COMO ENSEÑAR PROBLEMAS DE DEMOSTRACIÓN EN EDUCACIÓN BÁSICA

Alberto de León de León, Lineth Alejandra de León Torres
Instituto Tecnológico de Cd. Madero
División de Estudios de Posgrado e Investigación
J. Rosas y J. Urueta, Col. Los Mangos
Cd. Madero, Tamps., C.P. 89440
Email: deleon_al@yahoo.com.mx

PLANTEAMIENTO

Un curso de geometría se desarrolla para aprender a trazar, y no para estudiar las propiedades de las figuras que permita a los estudiantes establecer relaciones entre objetos geométricos. Estos trazos están diseñados para ser realizados con regla y compás, que eran medios utilizados cuando se desarrolló la enseñanza de la Geometría.

El alumno en el nivel de educación básica actualmente requiere de acuerdo a su nivel de madurez intelectual, observar plásticamente como se desarrollan las propiedades geométricas de los objetos, para comprenderlas en forma intuitiva más que rigurosa de acuerdo a su desarrollo intelectual y psicológico.

Los alumnos de educación básica trabajan de forma visual con objetos que tienen físicamente frente a ellos, y no son capaces de justificar con claridad sus ideas: Niños de cursos posteriores logran un notable desarrollo en su capacidad de expresión, aunque siguen necesitando objetos físicos que le permitan estudiar las matemáticas, realizando estos objetos representaciones de conceptos o propiedades generales y abstractas; que sustituyen a los razonamientos formales abstractos.

MARCO TEÓRICO

Un modelo centrado en la geometría, sobre como aprenden los alumnos y como va evolucionando el pensamiento, es el modelo de Van Hiele (Jaime, A y Gutiérrez, A., 1990). Este modelo incluye dos aspectos, uno descriptivo y otro prescriptivo. El primero proporciona una secuencia de "*niveles de razonamiento*", y "*fases de de aprendizaje*", que proponen pautas que los docentes puedan utilizar en la organización de los cursos para ayudar a progresar a sus alumnos en la forma de razonar y construir los conocimientos.

Una idea central del modelo de Van Hiele es que la adquisición de nuevas habilidades de razonamiento es fruto de la experiencia del alumno. Por lo tanto es deseable una enseñanza que proporcione la posibilidad de esas experiencias, a través de "*fases de aprendizaje*". La fase de *Información,* permite al alumno conocer el tipo de trabajo que va a realizar, y al docente determinar el nivel de razonamiento y de conocimiento que poseen sus alumnos sobre el nuevo tema.

En la fase de *Orientación,* los estudiantes comienzan a explorar el campo que deben estudiar. En la fase de *Explicitación,* se perfeccionan las formas de expresión, no incluyendo el aprendizaje de cosas nuevas, sino una revisión del trabajo hecho anteriormente. En la fase de *Orientación Libre,* el alumno debe aplicar los conocimientos aprendidos anteriormente, en la resolución de nuevas situaciones. En la *Integración,* el estudiante debe comparar, combinar y relacionar lo que ya sabe.

La matemática al ser conocimiento abstracto, debe ser resultado de una ejercitación interna, es decir una reconstrucción mental de los componentes correspondientes del mundo externo; la construcción mental requiere de un ir y venir continuo entre la acción entre el mundo externo y la representación que el estudiante, va construyendo en su mente, siendo un ir y venir entre práctica y teoría (que se construye a partir de la reflexión sobre la práctica).

El razonamiento es una acción ejecutada interiormente, algo muy distinto de la verbalización. Para que un dato se transforme en conocimiento, debe relacionarse en un sistema organizado. Un dato aislado, sin vinculación orgánica con otros datos dentro que le den organización, no es un dato significativo, y por lo tanto no es conocimiento.

Para la realización de demostraciones deductivas, Arzarello y otros (1998) definen dos fases que caracterizan las relaciones entre la actividad empírica de conjeturas y la actividad deductiva de la demostración.

