Un estudio sobre el problema de la enseñanza – aprendizaje de la definición geométrica en el nivel medio superior. El efecto de los ejemplos prototipo.

Cruz Evelia Sosa Carrillo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus ciudad de México

Resumen

Este artículo muestra los resultados de una actividad escolar con estudiantes del Nivel Medio Superior. La actividad se llevó a cabo en el curso de Geometría y Trigonometría. El objetivo principal de esta investigación es hacer una reflexión acerca de las diferencias entre la definición de un concepto y la imagen conceptual que los estudiantes tienen acerca de ese objeto. Así como también analizar las posibles implicaciones que esa diferencia podría generar en el entendimiento de los estudiantes de los conceptos matemáticos.

Abstract

This paper shows the results of a teaching activity with tenth grader students. The activity was held in a geometry and trigonometry course. The main goal of this paper is to make a reflection on the differences between the definition of a geometrical object and the conceptual image of the students about it. Also, to analyze the possible implications of these difference in the students understanding of mathematical concepts.

Introducción

En matemáticas, como en cualquier otra disciplina, necesitamos hacer uso del lenguaje verbal y escrito para establecer una comunicación.

Desde el punto de vista formal, Moschkovich (2004) comenta que un acuerdo común dentro de la comunidad matemática es que la comunicación se establece a través de un discurso que, independientemente de su significado específico es breve, preciso, explícito, certero, abstracto y general. La matemática se apoya en el método lógico-deductivo y su funcionamiento requiere de la formalidad y el rigor, que caracteriza la sintaxis del discurso matemático. El conocimiento matemático siempre es comunicado a través de expresiones rigurosas y formales que hacen uso de definiciones, teoremas, axiomas e inferencias apoyadas en éstas. Siendo la matemática un conocimiento teórico, el proceso de definición es relevante, porque es por medio de ellas que se introducen los objetos de una teoría. Además de que es necesaria la explicación de los términos usados para representar esos objetos, Copi (1968).

Marco teórico

En el caso particular de la geometría, las definiciones aparecen en los primeros grados de la escuela primaria, especialmente con la intención de asignar correctamente nombres a los objetos geométricos.

Posteriormente, las definiciones servirán para dar cuenta de las propiedades de estos objetos. La relación entre las definiciones y los atributos[1] que las conforman tiene una expresión más amplia en la concepción de Vinner (1991) ,quien opina que existen dos constructos relacionados con la definición: Concept image y Concept definition , donde la Imagen Conceptual se refiere a todo aquello que el estudiante evoca a propósito de la sola mención del objeto definido mientras que la definición conceptual es la definición matemática del concepto. Evidentemente hay un problema de comunicación si la imagen conceptual retiene mayoritariamente aspectos irrelevantes de la definición conceptual.

Cuando los objetos geométricos son introducidos a través de una pequeña cantidad de ejemplos, en particular de los llamados prototípicos[2], el conocimiento de los estudiantes sobre el objeto es restringido a los casos mas frecuentes que son mostrados por los libros de texto o por los profesores, descuidando la tarea de construir una idea general del objeto, que frecuentemente tiene representaciones muy diversas. Trabajar con prototipos limita la cantidad de objetos aceptados bajo la definición provocando una confusión a partir de la cual sólo se identifican los casos particulares acordes al prototipo conocido.

Con respecto a este problema de la "tipicalidad" en el aprendizaje de la definición, A. Mesquita (1998), menciona acerca de la *rigidez geométrica*:

---

[1] En éste trabajo, se entiende por atributo a los elementos invariantes de una definición, es decir lo que caracteriza a un objeto matemático.

[2] Figuras prototípicas son aquellas que corresponden a una organización regular de contorno, orientación y forma; figuras prototipo tienden a respetar leyes de cerramiento (los límites cerrados son percibidos preferencialmente, privilegiando algunas direcciones (tales como horizontal y vertical) y las formas (que tienden a ser regulares, simples y simétricas).

> “La imagen de una figura prototipo puede inducir un pensamiento poco flexible el cual impedirá el reconocimiento de un objeto en una posición distinta a la estándar, además el manejo de una sola imagen, en particular la estándar, puede dar pie a que los estudiantes distorsionen lo establecido por la definición” (p.42).

Incluso ocurre así en los casos considerados elementales, por ejemplo, un cuadrado en la siguiente posición:

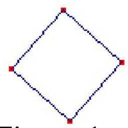


Figura 1

puede no ser reconocido como tal.

