PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CORRIENTES A TRAVÉS DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN UTILIZANDO VALORES Y VECTORES PROPIOS

Pedro Castañeda Porras, Arely Quintero Silverio, Eugenio Hernández Vargas
Universidad de Pinar del Río "Hermanos Saíz Montes de Oca" Cuba
pcasta@mat.upr.edu.cu, arelys@mat.upr.edu.cu, eugenio@mat.upr.edu.cu
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *La resolución de problemas es un aspecto importante en el aprendizaje de la Matemática. Es esencial que se tracen estrategias de trabajo que garanticen de forma eficiente las posibilidades que tiene la Matemática en la formación del estudiante para conseguir resolver con éxito los problemas a que se enfrenta. Coincidimos con (Delgado, 1998, p.69), cuando considera la resolución de problemas como una habilidad matemática y señala que resolver: ¨es encontrar un método o vía de solución que conduzca a la solución de un problema¨. En el trabajo abordaremos una experiencia sobre la resolución de problemas de corrientes en las redes eléctricas que nos inducen a la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales (SED) utilizando el método matricial. Se propone una metodología para la solución de estos SED mediante los valores y vectores propios, auxiliándonos del Asistente Matemático DERIVE.*
Palabras claves: Vectores propios, sistemas ecuaciones diferenciales

Introducción

El perfeccionamiento de los planes de estudio en las diferentes carreras nos exige trabajar aún más en la relación entre las asignaturas de la disciplina Matemática y otras disciplinas de la carrera: Circuito, para poder enfrentar y resolver los problemas de carácter profesional. En la carrera de Telecomunicaciones y Electrónica es una necesidad la vinculación del Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales y Circuitos Eléctricos en la resolución de problemas circuitales que conducen a sistemas de ecuaciones diferenciales. Por lo que compartimos el criterio de (Judson, T. 1997) donde plantea que es importante propiciar la transferencia de estos conocimientos a situaciones relacionadas con áreas de interés del estudiante para que pueda utilizarlos en la solución de problemas que se le presenten durante el ejercicio de su profesión.

Hasta este momento los estudiantes habían tratado las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de forma individual, pero en la práctica se necesita más de una Ecuación Diferencial para formular matemáticamente situaciones físicas a las cuales ellos se enfrentan.

Hay que centrar la atención en enseñar a resolver los problemas que involucren ecuaciones diferenciales. Todo el proceso está basado en el aprendizaje significativo, que es quien sustenta la resolución de problemas. Como dijera (Vázquez-Reyna, M.2009): y según Ausubel "El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente".

Este trabajo es resultado de la implementación del plan de estudio D en el segundo año de la carrera de ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica, dentro del sistema educacional cubano. El propósito del mismo es proponer una metodología de resolución de problemas de circuitos eléctricos a través de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales de primer orden utilizando los conceptos de valores y vectores propios, del Algebra Lineal, con el apoyo de un Asistente Matemático.

A continuación exponemos algunas ideas básicas y la metodología de cómo resolver estos SED.

IDEAS BÁSICAS.

Si X, A(t) y F(t) denotan, respectivamente, las matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \; A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \; a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) \;\; a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ . \qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad . \\ a_{n1}(t) \;\; a_{n2}(t) \quad a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \; F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

entonces el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{11}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
&\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{11}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_2(t) \\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1) \\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad . \\
&\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n1}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned}$$

puede ser escrito como,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \quad a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (2) \qquad ,$$

o simplemente $\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t)$. (3), si el sistema es homogéneo, (3) se convierte en

$\frac{dX}{dt} = A(t)X$.(4)

Definición*:* Un vector solución en un intervalo I es cualquier matriz columna $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ cuyos elementos son funciones diferenciables, y tal que satisface el sistema (3) en el intervalo.

Teorema

Sea X1, X2, . . . , Xk un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo (4) en un intervalo I y sea Xp cualquier vector solución del sistema no homogéneo (3) en el mismo intervalo. Entonces X= c1X1+c2 X2 + . . . + ckXk +Xp también es una solución del sistema no homogéneo en el intervalo, cualquiera que sean las constante c1, c2, . . . , ck.

A continuación daremos una metodología o secuencia para aplicar el método de coeficientes indeterminados a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Metodología

Solución del sistema homogéneo. (X_c)

- Conformar la Matriz asociada del sistema homogéneo.

- Plantear la ecuación matricial.
- Obtener la ecuación característica.
- Hallar lo valores y vectores propios.
- Plantear la solución general del sistema homogéneo.

Encontrar un vector solución X_p del sistema no homogéneo.

- Proponer una solución particular de la parte no homogénea.
- Ajustar correctamente tal propuesta.
- Utilizar el método de los coeficientes indeterminados.
- Y plantear $\boldsymbol{X = X_c + X_p}$.

