

## **EXPERIÊNCIAS EM GEOMETRIA NO LABORATÓRIO DE ENSINO**

Ana Maria Redolfi de Gandulfo, Maria do Carmo P. Santos Colona e Carlos Francisco da Silva

**Introdução** - O Departamento de Matemática da Universidade de Brasília vem desenvolvendo ações significativas na formação de professores nos diversos níveis, tais como PRÓ-CIÊNCIAS 2000 (financiado pela CAPES / FAPDF), DESENVOLVIMENTO E MODERNIZAÇÃO DO ENSINO EM CIÊNCIAS EXATAS (financiado pelo MEC, Sesu) de 2000 até 2002 e CIÊNCIA PARA TODOS: Ação Integrada Visando a Melhoria no Ensino de Ciências e Matemática no Nível Médio (financiado pelo MCT / FINEP) de 2005 até 2007. A essas atividades soma-se o trabalho constante realizado pelo Laboratório de Ensino de Matemática (LEMAT-UnB) durante a última década.

O presente trabalho tem como objetivo descrever experiências educacionais na área de Geometria realizadas nesse âmbito durante o período citado.

As ações educativas no LEMAT-UnB são realizadas com alunos da graduação, com professores atuantes no Ensino Fundamental e no Ensino Médio e com alunos de escolas do Distrito Federal.

O contato freqüente e a pesquisa de conhecimentos e postura dos professores participantes desses cursos revelam que existe grande entusiasmo na procura de novos materiais didáticos para serem introduzidos na prática educativa. Há também o interesse no conhecimento e na prática de metodologia experimental de ensino, diferente dos métodos de ensino formais que vinham sendo praticados. Com muita freqüência observa-se que essas abordagens e metodologias não foram adquiridas pelos professores durante sua formação. Constatou-se a necessidade de complementar a formação dos professores em conteúdo de conhecimentos e na resolução de problemas. Nos cursos de formação continuada de professores foi revelada a importância da realização de demonstrações geométricas devido à dificuldade e insegurança demonstrada pelos participantes. Por essas razões, os cursos de formação permanentes oferecidos ultimamente são anuais e incluem realização de experiências, abundante resolução de problemas e a confecção dos materiais pedagógicos utilizados nas aulas.

O primeiro dos autores deste trabalho trabalhou nos projetos mencionados acima, coordenou a montagem do LEMAT-UnB e o desenvolvimento e preservação de seu acervo. Os dois autores seguintes assistiram a diversos cursos de formação continua, participaram ativamente na construção de materiais didáticos e atualmente cursam pós-graduação na UnB e na

PUC de Minas Gerais, respectivamente. Ambos envolveram-se na divulgação dos temas abordados no LEMAT-UnB a nível regional, mediante palestras e mini-cursos. O terceiro autor também tem acrescentado contribuições no campo da interdisciplinaridade.

Os três autores são apoiados pela Financiadora de Estudos e Projetos – FINEP- do Ministério da Ciência e Tecnologia no projeto: *Ação Integrada Visando a Melhoria do Ensino de Ciências e Matemática no Nível Médio*.

**Embasamento Teórico** - As ações realizadas sempre tiveram como referência e foram permeadas pela abordagem teórica construtivista, do “aprender fazendo”, segundo o qual o processo de ensino centra-se nas experiências e nas descobertas pelos alunos, no desenvolvimento de sua criatividade, no uso de materiais didáticos adequados, no trabalho em grupo, na resolução de problemas, etc, onde o aluno é o construtor do conhecimento e o professor é o condutor do processo desenvolvendo a autonomia do aluno, instigando-o a refletir, investigar e descobrir.

Os profissionais que atuam no ensino fundamental e no ensino médio, devem ter um conhecimento sólido de geometria, que compreende os conceitos, suas propriedades e relações, sempre de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Nos cursos de formação continuada são abordados temas como fundamento axiomático da geometria plana e espacial, proporcionalidade geométrica, transformações no plano e no espaço, tópicos de medida, extensão e dimensão, entre eles comprimentos, amplitudes, perímetros, áreas e volumes.

O conteúdo teórico dos cursos desenvolvidos no LEMAT-UnB têm como referência textos sobre geometria plana e espacial (Coxeter, 1971; Heath, 1956; Hilbert, 1952; Martin, 1982; Weyl, 1997; Yaglom, 1962), devidamente adaptados segundo a metodologia utilizada no desenvolvimento das atividades.

