PROPUESTA METODOLÓGICA DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LOS CUADRILÁTEROS

Liliana Milevicich, Ulises Arraya
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar; liliana_milevicich@yahoo.com.ar; profe_ulises@yahoo.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento geométrico Nivel: Básico

Resumen. *Varios autores coinciden en que la Geometría ha sido dejada de lado en la enseñanza de la matemática en los niveles inicial y medio. Si bien ésta aparece en los currículos actuales, casi no se enseña en las aulas. Nos encontramos habitualmente con docentes que, en los niveles de escolaridad inicial y medio, tienen dificultades en encontrar situaciones que sean de interés para los alumnos, así como ejemplos sencillos sobre los usos de la geometría en la vida cotidiana. En el mismo sentido, no son concientes de las habilidades que la geometría desarrolla por su naturaleza intuitiva-espacial y lógica, con lo cual se le brinda escaso espacio en los contenidos curriculares y mínima importancia en la organización de los programas. El presente trabajo analiza la implementación de una propuesta didáctica que prevé la conceptualización y descubrimiento de las propiedades de los cuadriláteros, a partir de la experimentación, mediante actividades guiadas apoyadas por la utilización de un CAS (Cabri II plus) y los avances logrados por los alumnos durante y al cierre de la misma.*
Palabras claves: Razonamiento geométrico, visualización, abstracción, generalización

Introducción

La geometría es la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad. Como disciplina, se apoya en un proceso extenso de formalización, el cual se ha venido desarrollando por más de 2000 años en niveles crecientes de rigor, abstracción y generalidad. Si bien muchos autores la han caracterizado ampliamente, sus aspectos más relevantes, a nuestro juicio, se pueden resumir del siguiente modo, en concordancia con el estudio ICMI "Perspectives en l´Ensenyament de la Geometria pel segle XXI" realizado en el año 1995 en Pisa (ICMI, 2001):

- Es una herramienta fundamental para describir, medir figuras y representar los conceptos.
- Es la disciplina donde mejor se realizan los razonamientos deductivos.
- Constituye un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas de la Matemática y de otras ciencias; por ejemplo gráficas y diagramas.
- Constituye una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovativas. Por ejemplo: gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, investigación de operaciones.

- Se puede distinguir entre una geometría que enfatiza las propiedades "estáticas" de los objetos geométricos y una geometría dinámica donde los objetos cambian respecto a los diferentes tipos de transformaciones en el espacio.
- Ha formado una teoría de ideas y métodos mediante las cuales es posible construir y estudiar modelos idealizados del mundo real.

Creemos que la enseñanza de la geometría no es de ninguna manera una tarea fácil. En lugar de tratar de enfrentar y superar los obstáculos que emergen en su enseñanza, las prácticas escolares actuales, en muchos países, simplemente la omiten (ICMI, 2001). Varios autores coinciden en que la Geometría ha sido dejada de lado en la enseñanza de la matemática en los niveles inicial y medio. Si bien ésta aparece en los currículos actuales, casi no se enseña en las aulas. (Guzmán, 1993; Abraira, 1995).

Justificación

Con el propósito de brindar una explicación sobre el abandono en la enseñanza de la geometría, cabe diferenciar dos etapas. Una primera que comprende el período 1960-1980, aproximadamente, dónde se introdujeron nuevos tópicos en la enseñanza de la Matemática (probabilidad, estadística, ciencias computacionales, matemáticas discretas). Se redujo la cantidad de horas dedicadas a estudiar Matemática. Este período se caracterizó por el auge de las Matemáticas Modernas, la introducción de la Teoría de conjuntos, la enseñanza de la lógica y de las estructuras abstractas.

En los veinte años posteriores (1980-2000), se produjo un retorno hacia contenidos tradicionales en matemáticas, con un énfasis específico sobre actividades de planteamiento y solución de problemas.