- Fase ascendente caracterizada por la actividad empírica dirigida a la mejor comprensión del problema, que es la búsqueda de una conjetura y posterior validación o rechazo.
- Fase descendente caracterizada por la actividad argumentativa (deductiva o no), dirigida a la elaboración de una demostración de la conjetura planteada.

Según este modelo teórico, la resolución de problemas de demostración se caracteriza por la transición de la fase ascendente a la fase descendente. En realidad, la resolución de un problema puede estar formada por varias transiciones en una u otra dirección entre ambas fases, correspondientes a momentos de trabajo empírico y otros de trabajo deductivo, avances que no conducen necesariamente al resultado deseado, seguidos de retrocesos para iniciar nuevas fases ascendentes de búsqueda o verificación empíricas, que dan a paso a nuevas fases descendentes de producción deductiva.

Modelo de Van Hiele

Este modelo de enseñanza marca la pauta a seguir en la enseñanza de la geometría., tuvo su origen en Holanda, donde los Van Hiele profesores de matemáticas, se encontraron con problemas para hacer entender a sus alumnos las definiciones, procesos y situaciones relacionadas principalmente con la enseñanza de la geometría, ya que su aplicación en otras ramas de las matemáticas no ha sido tan eficiente. El modelo consta de: una fase descriptiva definida por Van Hiele como "*niveles de razonamiento*"; y otra que da las directrices para el desarrollo docente, nombrada como "*fases de aprendizaje"*.

Los niveles de razonamiento son definidos como estadios del desarrollo de las capacidades intelectuales del estudiante, que no están directamente ligados con el crecimiento o la edad. Van Hiele y Piaget concuerda ambos teóricos en lo que referente a la adquisición del conocimiento y el desarrollo intelectual del estudiante. Estos niveles de razonamiento se repasan sucesivamente en cada ocasión en que el estudiante se encuentra con un nuevo tema a tratar en matemáticas. Los niveles de razonamiento que plantea el modelo son:

1. **Reconocimiento.** El estudiante percibe los elementos a estudiar en su totalidad, de manera global, como unidades e individuales, limitándose a descripciones y reconocimientos físicos exteriores.
2. **Análisis.** Establece que los elementos a estudiar están formados propiedades, puede generalizar otras propiedades a partir de ejemplos, pero no puede hacer clasificaciones lógicas por no poder relacionar unas propiedades con otras.
3. **Clasificación.** El estudiante es capaz de dar definiciones formales de los objetos a estudiar, establece relaciones entre propiedades y deduce algunas de otras, pero no puede establecer la concatenación de razonamientos que lleven a una demostración. El estudiante no comprende la estructura axiomática de las matemáticas.
4. **Deducción formal.** El estudiante es capaz de llevar a cabo razonamientos lógicos formales y comprende la estructura axiomática de las matemáticas, encontrando sentido y utilidad a las demostraciones de teoremas. Puede llegar al mismo resultado por distintos caminos, es decir, por medios equivalentes.

Es necesario puntualizar que existen características que tienen todos los niveles, pero cada uno de éstos se manifiesta de distinta manera. Estas características son: la *jerarquización* y *secuencialidad* de los niveles, la relación entre el lenguaje y los niveles y, la continuidad del paso por los niveles.

La *jerarquización* y *secuencialidad* de los niveles se refiere a la necesidad de transitar primero un nivel, para pasar al siguiente de tal manera que es obligatorio cursarlos todos sin omitir ninguno.

Logrando la recursividad, dado que conceptos y definiciones que un estudiante en desarrollo tiene acceso en un determinado nivel, los utilizará posteriormente.

La relación entre lenguaje y niveles se relaciona con el desarrollo del estudiante y la manera en que se comunica con los demás. Por lo que "a cada nivel de razonamiento le corresponde un lenguaje específico", por lo que dos personas cuyo nivel de razonamiento difiere, difícilmente se entenderán al platicar sobre el tema.