É importante que os professores conheçam porque se deve ensinar geometria na escola (Sherard, 1981), com quais conceitos deve-se trabalhar em cada nível (Hoffer, 1983) e as formas adequadas de ajudar as crianças a aprender (Farrel e Farmer, 1985) para assim contribuir no desenvolvimento das competências cognitivas e lógicas e na promoção das “bases para um pensamento avançado” (Alsina, 1998).

O ensino de geometria deve estar orientado no desenvolvimento de habilidades específicas nas cinco áreas: visualização, verbal, de desenho, de raciocínio lógico e de aplicação

(Hoffer, 1981). As experiências realizadas têm seu fundamento teórico no material citado e são motivadas pelas necessidades de entender e relacionar-se com o mundo real em relação aos conteúdos dos temas abordados.

Alguns dos materiais pedagógicos utilizados no ensino-aprendizagem geométrico são inspirados em textos apropriados (Alsina, 1991; Cofré, 2006; Holden, 1991) e outros resultaram de grupos de discussão entre professores ou entre alunos da Licenciatura em Matemática sobre as dificuldades enfrentadas na prática educacional em relação ao ensino-aprendizagem de conteúdos específicos.

**Metodologia** - A metodologia ativa fundamenta o processo de ensino na atividade criativa do aluno, na sua atividade investigativa, nas suas descobertas, tendo aos alunos como os próprios construtores de seus conhecimentos e ao professor como o orientador desse processo.

Entende-se por estrutura de laboratório “um espaço de comportamento e uma forma de produção” ( De Bartolomeis, 1986) ou seja um modelo pedagógico de utilização de material didático na aprendizagem ou um “aprender fazendo”.

Segundo o modelo piagetiano a instrução capaz de promover uma aprendizagem significativa para todos os alunos é um processo de ação sobre a realidade com as seguintes características: uso de materiais pedagógicos, ênfase no raciocínio indutivo e estratégias que favoreçam a interação dos alunos com o professor e dos alunos entre si. Este é um processo de “aprendizagem por descobertas dirigido”, centralizado nas descobertas dos alunos, o que exige que as estratégias utilizadas pelo professor em sala de aula devem estar baseadas nas características psicológicas lógicas e cognoscitivas dos alunos. A especial atenção requerida pelo estudo por parte do professor das condições de aprendizagem dos seus alunos é uma das características essenciais desse método.

O modelo didático adotado é o de aprendizagem dirigido, é um modelo construtivista fundamentado nas visões epistemológicas de Piaget e Vygotski, com algumas variações introduzidas na metodologia de ensino referentes à comunicação pessoal e ao aspecto lúdico da aprendizagem.

O conhecimento e a prática desta metodologia experimental requerem do professor uma postura e conhecimentos adequados para apresentar, organizar e conduzir as atividades. Conhecimentos estes que permitam uma melhoria no uso dos conceitos e também estimulem o

bom uso da linguagem oral, buscando relações entre essa linguagem e as representações matemáticas.

As atividades desenvolvidas pelos alunos compreendem:

- Observação e identificação de propriedades das figuras geométricas.
- Utilização de recursos pedagógicos na investigação das propriedades das figuras geométricas.
- Manipulação de modelos didáticos construídos.
- Comparação de propriedades utilizando exemplos e /ou contra-exemplos.
- Elaboração, enunciado e demonstração de conjecturas.

As atividades dos alunos são desenvolvidas preferivelmente em grupos pequenos, tanto na fase de experimentação como na de elaboração dos conceitos e das propriedades.

Como exemplo de atividades realizadas no LEMAT-UnB em geometria plana apresentamos os seguintes modelos utilizados no tratamento de figuras triangulares equivalentes.

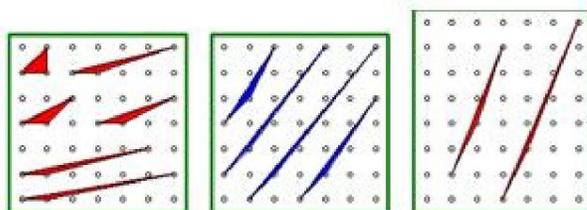


Fig 1 - triângulos equivalentes medindo  $\frac{1}{2} u^2$  de área, representados em malha quadrangular ou em geoplano

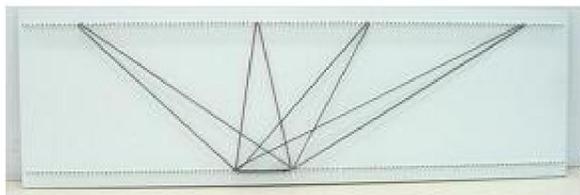


Fig 2 - triângulos equivalentes com a mesma base

Os seguintes teoremas foram enunciados por Euclides, no livro 1: Teorema 35 - *Os paralelogramos de base comum com lados opostos numa mesma paralela têm a mesma área.*