Balacheff (2000) en su trabajo de investigación sobre los procesos de prueba en estudiantes de Nivel Medio Superior en el que se apoyó en la construcción del concepto de diagonal de un polígono, comenta que uno de los problemas encontrados para el desarrollo de su investigación fue la falta de comunicación efectiva, generada por el desacuerdo de los estudiantes con respecto a la naturaleza de los objetos matemáticos implicados.

Balacheff trabajó con un grupo de estudiantes la formulación del número de diagonales de cualquier polígono; él cita que algunos de los problemas presentados por los estudiantes durante el proceso de resolución fueron:

- El problema de creencia de la no-necesidad de apoyarse en la definición
- Los conceptos y definiciones “evolucionan” en el proceso de resolución del Problema, es decir, los estudiantes adaptan continuamente la definición a sus necesidades momentáneas.

En el primer caso, Balacheff observa que algunas parejas de alumnos no recurren a la definición de los términos polígono y diagonal, porque suponen que la conocen y esto es suficiente para los fines de su trabajo.

Estos estudiantes tienen una concepción que podemos considerar clásica de polígono y diagonal que acepta sólo a los polígonos convexos.

Con referencia a lo anterior, creemos que los alumnos piensan que las diagonales deben bisecarse o cuando menos deben cortarse, además de que consideran que necesariamente deben ser oblicuas, no conciben diagonales horizontales o verticales, es decir, por lo general, para los alumnos, diagonal es sinónimo de línea inclinada. Posiblemente están pensando en la imagen de las diagonales en un rectángulo.

Los estudiantes que participaron en el experimento no consideraron diagonales en casos como los siguientes:

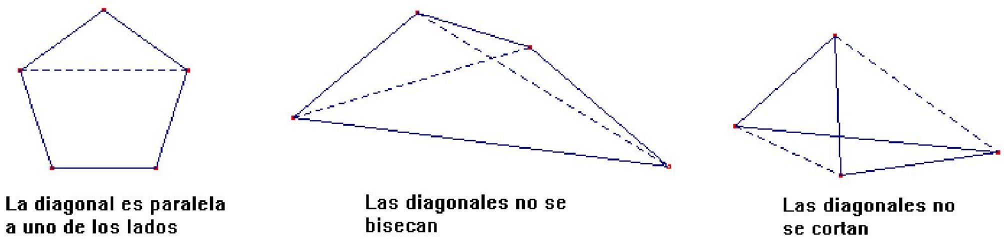


Figura 2

Vinner y Hershkowitz (1980), haciendo referencia al problema de la definición y en consonancia de su idea de la contraposición entre imagen conceptual e imagen definición, encontraron que algunos estudiantes que conocían de manera correcta la definición de un concepto, y que tenían formada una imagen prototípica del mismo, tenían dificultades para aplicar correctamente la descripción de dicho concepto. De manera que para explicar esta relación propusieron un esquema que permitiera entender el proceso de la creación de la imagen conceptual a partir de la imagen definición.

Ellos, establecen el concepto definición como lo que entendemos simplemente por definición, en tanto que el concepto imagen es la estructura cognitiva global que está asociada al concepto, es decir, el concepto imagen puede ser la representación visual de un concepto en caso de que éste tenga representación visual. Puede también ser una colección de impresiones, experiencias o fotografías mentales, asociadas con el nombre del concepto. Vinner (1991) trata a la noción de imagen conceptual e imagen definición como dos "células" ajenas en las cuales está representada la relación del conocimiento acerca del concepto de un objeto matemático. De acuerdo al uso que de esas "células" haga el estudiante y las relaciones que establezca entre ellas, será el tipo de respuesta que el alumno proporcione a una tarea cognitiva dada, que ubicándonos en el contexto de la geometría escolar, esta tarea puede ser la resolución de un problema o la realización de una prueba. Por ejemplo:

De acuerdo a Vinner, si se cumple el siguiente esquema, un alumno puede tener un comportamiento intelectual.