Allí, los intentos de restablecer la geometría euclidiana clásica no tuvieron el éxito esperado. Varios autores se han cuestionado las causas, entre las que sobresalen con mayor fuerza, que los contenidos tradicionales no están en consonancia con los tiempos actuales, y la forma tradicional de presentar los contenidos es poco atractiva (Abraira, 1995; Villella, 2001; Itzcovich, 2005). Una primera y lógica consecuencia, fácilmente detectable para quienes trabajamos en la formación de docentes, es que los profesores más jóvenes han aprendido Matemática bajo una currícula que ha descuidado la Geometría.

Creemos que a partir de ellos nos encontramos habitualmente con docentes que, en los niveles de escolaridad inicial y medio, tienen dificultades en encontrar situaciones que sean de interés para los alumnos, así como ejemplos sencillos sobre los usos de la geometría en la vida cotidiana. En el mismo sentido, no son concientes de las habilidades que la geometría desarrolla por su naturaleza intuitiva-espacial y lógica, con lo cual se le brinda escaso espacio en los contenidos curriculares y mínima importancia en la organización de los programas. Creemos que, esto último esté, probablemente, asociado a la inseguridad que poseen los docentes en el dominio de conceptos y procedimientos de esta rama de la Matemática.

Coincidimos con Villella y Steiman en que la falta de interés y motivación en los alumnos es consecuencia de esta situación. (Villella y Steiman, 2004; Villella, 2006)

Marco teórico

Se adoptó el modelo de desarrollo del pensamiento geométrico de Dina y Pierre Van Hiele, el cual propone cinco etapas en el desarrollo del pensamiento geométrico: *reconocimiento, análisis, clasificación, deducción y rigor*. En la etapa de *reconocimiento*, los alumnos usan propiedades imprecisas de las figuras para poder compensarlas, ordenarlas, describirlas o identificarlas; perciben las figuras geométricas en su totalidad, como unidades globales (pueden describir físicamente lo que ven); identifican o describen las figuras apelando a atributos irrelevantes desde el punto estrictamente matemático por ejemplo, color, tamaño, aprenden vocabulario geométrico; identifican formas determinadas y pueden reproducirlas. En la etapa de *análisis* los alumnos descubren que las figuras están formadas por partes y que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes de las figuras y enunciar las propiedades de manera informal, utilizando vocabulario apropiado; pueden clasificar las propiedades en necesarias y suficientes en el momento de usarlas para definir, pueden comparan figuras empleando explícitamente las propiedades, así como deducir propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.

La tercera etapa está deferida a la *clasificación*, en la cual los alumnos comienzan a desarrollar la capacidad de razonamiento matemático, las propiedades pueden deducirse unas de otras aunque todavía no comprenden el significado de la deducción como un todo, ni el papel que en ella juegan los axiomas. En esta etapa se comprenden los pasos individuales de un razonamiento lógico formal, pero no entienden la estructura de una demostración; las demostraciones explicadas por el docente o el libro son seguidas sin dificultad, pero no se logra su organización por parte del alumno. Se usan las representaciones gráficas de las figuras como una forma de verificación de las deducciones más que como un medio para realizarlas.

En la cuarta etapa de *deducción formal*, los alumnos pueden comprender razonamientos lógicos formales, realizar conjeturas e intentan verificarlas deductivamente. Además pueden construir demostraciones y se atreven a realizarlas de distintas maneras, comprenden las interacciones entre las condiciones necesarias y suficientes y distinguen entre una implicación y su recíproca; aceptan definiciones equivalentes del mismo concepto; comprenden la estructura axiomática de la matemática.

En la etapa del *rigor* los alumnos son capaces de prescindir de cualquier soporte concreto para desarrollar la actividad matemática, aceptan la existencia de sistemas axiomáticos y pueden analizarlos y compararlos (Villella, 2001).

Desarrollo

Objetivos:

- Explorar las preconcepciones de los alumnos involucrados en la experiencia sobre conceptos geométricos básicos.
- Implementar una propuesta didáctica que prevea la conceptualización y descubrimiento de las propiedades de los cuadriláteros, a partir de la experimentación, mediante actividades guiadas apoyadas por la utilización de un CAS (Cabri II plus).
- Analizar los avances logrados por los alumnos durante la implementación de la propuesta y al cierre de la misma.