Teorema 36 - *Paralelogramos com bases congruentes numa mesma reta e com lados opostos numa mesma reta paralela têm áreas iguais.*

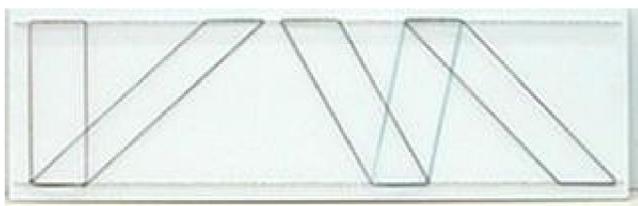


Fig 3 - paralelogramos equivalentes

O modelo pedagógico representado na Figura 3 não constitui uma demonstração desses teoremas de Euclides, mais contribui para sua efetiva compreensão.

A demonstração do teorema 35 usa postulados de área: i) figuras congruentes têm a mesma área; ii) se uma figura é decomposta em duas figuras sem superposição que não seja mais que nos pontos da borda, então a área da figura original é a soma das áreas das duas figuras da decomposição.

O modelo dinâmico da Figura 3, propicia a discussão da demonstração do teorema 36, onde é aplicada duas vezes a conclusão do teorema anterior. Esse modelo favorece a constatação de que a diagonal de um paralelogramo determina no quadrilátero dois triângulos congruentes, argumento usado para estender os dois teoremas anteriores a resultados similares para triângulos. Euclides também demonstra que se um triângulo e um paralelogramo têm bases congruentes na mesma reta e o lado oposto do paralelogramo está na mesma reta paralela que o vértice do triângulo, então a área do paralelogramo é o dobro que a área do triângulo. É importante destacar que os resultados anteriores são obtidos sem efetuar nenhuma medição ou cálculo de áreas. Esses resultados também são importantes na seguinte demonstração.

**Teorema de Pitágoras.** Em um triângulo retângulo, a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado sobre a hipotenusa.

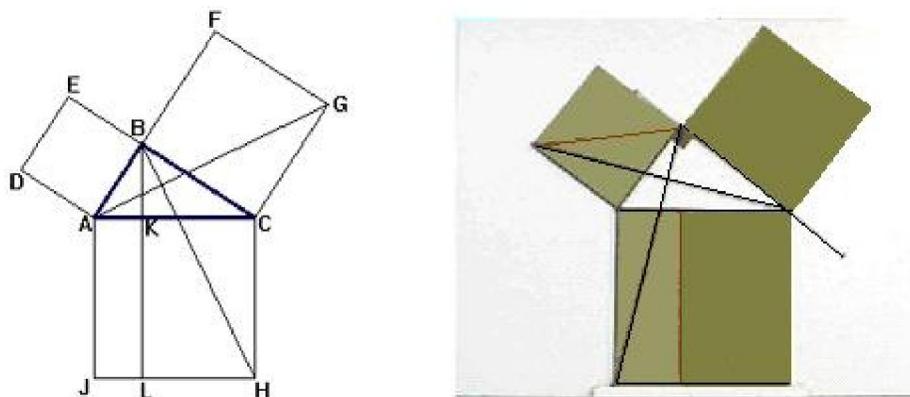


Fig 4 - Demonstração de Euclides do Teorema de Pitágoras

Esta demonstração do Teorema de Pitágoras aparece no livro I dos Elementos de Euclides; na representação da Fig 4, o triângulo ABC é retângulo, com quadrados construídos sobre seus catetos e foram adicionados os segmentos AG, BH e BL (paralelo a CH).

Na demonstração são provados os seguintes itens:

- i) Os triângulos  $\triangle ACG$  e  $\triangle BCG$  são equivalentes e  $\text{área} [BFGC] = 2 \text{área} [ACG]$ .
- ii)  $\triangle ACG$  e  $\triangle BCH$  são triângulos congruentes e  $\triangle BCH$  e  $\triangle CHK$  são equivalentes.
- iii)  $\text{área} [CHLK] = 2 \text{área} [\triangle CHK]$ , em conseqüência,  $\text{área} [BFGC] = \text{área} [CHLK]$
- iv) Similarmente se demonstra que  $\text{área} [ADBE] = \text{área} [AKLJ]$
- v)  $\text{área} [ACHJ] = \text{área} [ADBE] + \text{área} [BFGC]$ ; e se  $AB = a$ ,  $BC = b$  e  $CD = c$  então  $a^2 = b^2 + c^2$ .

