

MODELACION MATEMATICA EN UN CURSO INTRODUCTORIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ángel Balderas Puga

Universidad Autónoma de Querétaro

balderas@uaq.mx

Campo de investigación: Modelación matemática

México

Nivel: Superior

Resumen. *Se describe el uso intensivo de software CAS en el contexto de un curso introductorio de ecuaciones diferenciales. Se detallan aspectos de cambios en el curriculum y en la metodología de uso del software: estrategias de caja-negra al inicio con el fin de enfatizar aspectos centrales de la modelación matemática y de la teoría de las ecuaciones diferenciales. Se discute sobre la profundidad de análisis de modelos clásicos, la introducción de nuevos problemas, el uso de software para evitar la inversión de grandes cantidades de tiempo en detalles técnicos o en cálculos largos, el diseño y rediseño de materiales y el uso combinado de diferente software.*

Palabras clave: Modelación matemática, ecuaciones diferenciales, tecnología informática

Modelación matemática e informática

Según Colwell (2000), hasta hace poco la ciencia tenía dos componentes, la teoría y la experimentación, pero ahora tiene un tercer componente, la simulación computacional, que relaciona a los otros dos. La Tecnología Informática (TI) no sólo es adecuada para tareas de modelación matemática, al permitir el procesamiento de una gran cantidad de datos, la visualización de resultados y la colaboración con otras personas, sino que, de acuerdo a Bricio (1992), su uso ha introducido un cambio dramático en el esquema clásico de modelación como se puede observar en la siguiente figura. Del modelo matemático se pasa a un modelo computacional que incluye tareas y problemáticas relativas a algoritmos, programación, simulación, etc. Es así como se trabaja en la ciencia y en la ingeniería desde hace unas dos décadas, afirmación de Bricio (1992) luego de consultar a un buen número de ingenieros y matemáticos aplicados, tanto en México como en el extranjero.

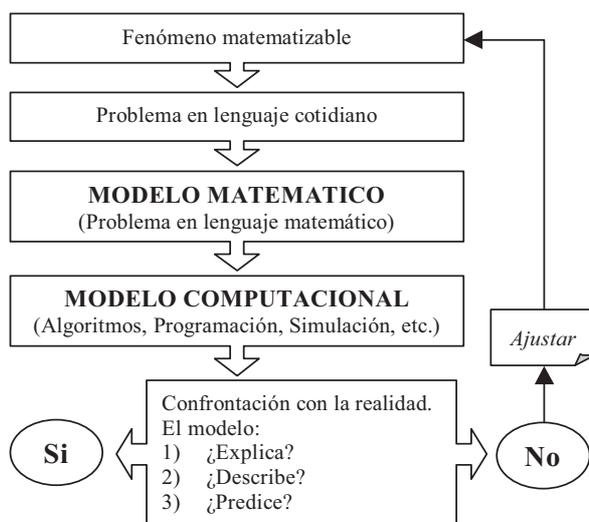


Figura 1: El esquema contemporáneo de la modelación matemática

Estos cambios plantean la necesidad de llevar a las aulas esta forma de trabajo, lo que implica la generación en docentes y alumnos de competencias informáticas adecuadas para reproducir de la mejor manera posible la forma en la que se trabaja en la ciencia hoy en día.

Modelación matemática y ecuaciones diferenciales

El primer problema central de la teoría de las ecuaciones diferenciales (ED) se refiere a su origen y es aquí donde esa teoría se liga a la problemática de la modelación de fenómenos. Después de la construcción del modelo matemático (una ecuación diferencial ordinaria, una ecuación diferencial parcial o un sistema de ED) se resuelve la ecuación o el sistema resultante. Pero ahí no termina el proceso, se debe analizar e interpretar la solución con respecto al fenómeno estudiado y tomar decisiones: ¿el modelo es adecuado o no dentro de la exactitud requerida? Si la respuesta es positiva, el problema está resuelto, si la respuesta es negativa se debe ajustar el modelo y repetir el proceso con el nuevo modelo obtenido.

La implementación del modelo es una tarea que sale ya de las matemáticas y cae en el área del conocimiento que estudia de manera específica el fenómeno modelado.