La segunda parte del modelo, se refiere a las directrices que dan a los profesores, llamadas fases de aprendizaje, que son los períodos por los que tiene que pasar el estudiante en cada uno de los niveles, para alcanzar el siguiente, que son:

1. **Información.** Informar a los estudiantes del tema que se estudiará.
2. **Orientación dirigida.** Investigación, búsqueda, etcétera, de conocimientos principalmente por parte de los alumnos. En esta fase se construye la red mental que permitirá relacionar los conocimientos posteriormente.
3. **Explicitación.** Presentación y comparación de datos y conocimientos obtenidos entre el grupo. Aquí es importante que existan puntos de vista diferentes, y quizá divergentes, dentro del alumnado; ya que esto dará una mayor riqueza al grupo, al mismo tiempo que hará que el estudiante analice sus ideas, las ordene y las exprese con claridad.
4. **Orientación libre.** Se refiere a la aplicación de los conocimientos adquiridos en las fases anteriores, y su interrelación y aplicación junto con otros conocimientos ya adquiridos.
5. **Integración.** Se refiere a la acumulación, integración y comparación de conocimientos que se han adquirido, tratando de tomar conciencia en el uso de elementos implícitos de éstos.

De esta manera cada nivel de razonamiento queda estructurado en cinco fases de aprendizaje. El alumno construirá el conocimiento a partir de "redes de relaciones", en un proceso de construcción y modificación sucesivo según el nivel de razonamiento en el que se encuentre.

ANTECEDENTES DE LA PROPUESTA

Por otro lado una enseñanza memorística y repetitiva en los primeros niveles educativos conlleva a la adquisición de conceptos limitados, con poca manipulación de objetos y procesos matemáticos, que no proporciona las oportunidades necesarias para que el alumno desarrolle sus conocimientos.

Según Clements y Sarama, dos investigadores desarrolladores de aplicaciones computacionales para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, el temprano desarrollo de ideas matemáticas de estudiantes pasa por varias etapas en su acercamiento a las figuras geométricas.

En el primer estadio, el precognitivo, niños y niñas perciben las formas pero son incapaces de distinguirlas y clasificarlas. En la etapa visual, son capaces de identificarlas de acuerdo a su apariencia. Por ejemplo identifican un rectángulo, "… porque se parece a una puerta". No es sino hasta la etapa descriptiva, en que aprenden a reconocer y caracterizar las formas, basándose en sus propiedades. Es hasta entonces, que habiendo asimilado los conceptos y no solo repitiendo una serie de palabras, que reconocen y describen conscientemente un rectángulo, como una forma que tiene dos lados iguales y cuatro ángulos rectos.

La práctica continua con papel permite que los visualicen las formas geométricas, las relacionen con lo que conocen a su alrededor, practiquen el orden en un proceso, realicen secuencias de pasos y manipulen las formas (dimensiones, proporciones, simetrías, rotación, etc.), mientras practican y perfeccionan destrezas motoras finas; creciendo en abstracción y creatividad, apropiándose de las figuras en sí.

Postulados geométricos para usar el origami

Se consideran los siguientes conceptos geométricos:

1. Se considera una hoja de papel, como una superficie plana.
2. Un pliegue realizado en una hoja de papel que pase por dos puntos del papel y que se ha hecho sobre una superficie plana como soporte, es una línea recta.
3. El papel puede ser plegado de manera que pase por dos o más puntos colineales.
4. Pueden superponerse dos puntos distintos en una misma hoja de papel.
5. Puede plegarse el papel de modo que un punto puede superponerse a otro pliegue.
6. Puede plegarse el papel de modo que dos pliegues de una misma hoja pueden superponerse.
7. Dos ángulos son congruentes si al superponerse coinciden.
8. Dos segmentos son congruentes si al superponerse coinciden.

Aplicaciones geométricas del origami

De acuerdo con los anteriores elementos se ha logrado desarrollar aplicaciones, donde el alumno:

- Determina y nombra cuáles son las partes del cuadrado que siempre se presentan, aunque varíen de tamaño
- Relaciona las características de los rectángulos que posee el cuadrado, para finalmente concluir que éste último es un caso particular de aquéllos.
- Relaciona las características de los rombos con las del cuadrado, relacionándolas entre sí y concluyendo que éste es un caso particular.

- Generaliza las características inmutables de los cuadrados, generalizándolo a rectángulos y rombos.