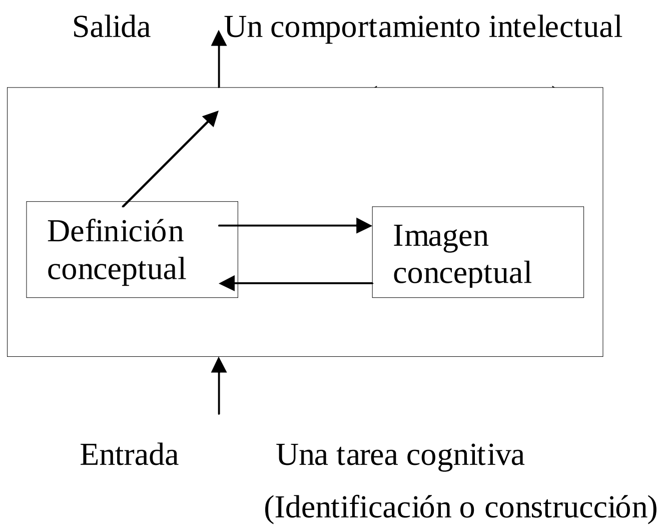
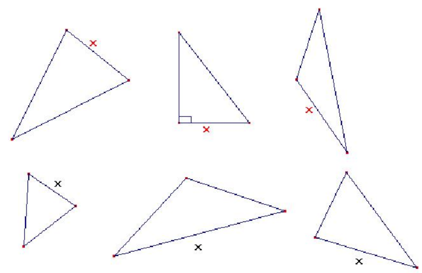
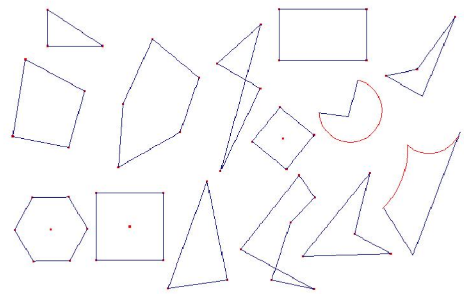


Figura 3

Metodología

Con la finalidad de obtener información útil que nos permitiera establecer conclusiones importantes en dirección al problema de la enseñanza – aprendizaje de la definición, realizamos una experimentación con 16 estudiantes del nivel medio superior con edades entre 15 y 17 años que ya habían cursado Geometría y trigonometría. Ellos tienen conocimientos elementales de computación, pero la tecnología utilizada en este caso siempre fueron construcciones elaboradas a lápiz y papel. Para la parte de análisis de la información, además de exponer los resultados de todos los estudiantes, se eligieron algunos casos especiales que fueron analizados profundamente con el objetivo de mostrar información relevante para una mejor comprensión del problema del aprendizaje de la definición geométrica en este nivel.

A continuación presentamos el cuestionario aplicado a los estudiantes, el análisis y conclusiones de esta experimentación.

1) Traza la altura correspondiente al lado x de los siguientes triángulos  2) ¿Cómo defines la altura de un triángulo?	3) En el siguiente conjunto de figuras, marca aquellos que son polígonos  4) ¿Qué es un polígono?

Resultados (preguntas 1 y 2)

Del total de estudiantes que participaron en la primera parte de la actividad experimental (cuestionario parte 1) cuatro trazaron correctamente las alturas, en todos los casos, de las distintas posiciones en las que fueron colocados los triángulos. Las definiciones que proporcionaron de la altura de un triángulo son las siguientes.

- Definición (estudiante 1). *Es el punto más alto que hay en el triángulo con respecto a la base. La altura siempre es perpendicular a la base.*
- Definición (estudiante 2). *Es la línea que va de un vértice del triángulo hacia el lado opuesto, formando ángulos de 90º con ese lado.*

Estos casos manifiestan en lo que podríamos llamar su *concepto imagen*, que tienen una noción clara de lo que es la altura de un triángulo. El estudiante 1, se refiere a ésta como un punto, lo cual sugiere una interpretación dinámica del punto que se ha desplazado sobre alguno de los lados hasta tomar la posición más alejada de la base. El segundo caso es lo que podríamos llamar una definición correcta.

- Definición (estudiante 3). *Es como la mitad del área de un rectángulo con una base y altura iguales a la del triángulo.*

- Definición (estudiante 4). *Es la distancia que existe entre una línea y el punto en el que convergen otras dos líneas unidas a la primera.*

El estudiante 3 define altura con base en el área, por lo que de acuerdo a su concepto imagen, es posible que el concepto definición lo haya sido adquirido reproduciendo la definición de memoria. El estudiante 4 no hace referencia al carácter de perpendicularidad de la altura con la base; sin embargo, los cuatro trazan correctamente las alturas para todos los casos, con lo que podemos observar que el concepto imagen está correctamente en el fondo con el concepto definición. Sin embargo, la verbalización es deficiente, solo es correcta en un caso; hay algunas omisiones de atributos relevantes.