En Petrovski (1956) se plantea un esquema general de los problemas de la teoría de las ED en una época en la que aún no había una difusión masiva de la TI por lo que se trata de problemáticas

intrínsecas a la teoría. Aunque no se presenta de manera explícita un apartado especial acerca de la modelación, es recurrente la referencia a problemas ligados a ella, ilustrando prácticamente todos los problemas que aparecen en cada una de las etapas del proceso de modelación.

La enseñanza de cualquier rama de las matemáticas debería reflejar una visión global de la teoría que se está estudiando, con las limitaciones naturales de la edad y nivel de los estudiantes. En particular, la enseñanza de las ED debería reflejar puntualmente todas y cada una de las problemáticas centrales de la teoría, pero, pareciera, que en la mayoría de los casos no es así.

Modelación matemática con ecuaciones diferenciales y TI

Gracias a la TI, ahora es posible ilustrar en el aula problemáticas centrales de la modelación matemática con ED. En la última década, ha comenzado a cambiar el panorama de los libros de texto de ED, al incorporar muchos de ellos el uso de TI.

La filosofía que se halla detrás de estas propuestas puede encontrarse en libros como los de Malek-Madani (1998), Coombes, Hunt, Lipsman, Osborn y Stuck (1995), Gray, Mezzino y Pinsky (1997) o Blanchard, Devaney y Hall (1998). Libros como estos se basan en el uso de software tipo CAS (Computer Algebra Systems) como Mathematica o Maple o software de tipo NCS (Numerical Computation Systems) como Matlab o Phaser. Como señalan Coombes et al. (p. iii) «Los cursos introductorios tradicionales de EDO (ED ordinarias) se han concentrado en enseñar un repertorio de técnicas para hallar una fórmula solución de varias clases de ED. Típicamente, el resultado ha sido la aplicación mecánica tanto de fórmulas como de técnicas por parte de los estudiantes sin una comprensión cualitativa seria de aspectos fundamentales de la materia tales como estabilidad, comportamiento asintótico, dependencia de los parámetros y métodos numéricos».

Este es el mismo tipo de crítica que se halla en los otros libros señalados y en artículos en donde se reportan experiencias de uso de TI en cursos de ED, como por ejemplo en Evans (1995) trabajando con el software CAS, Derive o en Shay (1997) usando calculadoras.

Enseñanza y aprendizaje de la modelación con ecuaciones diferenciales y TI

El uso de TI en los cursos de ED permite ofrecer a los alumnos una visión más completa y epistemológica de los problemas de la modelación matemática con ED.

Es posible aumentar el espacio destinado a la modelación. ¿Cómo concebir un curso de ED sin ligarlo a la modelación de procesos físicos? En el caso extremo, se trataría de un curso en el que exclusivamente se enseñaría a resolver ED sin mencionar ni su proveniencia ni la utilidad de haber obtenido la solución. En un curso de este tipo los alumnos estarían imposibilitados de poder dar una interpretación física de la solución, se quedarían con una imagen equivocada de la teoría: una serie de métodos para obtener soluciones de ecuaciones que no tienen ninguna relación con el mundo real.

Es posible discutir algunos ejemplos con el proceso completo de modelación (salvo la implementación del modelo). A pesar de que el proceso de construcción es muy difícil, es posible presentar siempre algunos modelos interesantes así como enseñar a los alumnos a construir modelos sencillos. En muchas ocasiones en los cursos tradicionales nunca se presenta el proceso completo. En el mejor de los casos, se enseña a plantear las ED relativas a algunos modelos sencillos y se obtiene la solución pero no se hace un análisis detallado de la solución, ni se interpreta, mucho menos se valida con respecto al fenómeno que se quería “estudiar”. Es muy difícil apreciar la utilidad de la teoría cuando todos sus problemas terminan una vez que se obtuvo la solución de la ED.

Es posible, en muchos casos, analizar e interpretar la solución. En los cursos tradicionales, por lo general, los problemas terminan cuando se obtiene la solución exacta. Una vez obtenida, se pasa al siguiente ejercicio, se obtiene la solución, luego otro ejercicio, etc. En el mejor de los casos se pide la gráfica de una solución particular y eso sólo en el caso que dicha gráfica no sea demasiado compleja. Petrovski señala que *el estudiar las soluciones es el problema básico* de la teoría, por lo que *no* se trata de un problema menor. No es posible "haber visto aplicaciones" sin haber estudiado el comportamiento de las soluciones.