São numerosas as demonstrações do Teorema de Pitágoras, por exemplo, no livro de Loomis são citadas mais de 300. Na Figura 5 estão representadas algumas dessas demonstrações geométricas, a modo de tangram, com as que podem ser realizadas diferentes atividades geométricas relacionadas com o estudo das propriedades geométricas das figuras e comparações das áreas das mesmas pela superposição das peças.

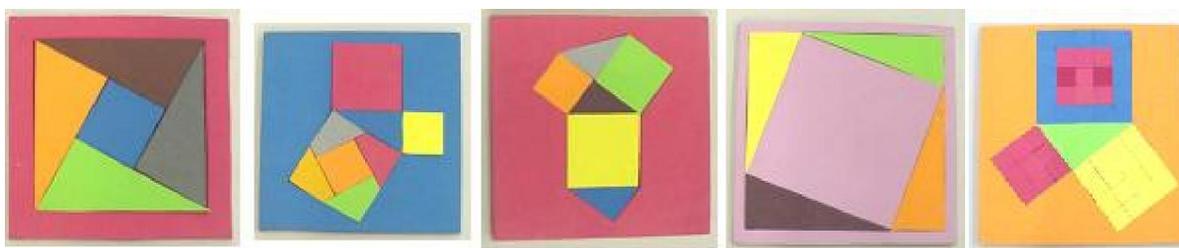


Fig 5 – Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Um outro exemplo de aplicação do material didático representado na Figura 3 é na demonstração do teorema de Pappus, do qual nos limitamos a incluir uma representação gráfica na Figura 6.

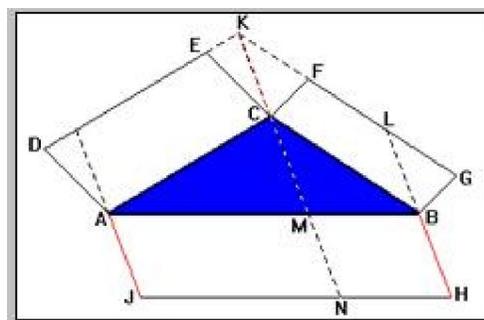


Fig 6 – Teorema de Pappus

As atividades desenvolvidas no LEMAT-UnB em geometria espacial incluem variadas experiências de representação de figuras espaciais. As secções de cubos, por exemplo, são

representadas em cubos de plástico ou de vidro, assim como os truncamentos de poliedros regulares até obter todas as representações possíveis dos poliedros semi-regulares.



Fig 7 – Seções de poliedros regulares. Poliedros semi-regulares.

O estudo das simetrias dos poliedros regulares é acompanhado de representações dos poliedros, dos eixos e planos de simetrias dos mesmos e também são utilizados caleidoscópios poliédricos.

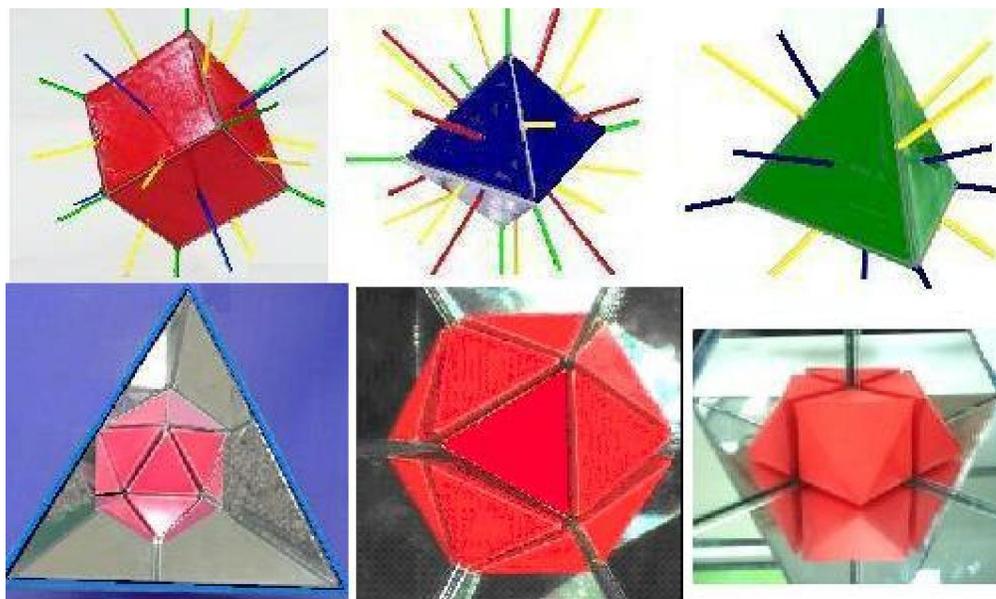


Fig 8 – Simetrias de poliedros regulares.