De los alumnos restantes, siete consideran que la altura necesariamente debe cortar al lado sobre el cual se traza en el punto medio. Algunas definiciones proporcionadas por ellos son las siguientes.

- Estudiante 5: *Escoges un lado como base. A la mitad del lado que escogiste lo unes con el ángulo opuesto.*
- Estudiante 6: *Es la distancia del punto medio de un lado al vértice opuesto*
- Estudiante 7: *Es el vértice que divide a la base de un triángulo en dos.* (No dice que a la mitad, pero en sus trazos se aprecia que está pensando en el punto medio).

Los resultados en su mayoría indican que la idea que estos estudiantes tienen de altura es la de un segmento que necesariamente divide al lado tomado como base a la mitad, por lo tanto para todos los casos trazan “la altura” dentro del triángulo.

Por los trazos de altura hechos por estos estudiantes, observamos que su concepto imagen de altura coincide con la expresión con la que la definen, aunque hay confusiones de términos (vértice = ángulo) y (punto medio = vértice).

De estos siete estudiantes, dos alumnos proporcionaron definiciones que no mencionan el punto medio, pero en sus dibujos trazan “su altura” por el que aproximadamente sería el punto medio del lado opuesto en todos los casos.

- Estudiante 8: *Es la medida que hay de la base de un triángulo hasta la arista contraria*
- Estudiante 9: *Es la línea más larga entre el vértice correspondiente (el que está enfrente) y la base.*

Es estos dos casos, la imagen mental que tienen de altura no coincide con la definición que ellos proporcionan, es interesante el hecho de que se confunde el segmento con la medida del segmento, lo cual es una de las confusiones más comunes entre nuestros estudiantes.

Casos diversos

Los estudiantes considerados hasta ahora, presentaron un comportamiento muy específico, o hicieron bien sus trazos de altura, o realizaron sus trazos al punto medio de la base.

Los estudiantes que consideramos a continuación presentan comportamientos diversos que deseamos comentar, por lo que hacemos un análisis detallado de cada desempeño, con el fin de obtener información útil para nuestra investigación

<u>Estudiante A</u>

Definición:

Tomas una base y sacas una perpendicular y ésa es la altura, tiene que pasar por donde se cruzan, se unen los otros dos lados.