Es posible, en muchos casos, validar el modelo (es decir, confrontar los datos que ofrece con datos reales). Incluso en caso de no haber construido un modelo, siempre es posible presentar el contexto en el que surge, comparar la solución obtenida con el fenómeno al que hace referencia, simular, analizar los parámetros, etc. En los cursos tradicionales en los que no se estudian las soluciones es imposible llevar a cabo este proceso de validación.

Es posible discutir el ajuste de varios modelos. Esta parte importante del proceso de modelación puede ser ilustrarse con algunos ejemplos, y discutirse con otros. En los cursos tradicionales esta

parte se halla limitada pues la nueva función o las nuevas funciones obtenidas son mucho más complejas de ser analizadas, estudiadas e interpretadas, por lo que en la mayoría de los casos, el maestro renuncia a ilustrar esta parte del proceso.

Es posible hacer predicciones. Una vez que se ha resuelto una ED o un sistema de ED, *debería* usarse dicha solución para hacer algunas predicciones. Esta parte es central para ilustrar el problema de la relatividad del modelo. Mejor si las predicciones se hacen con datos reales y plausibles lo que permite evidenciar o negar la pertinencia de la predicción. En los cursos tradicionales, parte de este proceso se halla en algunos ejemplos pero pareciera que no se le da la importancia adecuada. En algunos casos, el profesor inventa datos *no plausibles* para ciertos parámetros (por ejemplo, en el caso de circuitos eléctricos).

El esquema descrito anteriormente ha sido aplicado por el autor en cursos de ED en los últimos diez años en el Instituto Tecnológico de Querétaro (México) con estudiantes de diferentes ramas de la ingeniería (mecánica, industrial, sistemas computacionales, electrónica, eléctrica, y materiales). La edad promedio de los estudiantes es de 19 años.

El software base utilizado es *Derive* dadas sus características. Es tipo CAS, lo que permite llevar a cabo tareas algebraicas, numéricas y geométricas, es fácilmente accesible, fácil de usar, versátil, buena portabilidad, bajo costo, amplia difusión, escasos requerimientos técnicos y amplias experiencias de su uso a nivel mundial.

En el caso de la modelación también se usa el simulador *Phaser* e incluso el software de visualización *Autograph*. Aquí cabe señalar que la tecnología “papel y lápiz” tiene fuerte limitaciones con respecto a la simulación (baja interactividad, lenta retroalimentación, restricciones operacionales, etc.) y que como se señala en Levy (1997) entre las nuevas modalidades cognitivas abiertas por la cibercultura, la simulación ocupa un lugar central.

Por lo general, el curso introductorio es el único que muchos alumnos seguirán por lo que la visión que tendrán de la teoría será consecuencia sólo de este único curso.

En vez de la secuencia estándar de los cursos tradicionales: técnicas de solución de ED de primer orden y luego aplicaciones; técnicas de solución de ED lineales de segundo orden y

luego aplicaciones; transformada de Laplace y luego aplicaciones, etc., se toma como *eje conductor* del curso a la modelación. Desde el inicio del curso se introduce la problemática completa del proceso de modelación. Se introducen ejemplos con un contexto amplio, se construyen los modelos discutiendo ampliamente hipótesis y elementos involucrados.

Una vez que se tiene la ED se usa el software con una estrategia de caja-negra para hallar la solución sin importar el orden o tipo de ecuación (las técnicas algebraicas de solución simplemente se *posponen* no es que se cancelen del curso).

La solución se analiza y se estudia de manera crítica con software, se simula con ella, se analiza su pertinencia con respecto al fenómeno modelado, en su caso se ajusta el modelo. Por ejemplo, en el caso de poblaciones se pasa del modelo maltusiano al logístico y de éste a modelos de competencia entre especies, al modelo de Gompertz o a otros modelos. En el caso de vibraciones mecánicas se pasa de movimientos armónicos a movimientos libres con fricción y de éstos a movimientos forzados y todo desde el inicio con el fin de que el alumno experimente y viva etapas centrales de la modelación.

Esta estrategia permite poner énfasis en cuestiones centrales de la modelación. Al delegar a una máquina la solución de una ED, obtenemos rápidamente la función solución y podemos hacer un análisis detallado de ella de tal manera que cuando el alumno estudie los métodos de solución tenga ya una idea clara de su utilidad y sus limitaciones.