La *población* estuvo formada por alumnos de 14-15 años de edad, de ambos sexos, que cursan sus estudios en el nivel de Escolaridad Secundaria Básica (ESB), en escuelas privadas de la provincia de Buenos Aires. La *muestra* se conformó con dos comisiones de 30 alumnos cada una, aproximadamente, que cursan noveno año en un colegio ubicado en el Partido de Tigre.

En el marco de una *metodología* de investigación acción, se inició la experiencia con un estudio de carácter descriptivo, con el propósito de conocer las características de ambos grupos. El pretest permitió indagar acerca de los conceptos geométricos básicos y emparejar los grupos. Luego la segunda etapa, de tipo explicativo, pretendió dar respuesta a la pregunta sobre si los alumnos comprenden los conceptos referidos a la unidad Cuadriláteros a partir de la aplicación de una propuesta de enseñanza con las características mencionadas en los objetivos, en uno de los grupos, mientras el otro recibió una enseñanza tradicional.

Paradigma: Socio crítico

Alcances de la investigación: descriptivo, explicativo

Diseño: cuasiexperimental con dos grupos: E-O

Descripción de la experiencia

A partir de los resultados del pretest (ver tabla 1) se desarrollaron durante dos semanas las actividades de nivelación. En cada comisión (curso experimental y curso de control) los alumnos trabajaron en pequeños grupos sobre una guía de problemas. Se hizo hincapié en aquellos conceptos, a nuestro juicio, críticos: por haber logrado un valor porcentual mínimo del 30 % en la categoría C, en la competencia respectiva; y por ser un prerrequerido para el desarrollo de la unidad de cuadriláteros. Tal es el caso de reconocimiento de segmentos, identificación y dibujo de la mediatriz de un segmento, reconocimiento de las propiedades de los ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal, etc.

Los resultados del pretest nos permitió ubicar a los alumnos, ambiguamente, entre las etapas de análisis y clasificación, de acuerdo con el modelo de van Hiele, y sobre esta base se planificó el desarrollo de la unidad cuadriláteros de tal modo que los alumnos del grupo experimental pudieran trabajar a partir del concepto de cuadrilátero, diferenciaran entre cóncavo y convexo, para luego comenzar con la conceptualización del cuadrilátero convexo que posee un par de lados opuestos paralelos: el trapecio, así como la deducción de las propiedades referidas al mismo. La figura 1 esquematiza la secuencia seguida hasta converger en el cuadrado.

Cabe observar la importancia de remarcar para cada nuevo cuadrilátero, cuáles son las propiedades heredadas y cuáles las correspondientes a la nueva figura. A modo de ejemplo, al presentar el paralelogramo, dado que se trata de un trapecio que tiene el segundo par de lados opuestos paralelos, éste hereda las propiedades del anterior, esto es: la base media es la semisuma de las bases; pero también hereda las propiedades de un cuadrilátero convexo: la suma de los ángulos interiores es 360º.