As experiências com figuras espaciais incluem as construções e reconstruções de poliedros, estudo dos duais e suas representações, assim como a determinação de preenchimentos do espaço.



Fig 9 – Seções de poliedros

Realizaram-se diversas atividades que foram registradas por meio da observação direta, da discussão concomitante com os profissionais que conduziam as tarefas e da posterior análise dos resultados obtidos, visando sempre a otimização dos resultados no campo da aprendizagem.

**Resultados e Conclusões** - As iniciativas mencionadas, desenvolvidas no LEMAT-UnB, tiveram as seguintes finalidades:

- promover a formação continuada de professores de ensino fundamental e do ensino médio mediante cursos presenciais de extensão universitária, sendo que nos últimos anos esses cursos são anuais com duração de mais de 200 horas, e incluem a construção de materiais pedagógicos e o desenvolvimento de trabalho interdisciplinar;

- promover a instalação e a discussão da dinâmica de funcionamento dos laboratórios de ensino de matemática nas escolas do Distrito Federal.

Como consequência das ações acima citadas, formou-se um Grupo de Experiências e Pesquisa em Educação Matemática (GPEM) que, com apoio da Financiadora de Estudos e Projetos do Ministério da Ciência e Tecnologia (FINEP), tem trabalhado no aprofundamento teórico, no aperfeiçoamento dos materiais didáticos e no aprimoramento das metodologias de ensino. O GPEM é um disseminador de novas práticas educacionais a nível regional, mediante palestras e mini-cursos.

Recentemente, houve também a ocasião de mostrar esta proposta pedagógica a nível nacional mediante a participação na III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, através de uma *Exposição de Modelos do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de Brasília e de Escolas do Distrito Federal*, a qual foi visitada por 1200 participantes desse congresso, e da realização de um mini-curso.



Fig 10 – Exposição de Modelos do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de Brasília e de Escolas do Distrito Federal

Em decorrência dessas ações, os profissionais envolvidos que expressaram elevada motivação, tiveram iniciativas de melhoria no campo do ensino.



Fig 11 – Mini-curso: *Construindo no Espaço: Superfícies, Poliedros e Cristais*, na Universidade Federal de Goiás, novembro 2006

Atualmente estão sendo montados Laboratórios de Ensino de Matemática nas cinco escolas públicas participantes do projeto CIÊNCIA PARA TODOS: *Ação Integrada Visando a Melhoria do Ensino de Ciências e Matemática no Nível Médio*, do MCT-FINEP e em outras escolas públicas do Distrito Federal.

Atendendo às solicitações dos professores do ensino fundamental e ensino médio, abriu-se um curso de pós-graduação de Especialização em Matemática na Universidade de Brasília, cuja demanda superou todas as expectativas.

## Referências

- Alsina, C., Burguês, C., Fortuny, J., Gimenez, J. e Torra, M. - *Enseñar Matemática*. Barcelona. Editora Grão (1998).
- Alsina, C., Burguês, C. e Fortuny, J. - *Materiais para Construir la Geometría*. Madrid. Editora Síntesis (1991).
- Bartolomeis, F. De - *La actividad educativa*. Barcelona. Editora Laia (1986).
- Farrel, M. e Farmer W. A. - *Adolescent's performance on a Sequence of Proportional Reasoning Tasks*. Journal of Research in Science Teaching 22 (1985). pp 503 - 18.
- Heath, T. L. - *Euclid - The Thirteen Books of The Elements*. Nova Iorque. Dover (1956).
- Hilbert, D. e Cohn-Vossen, S. - *Geometry and the Imagination*. Nova Iorque. Chelsea Publishing (1952).
- Hoffer, A. *Geometry is More than Proof*. The Mathematic Teacher, vol 74, Nº 1. U.S.A. Nacional Council of Teacher of Mathematics (1981).
- Hoffer, A. - *Van Hiele - based Research. Adquisition of Mathematical Concepts and Processes*, editado por R. Lesh e M. Landau. Nova Iorque. Academic Press (1983).
- Martin, G. E. - *Transformation Geometry*. Nova Iorque. Springer (1982).
- Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio. Terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental: matemática. Brasília. Ministério da Educação e do Desporto (1999).
- Sherard, W. *Why is Geometry a Basic Skill?* The Mathematic Teacher, vol 74, Nº 1. U.S.A. Nacional Council of Teacher of Mathematics (1981).
- Weyl, H. *Simetria*. São Paulo. Edusp (1997).
- Yaglom, I. M. - *Geometric Transformations*. Nova Iorque. Random House (1982).