En los cursos tradicionales esto no es posible ya que, clásicamente, se estudian primero los métodos de solución de ED de primer orden lo que introduce una limitación *artificial* en el proceso de modelación pues se presentan sólo modelos que conducen a ED de este tipo.

La capacitación del alumno en el uso del software se da de manera integrada y no artificial. Es decir, el software se introduce en el momento en que se requiere, con una *estrategia recursiva*: se usa el conocimiento matemático del alumno para capacitarlo en el uso del software, luego se usan sus competencias en el uso del software para generar

conocimiento matemático de más alto nivel, luego se usa este conocimiento para generar más competencias en el uso del software, etc.

A continuación se describe brevemente un ejemplo del esquema propuesto. Se hace hincapié que los alumnos aún no estudian ninguna técnica algebraica de solución.

Ejemplo: modelación de sistemas masa-resorte

Como se sabe, la teoría de las ED nació íntimamente ligada a problemas de la Física. Durante más de 300 años, estos campos del conocimiento han mantenido una estrecha relación: las ED son básicas como lenguaje para enunciar leyes físicas y para modelar problemas. En este contexto, en los cursos tradicionales se presentan los sistemas masa-resorte como una aplicación de las ED de segundo orden por lo que este tipo de problemas *deben* presentarse después de estudiar métodos algebraicos de solución para ecuaciones de primer y segundo orden, típicamente se abordan ecuaciones de la forma

$$mx'' + bx' + kx = 0$$

y más raramente ecuaciones del tipo

$$mx'' + bx' + kx = f(t)$$

este último caso requiere el estudio previo de métodos de solución de ED de segundo orden con coeficientes constantes no homogéneas. Sin embargo, con el uso de software CAS no hay diferencia en la forma en la que se obtiene la solución, la que una vez obtenida se usa para profundizar en el análisis de la situación física, validar el modelo y ajustarlo.

Se parte de la forma tradicional, con un movimiento armónico simple, se ajusta el modelo a un movimiento con fricción, se analizan las distintas posibilidades de este tipo de movimientos y se vuelve a ajustar el modelo para considerar fuerzas externas periódicas.

De esta manera, desde muy temprano en el curso pueden discutirse fenómenos tan importantes como las pulsaciones y la resonancia (véase la figura 2).

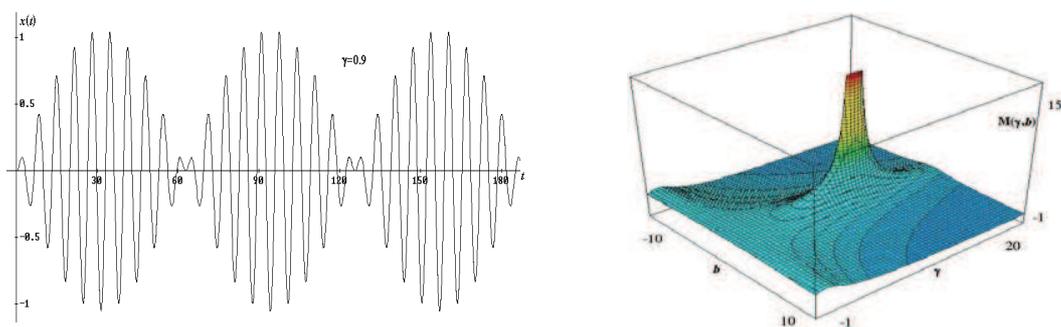


Figura 2: Pulsación y visión tridimensional de la resonancia

Opiniones de los estudiantes

Al final del curso, después de haber entregado calificaciones, se pide a los alumnos una opinión global sobre el mismo con preguntas abiertas, del tipo: ¿cuál es tu opinión sobre contenido y metodología del curso? Estas preguntas tienen como objetivo explorar el territorio de las opiniones de los estudiantes de manera informal. Es interesante observar que sus respuestas reflejan situaciones de las que hablan también profesores e investigadores y muestran una reflexión personal de los estudiantes acerca de sus propias acciones. Estos comentarios sirven también para el rediseño de estrategias de integración de TI. Aquí se presenta sólo una muy breve selección de opiniones que hablan por sí mismas de los aspectos antes discutidos (se respetó la redacción original, los cursivos son nuestros);

“Vi mucha aplicación en la vida real, *siempre nos han enseñado las matemáticas sin ninguna aplicación*. Los contenidos realmente los pudimos aplicar en cosas reales, aplicar software hizo que se utilizaran *problemas más complejos*, pero más apegados a la realidad.” [Rocío]; “Fue muy interesante conocer el significado de las matemáticas, para que sirven y como se emplean. *Yo era de las personas que decían que las matemáticas no sirven de nada* y en verdad fueron muy interesantes las aplicaciones que tienen las matemáticas en la vida.” [Julio César]; “Con el uso de software creo que nos ayudó a aumentar nuestra capacidad en la comprensión de los conceptos y de sus aplicaciones” [Damaris].