METODOLOGÍA: Propuesta de razonamiento semiformal

De acuerdo al modelo de enseñanza de la Matemática de van Hiele, el proceso educativo se estructura de acuerdo a experiencias instruccionales que van desde:

- *Reconocimiento de figuras (nivel 1),*
- *Descubrimiento de propiedades de las figuras y razonamiento informal acerca de estas figuras y sus propiedades (niveles 2 y 3), y*
- *Estudio riguroso de geometría axiomática (niveles 4 y 5).*

Esta propuesta se enfoca a la enseñanza de niveles 2 y 3 del modelo educativo de Van Hiele, para ser aplicado a los niveles educativos K4 y K5. Se utilizan operaciones concretas del método del origami (doblez de figuras), consistente en realizar cortes, movimientos de secciones de figuras, sobre posición de figuras originales, para realizar demostraciones de algunos teoremas y de relaciones algebraicas, que pueden ser representadas en forma geométrica en dos dimensiones.

1. Demostración del Teorema de Pitágoras

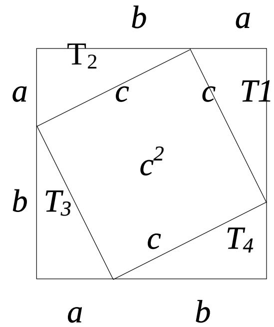
Una forma de demostración alterna para el Teorema de Pitágoras, se presenta en el libro de Lilavati, escrito por el matemático hindú Bhaskara Acarya (quien nació en el año 1115 d. de J.), para demostrar el teorema de Pitágoras se parte (ver fig. 1).

A partir de dos diagramas, el estudiante debe "descubrir" que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

2. Demostración visual del teorema del binomio

Se desarrolla la demostración del teorema del binomio: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, en forma visual determinando el área de un cuadrado de lado igual a: $(a + b)$.

1. **Demostración del Teorema de Pitágoras**



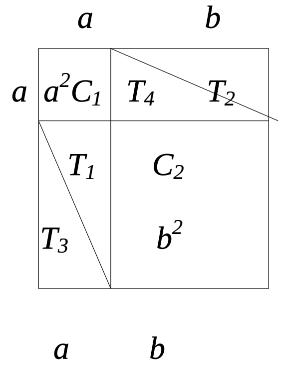


Fig. 1a Fig. 1b

El alumno puede recortar el triángulo T_1 de la figura 1a y trasladarla sobre el triángulo T_1 de la figura 1b, y darse cuenta físicamente de que son del mismo tamaño.

Lo mismo debe realizarlo con los triángulos T_2, T_3 y T_4. Invitando al alumno a concluir que: c^2 debe ser igual a $(a^2 + b^2)$.

Por lo que: $c^2 = a^2 + b^2$ (1)

Para plantear el Teorema de Pitágoras, el alumno realizará las operaciones:

1. Recortar de la figura 1b, los cuadrados C_1 y C_2.
2. Recortar de la figura 1a, el cuadrado C_3.
3. Tomar el triángulo T_1, y pegarlo sobre el lado “a” del cuadrado C_1.
4. Sobre el lado “b” del triángulo T_1, pegar el cuadrado C_2.
5. Sobre el lado “c” del triángulo T_1, pegar el cuadrado C_3.

Que corresponde al desarrollo de la ecuación 1:

“El cuadrado del valor de la longitud de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de los lados de los catetos”.

Donde la hipotenusa corresponde al lado “*c*”, y catetos a los lados “*a*” y “*b*”

Cómo se observa, la conclusión no solo se apoya en lo obvio, sino en la habilidad para pensar y razonar. Se puede obtener el mismo resultado utilizando un razonamiento algebraico:

1. Área del cuadrado C_3 es: c^2 2. Área del cuadrado C_1 es: a^2
2. Área del cuadrado C_2 es: b^2
3. Área de los triángulos T_1, T_2, T_3 y T_4, es: (a) (b) / 2

De figura 1a, el área del cuadrado formado por los lados cuya longitud es (a + b), es igual:

a área del cuadrado C_1, y de los triángulos T_1, T_2, T_3 y T_4.