Características relevantes consideradas en la definición

Base, perpendicular, direccionalidad

Trazos

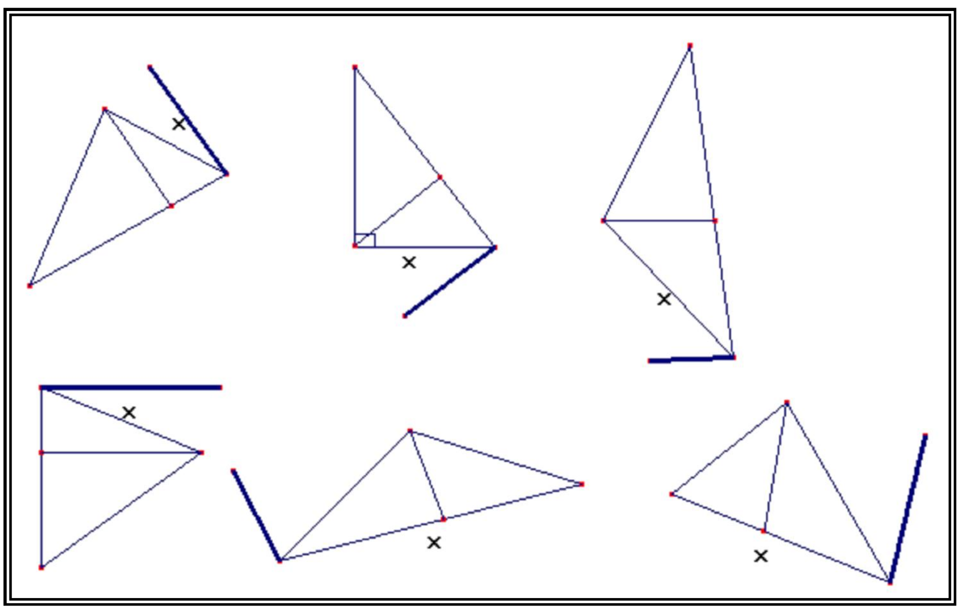


Figura 4

Comparación Trazos -Definición

Podemos pensar que su definición se compone, por un lado, de los atributos relevantes, y, como podemos ver, aparecen los tres atributos. Sin embargo, como podemos ver las alturas no son todas correctas, parece que la afirmación "sacas una perpendicular" es la razón del segmento colocado en un extremo de la base parece que el alumno considera que la altura debe ser paralela al segmento auxiliar que traza. Podemos observar en su definición que tiene idea clara de lo que es la altura, pero no concibe los casos en los que la altura está fuera del triángulo o sobre los lados como en el caso del triángulo rectángulo. Sus trazos son acordes con su definición, pese a que olvidó que la construcción de las alturas debían usar como base el lado marcado, más bien usa un criterio apoyado en una gestalt[3] que adapta según la situación, una visión global de la composición general del triángulo y luego elige la posición que le acomoda para la construcción.

<u>Estudiante B</u>

Definición

> *La base del triángulo hasta el punto más alto de éste. La línea siempre debe de ser horizontal o vertical.*

Características de la definición

Base del triángulo, vértice (punto más alto)

Trazos

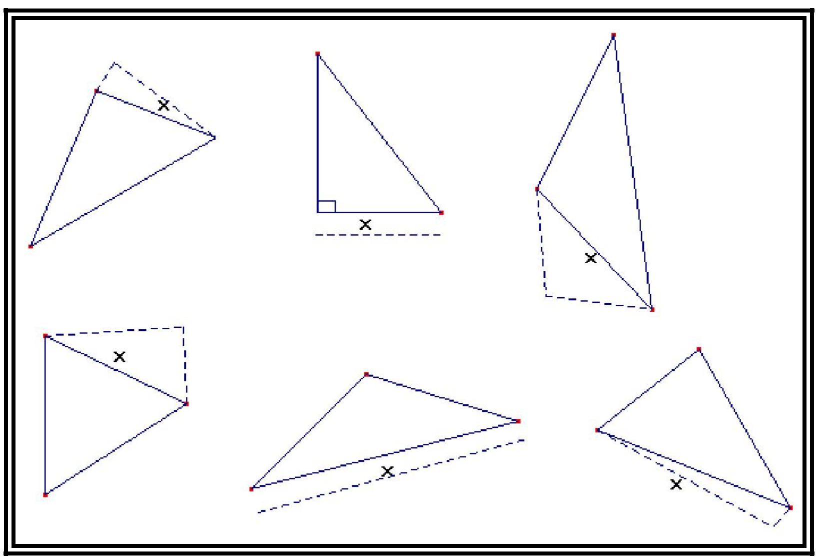


Figura 5

---

[3] El término *Gestalt* proviene del alemán y fue introducido por primera vez por Christian von Ehrenfels. No tiene una traducción única, aunque se lo entiende generalmente como "forma". Sin embargo, también podría traducirse como "figura", "configuración" e, incluso, "estructura" o "creación. http://es.wikipedia.org/wiki/Psicolog%C3%ADa_de_la_Gestalt

Comparación Trazos - Definición

La definición omite dos de las tres características relevantes, considera el término base pero no la perpendicularidad ni la posición del segmento perpendicular pasando por el vértice.

<u>Estudiante F</u>

Definición

Es el punto más alto que se encuentra en relación a una base o lado.

Características de la definición

Base, lado, vértice (punto más alto)