Reflexiones finales

Esta forma de trabajo da mayor libertad al docente pues como señalan Coombes et al. (1995) muchas de las ideas de las ED son difíciles de enseñar si no se usa TI. Priorizar la *parte conceptual de la modelación* enfrenta dos obstáculos: para tener la solución hay que resolver la ED con un método previamente estudiado y para analizar la solución se requieren sofisticados instrumentos de análisis geométrico.

Como se ha señalado en varias ocasiones, el uso de software ayuda a desarrollar en los alumnos buenas habilidades en la modelación sin tener que introducir enormes cálculos, puede enriquecerse la solución (Oldknow, 1997) e investigar modelos más complejos de los usuales (Mitic y Thomas, 1994). Como resalta Böhm (1994) los libros de textos presentan sólo modelos sencillos estándar debido al gran número de cálculos que deben hacerse. «La existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hacen posible y necesario reexaminar tanto lo que los estudiantes deben aprender de matemáticas como la forma en la que deben hacerlo» (NCTM, 2000, p.25). Ahora es posible presentar en clase ejemplos más ricos e interesantes o más ligados a las aplicaciones para ilustrar conceptos y técnicas, lo que enriquece también tareas y exámenes y como se muestra en Balderas (2002) el esquema propuesto aquí puede extrapolarse a cursos de Cálculo, incluso a nivel medio superior.

Finalmente, la TI permite un mejor acercamiento histórico-genético conceptual- tanto a la modelación matemática como a la teoría de las ED, discutir con los alumnos el proceso de modelación matemática de una manera más completa e introducir a los estudiantes al trabajo con metodologías contemporáneas que les serán útiles en el futuro.

Referencias bibliográficas

Balderas, A. (2002). Uso di Derive nella modellizzazione matematica: un'alternativa per l'analisi delle popolazioni. *La matematica e la sua didattica* 1, 96-115.

Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G.R. (1998). *Differential Equations*. Pacific Grove: Brooks/Cole Publishing Co.

Böhm J. (1994). Linear programming with DERIVE. *The International DERIVE Journal* 3, 46-72.

- Bricio D. (1992). Ideas sobre el futuro de la Matemática Aplicada. *Reunión Nacional de Matemáticas*, Coahuila, México, 65-89.
- Colwell R. (2000). Information technology Ariadne's thread through the research and education labyrinth. *EDUCAUSE review*, May/June 2000, 15-18.
- Coombes, K.R., Hunt, B.R., Lipsman, R.L., Osborn, J.E. y Stuck, G.J. (1995). *Differential Equations with Mathematica*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Evans B. (1995). Differential equations in a computer classroom. *The International DERIVE Journal* 3, 37-54.
- Gray A., Mezzino M. y Pinsky M.A. (1997). *Introduction to Ordinary Differential Equations with Mathematica*. New York: Springer-Verlag.
- Levy P. (1997). *Cyberculture. Rapport au Conseil de l'Europe*. Paris: Éditions Odile Jacob.
- Malek-Madani R. (1998). *Advanced engineering mathematics*. Reading MA: Addison-Wesley.
- Mitic P. y Thomas P. (1994). Modelling the Effects of a Firebreak with Derive. *The International DERIVE Journal* 2, 71-87.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Oldknow A. (1997). Modelling a Garden Sprinkler. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 3, 253-271.
- Petrovski I.G. (1956). Ecuaciones diferenciales ordinarias. En Aleksandrov A.D., Kolmogorov A.N. y Laurentiev M.A. (Eds), *Mathematics: Its content, methods and meaning*. Cambridge: MIT Press.
- Shay K. (1997). The TI-92: An Excellent Companion for Differential Equations Reform. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 1, 99-109.