El área de este cuadrado es: $(a + b)^2 = c^2 + 4\,(a)\,(b) / 2$ (2)

De la figura 1b, el área del cuadrado formado por los lados cuya longitud es (a + b), es igual:

al área de los cuadrados C_2 y C_3, y de los triángulos T_1, T_2, T_3 y T_4.

Por lo que el área de este cuadrado es: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4 (a) (b) / 2$ (3)

Como los cuadrados de las figuras 1a y 1b son iguales, se igualan las ecuaciones (2) y (3).

$$c^2 + 4 (a) (b) / 2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4 (a) (b) / 2 \quad (4)$$

Eliminando los términos comunes: 4 (a) (b) / 2, de ambos lados de la ecuación (4), se obtiene: Obteniéndose la ecuación (1'), igual a la ecuación (1), obtenida en forma geométrica: $c^2 = a^2 + b^2$ *(1')*

2. Demostración visual del teorema del binomio

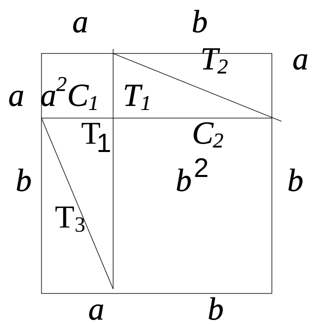


Fig. 2

De figura 2, área del cuadrado es igual al área de

1. Rectángulo $C_1 = a^2$
2. Rectángulo $C_2 = b^2$
3. Área de los triángulos T_1, T_2, T_3 y T_4, cada uno igual a: ½ a b. Área total = 4 (½) a b

Por lo tanto, área total del cuadrado con longitud de cada lado igual a (a + b):

$A = a^2 + b^2 + 4 (½) a b = a^2 + b^2 + 2 a b$ (5)

Que debe ser igual al área del cuadrado con longitud de cada lado igual (a + b), por lo que:

$$A = (a + b)^2 \quad (6)$$

Igualando ecuaciones (5) y (6), se obtiene:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 a b \quad (7)$$

El área de un cuadrado de lado igual a (a + b), es igual al área de un cuadrado de área igual a a^2, un cuadrado de lado b^2, y dos rectángulos de área (a b) cada uno.

CONCLUSIONES

- Los estudiantes de nivel básico se encuentran entre la etapa preoperativa y la operativa de acuerdo a la Teoría de Piaget; por lo que tienen dificultad para realizar operaciones abstractas.
- Se propone que el estudiante desarrolle demostraciones basadas en la técnica de origame
- Lográndose que el aprendizaje del estudiante utilice actividades lógico – matemáticas, apoyándose en forma coordinada con esquemas y acciones, y no solo con las propiedades matemáticas de los objetos.
- Lográndose que el sujeto acceda a la construcción de estructuras lógicas, mediante la abstracción reflexionante, que permite extraer información de acciones coordinadas y no solas de los objetos.
- El sustento teórico de estas acciones matemáticas, es la teoría de Van Hiele.
- Esta metodología ayuda a resolver esta problemática, ya que la enseñanza de la Geometría se basa en la realización de operaciones en estructuras espaciales y razonamientos lógicos.

REFERENCIAS

- Arzarello, F. y otros (1998). *A model for analysing the transition to formal proofs in geometry*, en Proceedings of the 22nd PME conference 2, 24-31
- Balacheff, N. (1998). Aspects *of proof in pupils' practice of school mathematic*, en Pimm, D. (Ed) Mathematics, teacher and children. 216-235. Londres: Hodder & Stoughton.
- Gutiérrez, Ángel y Jaime, Adela (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Hurel, G.; Snowder, L. (1998): *Students' Prof. Schemes: Results from exploratory studies*, en Schoenfeld, A.H.; Kaput, J.; Dubinsky, E. (eds.), Research in collegiate mathematics education, III, 234-283. Providence, EEUU: American Mathematical Society.

PALABRAS CLAVES: <u>Jerarquización</u>, <u>secuencialidad</u>, <u>explicitación</u>