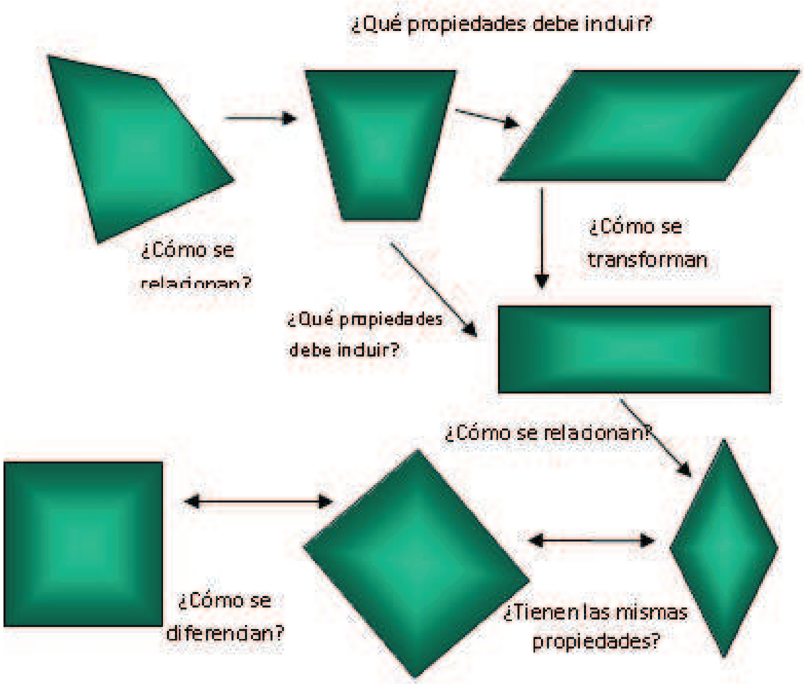

Figura 1

El desarrollo de la experiencia incluyó un importante conjunto de actividades de tal modo que los alumnos tuvieran que experimentar, fundamentalmente construir con el auxilio del CAS, para luego plasmar las conclusiones. A modo de ejemplo se presentan dos actividades que formaron parte de la experiencia.

Actividad 1

Construir, si es posible, el cuadrilátero que se indica. En caso de no ser posible, especificar e incorporar (como dato) un elemento adicional para poder hacerlo.

Datos:

Un par de lados consecutivos y el ángulo comprendido entre ellos

construir:

a) un trapecio b) un trapecio isósceles c)un trapecio rectángulo d)un paralelogramo

Actividad 2 (Para desarrollar con CAS)

Construir el rombo ABCD de tal modo que moviendo el vértice A obtengas otros rombos de lados de igual longitud, pero de distintas diagonales.

a) ¿Cómo es el ángulo que forman las diagonales? ¿permanece constante cuando se mueve el vértice A?

b) ¿En qué se transforma el rombo cuando el ángulo ABC tiende a un recto? ¿Qué sucede en ese momento con las diagonales?

(Se proporciona una figura de análisis que incluye, como datos, las diagonales del rombo y un ángulo interior agudo)

Resultados

La tabla 1 exhibe los valores porcentuales correspondientes al pretest en ambos cursos. Los resultados fueron categorizados en A: posee la competencia, B: posee la competencia con dificultades en la resolución, C: no posee la competencia.

Competencias evaluadas	**Curso experimental**			**Curso control**		
	A	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**
Reconoce segmentos	41,0	15,4	38,5	38,2	20,6	41,2
Identifica la mediatriz de un segmento	17,9	5,1	71,8	11,8	11,8	76,5
Dibuja la mediatriz de un segmento	48,7	0,0	46,2	44,1	2,9	52,9

Reconoce rectas paralelas	82,1	2,6	10,3	85,3	0,0	14,7
Reconoce rectas oblicuas	35,9	46,2	12,8	47,1	32,4	20,6
Dibuja la bisectriz de un ángulo	71,8	10,3	12,8	70,6	11,8	17,6
Reconoce las propiedades de los ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal	84,6	0,0	10,3	64,7	0,0	35,3
Aplica las propiedades de los ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal	10,3	5,1	79,5	5,9	26,5	67,6
Construye triángulos	2,6	7,7	84,6	2,9	8,8	88,2
Clasifica triángulos según sus lados y ángulos	38,5	5,1	48,7	58,8	17,6	23,5
Reconoce las propiedades de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo	17,9	28,2	46,2	26,5	52,9	20,6
Calcula los ángulos interiores y exteriores de un triángulo	2,6	2,6	87,2	8,8	55,9	35,3
Traza las bisectrices de un triángulo	5,1	2,6	84,6	11,8	11,8	76,5
Traza las mediatrices de un triángulo	35,9	0,0	56,4	50,0	2,9	47,1
Traza las medianas de un triángulo	25,6	0,0	66,7	20,6	0,0	79,4
Halla el baricentro de un triángulo	0,0	0,0	92,3	8,8	0,0	91,2
Halla el circuncentro de un triángulo	0,0	0,0	92,3	8,8	0,0	91,2
Halla el incentro de un triángulo	0,0	0,0	92,3	2,9	0,0	97,1
Halla el ortocentro de un triángulo	0,0	0,0	92,3	8,8	0,0	91,2
Identifica la propiedad pitagórica en un triángulo rectángulo	0,0	0,0	92,3	2,9	0,0	97,1
Calcula los lados de un triángulo rectángulo utilizando la propiedad pitagórica	0,0	0,0	91,8	0,0	0,0	100,0
Halla el área y el perímetro de un triángulo rectángulo	0,0	0,0	91,8	0,0	0,0	100,0