Trazos

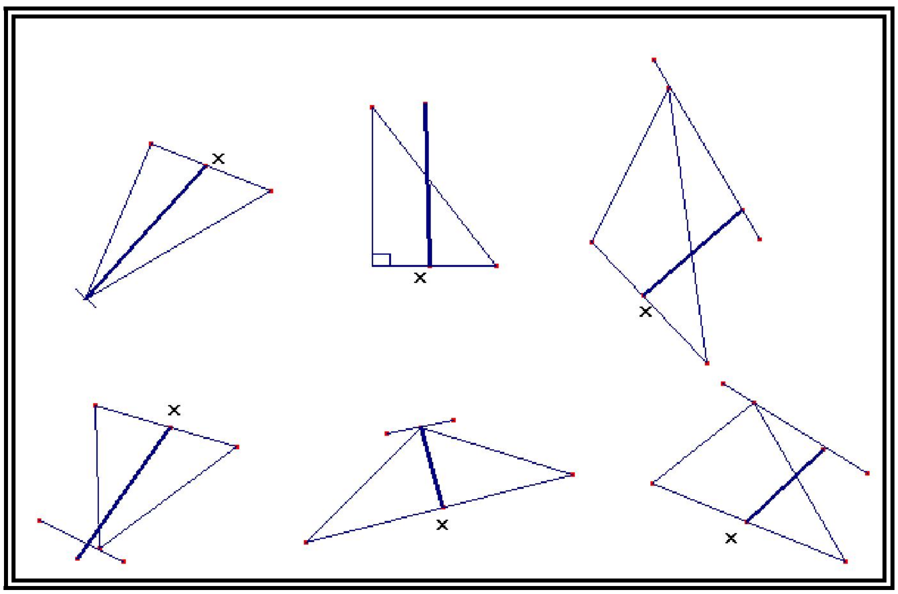


Figura 6

Comparación Trazos - Definición

El estudiante considera que la altura debe tener una dirección orientada por un segmento paralelo al lado sobre el cual se traza, sin que necesariamente sea perpendicular a él y sin que necesariamente pase por el vértice opuesto. Aunque no lo mencione en su definición, el alumno asume que la altura debe trazarse a partir del punto medio del lado. Sus trazos no son acordes a su definición, pareciera que la expresión “el punto más alto” es el motivo del trazo de la recta auxiliar que en todos los casos toma el cuidado de construir perpendicularmente de acuerdo a la gestalt “de la T invertida”, pero colocada incorrectamente, considerando al vértice opuesto en todos los casos como una referencia pero no para hacer pasar la perpendicular. En estas construcciones identificamos los atributos relevantes de base, perpendicular y atención al vértice, pero la interpretación de la direccionalidad trastoca toda la construcción.

Resultados (preguntas 3 y 4)

Del total de 16 estudiantes, solamente 5 marcaron todas las figuras correspondientes a polígono, 9 consideraron sólo a los convexos y 6 de ellos marcaron además las figuras con lados curvos. Solo 2 estudiantes incluyeron a los polígonos convexos.

Algunas de las definiciones de polígono proporcionada por los estudiantes son las siguientes:

- Polígono es toda figura que tiene 5 o más lados de forma regular o irregular
- Figuras de tres lados o más que no se cortan
- Un área cerrada con cualquier número de lados
- Figuras con todos los lados iguales
- Figuras de muchos lados
- Un cuerpo irregular

Conclusiones

En esta observación detallada de respuestas observamos en general que los atributos relevantes pueden ser verbalizados por los estudiantes, pero las construcciones están enraizadas en imágenes conceptuales más fuertes (dominantes), tales como la gestalt conocida e identificada como la T invertida que se transforma en mediana cuando se aferra al punto medio de la base en detrimento de la perpendicularidad, también aparecen constantemente, trazos con orientación horizontal-vertical.

Así podemos decir que hemos encontrado que los atributos relevantes son cambiados por interpretaciones personales pero respondiendo a gestaltes específicas.

De acuerdo a los resultados de esta investigación, estamos de acuerdo con Vinner (1991), quien asegura que “conocer la definición de un concepto no garantiza su entendimiento”, p.69. Por tanto, no podemos comprender una definición, ni tener posibilidad de una aplicación pertinente de la misma, si solo se reproduce de memoria. Por lo cual pensamos que solo el constante uso de la definición en situaciones problémicas (mediante prácticas institucionales diseñadas adecuadamente, Godino, Batanero y Font (2006)) puede generar la apropiación de la misma.

Tres palabras clave: **Geometría - Definición - Prototipos**

Bibliografía

- Balacheff, N (2000), *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Una empresa docente. Universidad de los Andes. Bogotá Colombia
- Copi I, (1968*)* *Introducción a la lógica.* Editorial Eudeba, Argentina.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.*
- Mesquita A, (1998). About the conceptual obstacles together to the external representation in geometry. JMB 17(2) p. 183-195
- Moschkovich J. (2004) What counts as mathematical discourse? Psicology Mathematics Education 27
- Vinner, S and Hershkowitz, R. (1980). *Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts.* Proceedings of the fourth international conference for the psychology of Mathematics Education (pp. 177-184). Berkeley University of California, Lawrence Hall of Science.
- Vinner, S. (1991*).* The Role of Definitions in teaching and learning of Mathematics. In: Tall, D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking, pp.(65-81)