992). *Método Axiomático y Formalismo.* México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias*,* UNAM.

Gardner, M. (1942). *Transients in Linear Systems*. New York: Edt. Jhon Wiley & Sons.

Hernández, A. (1996). *Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numérico, Algebraico y Gráfico en Relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Tesis Doctoral no Publicada, CINVESTAV IPN, México, D. F.

Hirsch M. W. (1984). The Dynamical Systems Approach to Differential Equations, *Bull. American Mathematical Society* 11 (1)

Mellin H.(1896). "Ueber gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationale Coefficienten". *Acta Soc. Sci. Fenn*., 21(1 96). pp. 6-57. Alemania.

Zill, D. (2008). *Ecuaciones Diferenciales*, México: McGraw-Hill.