Tabla 1

La evaluación de los alumnos tuvo dos instancias, durante el desarrollo de las actividades y al cierre de la experiencia. Por una parte se evaluó el trabajo desarrollado por cada grupo y, por la otra, un examen de carácter individual dónde los alumnos podían hacer uso del mismo software que habían utilizado durante el aprendizaje de la unidad. Los resultados cuantitativos, con idéntica categorización que el pretest, se resumen en la tabla 2.

Competencias evaluadas	**Curso experimental**			**Curso control**		
	A	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**
Reconoce los diferentes cuadriláteros convexos	88,0	12,0	0,0	85,0	10,0	5,0
Identifica las propiedades de los diferentes cuadriláteros convexos	76,0	12,5	11,5	56,4	14,5	29,1
Identifica las propiedades heredadas de cada cuadrilátero	96,0	4,0	0,0	88,0	12,0	0,0
Construye cuadriláteros a partir de sus propiedades	65,5	22,0	12.5	43,5	26,5	30
Aplica las propiedades de los cuadriláteros a la resolución de problemas	45,5	26,0	28,5	36,0	28,0	36,0
Obtiene conclusiones a partir de la experimentación	76,0	24,0	0,0	25,0	26,0	49,0
Propone nuevas construcciones	32,0			10,0		

Tabla 2

Conclusiones

Desde el enfoque cuantitativo, analizando los datos de la tabla 2, se observan mejores resultados obtenidos por el grupo experimental. Cabe señalar que el ambiente de trabajo, dadas las características de cada experiencia, fue diferente. La primera comisión trabajó fundamentalmente en grupo, lo cual contribuyó en la resolución de las actividades propuestas. También, cabe observar, que el CAS utilizado (Cabri II Plus) contribuyó en la obtención de conclusiones. Su utilización facilita el trabajo de experimentación.

Aspectos claves y retos para el futuro

Consideramos que es necesario enfatizar el trabajo con los centros de formación docente, así como, acercar la investigación en Matemática Educativa, de modo que puedan trabajar docentes e investigadores de manera colaborativa y puedan dar respuesta a preguntas tales como:

- Si los libros de texto tradicionales son tan apropiados como quisiéramos que fueran para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría,
- Qué cambios pueden y deben ser hechos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría con el propósito de incrementar el acceso a software, videos, materiales concretos y otros elementos tecnológicos,
- Cuáles son las ventajas que se desprenden del uso de tales herramientas, desde un punto de vista educativo,
- Cuáles problemas y limitaciones pueden surgir del uso de tales herramientas y cómo podrían ser superados.

Referencias bibliográficas

Abraira Fernández, C. (1995). Reflexiones sobre la formación de matemática de los futuros maestros. *Revista Interuniversitaria de formación del profesorado* 24, 143-160

Guzmán, M (1993). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. Extraído el 02/05/08 de: http://www.oei.es/edumat.htm

ICMI (2001), Perspectives en l´Ensenyament de la Geometria pel segle XXI. *Documento de discusión para un estudio ICMI.* PMME-UNISON.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: De las construcciones a las demostraciones.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Villella, J. (2001) *Uno, dos, tres…Geometría otra vez: de la intuición al conocimiento formal en la enseñanza primaria.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Villella, J. , Steiman, J (2004): *Patio, parque y pizarrón. Estrategias para enseñar geometría a chicos de 9 a 14 años.* Montevideo: Espartaco.

Villella, J. (2006) *Ideas para enseñar a través de problemas*. Montevideo: Espartaco-UNSAM.