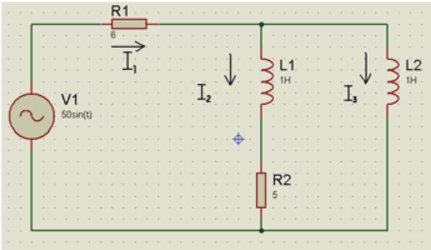
Problema:

Este problema, junto a otros, se presenta para el desarrollo de un seminario de la asignatura de Series y Ecuaciones Diferenciales, cuando se imparte el tema de Ecuaciones Diferenciales a estudiantes de segundo año de la carrera de ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica. Se organiza el trabajo por equipos, donde éstos reciben las orientaciones de forma anticipada y van al aula a exponer los resultados, que son analizados y evaluados por el grupo de conjunto con el profesor. En este proceso se puede observar que todo el trabajo matricial en la secuencia metodológica seguida para resolver el problema, se realiza con la ayuda del Asistente Matemático DERIVE, esta es otra forma de articular con el uso de las nuevas tecnologías.

Planteamiento

Determine las características volt-ampéricas de los elementos del siguiente circuito. Dados los valores $R_1 = 6\,ohm,\ R_2 = 5\,ohm, L_1 = 1H,\ L_2 = 1H\ , V = 50\sin t\ V$

Con las condiciones iniciales: $i_2(0) = 0,\ i_3(0) = 0$



FORMULACIÓN MATEMÁTICA

$$\frac{di_2}{dt} = -11i_2 - 6i_3 + 50\sin t$$

$$\frac{di_3}{dt} = -6i_2 - 6i_3 + 50\sin t$$

i — i ⊥ i

$$\frac{d}{di}\begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 \cdot \mathrm{SIN}(t) \\ 50 \cdot \mathrm{SIN}(t) \end{bmatrix}$$

MATRIZ ASOSCIADA AL SISTEMA HOMOGÉNEO

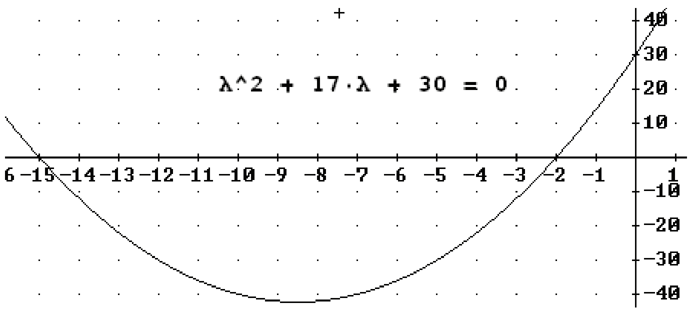
$$M := \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} -11 - \lambda & -6 \\ -6 & -6 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 17 \cdot \lambda + 30 = 0$$

$$\mathrm{SOLVE}(\lambda^2 + 17 \cdot \lambda + 30 = 0, \lambda, \mathrm{Real})$$

$$\lambda = -15 \vee \lambda = -2$$



Es interesante ver en esta experiencia docente cómo los estudiantes tienen que retomar contenidos ya estudiados en el curso anterior para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Según (Maldonado, M. A. 2009) de acuerdo al aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos; pero también es necesario que el alumno se interese por aprender lo que se le está mostrando.

Vectores propios correspondientes a los valores propios

$\lambda = -15 \; y$
$\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot t - 6 \cdot v = 0 \\ 9 \cdot v - 6 \cdot t = 0 \end{bmatrix}$$

```
SOLVE([4·t - 6·v = 0, 9·v - 6·t = 0], [t, v])
```

$$[2 \cdot t - 3 \cdot v = 0]$$

```
SOLVE([2·t - 3·v = 0], v, Real)
```

$$\left[v = \frac{2 \cdot t}{3}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -9 \cdot t - 6 \cdot v = 0 \\ -6 \cdot t - 4 \cdot v = 0 \end{bmatrix}$$

```
SOLVE([- 9·t - 6·v = 0, - 6·t - 4·v = 0], [t, v])
SOLVE(SOLVE([- 9·t - 6·v = 0, - 6·t - 4·v = 0], [t, v]), v, Real)
```

$$\left[v = -\frac{3 \cdot t}{2}\right]$$

Como la matriz de los coeficientes M es de 2x2 y dado que se han obtenido dos soluciones linealmente independientes, concluimos que la solución general del sistema homogéneo es:

$$i_h = e \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \hat{e}^{-2 \cdot t} + f \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \hat{e}^{-15 \cdot t}$$

Veremos también algunos ficheros para calcular los valores propios y vectores propios correspondientes, con el uso del DERIVE, donde se darán cuenta que es más práctico y rápido.

$$M := \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

```
EIGENVALUES(M, λ)
[-2, -15]
EXACT_EIGENVECTOR(M, -2)
```

$$\left[\left[@1,\ -\frac{3\cdot @1}{2}\right]\right]$$

```
EXACT_EIGENVECTOR(M, -15)
```

$$\left[\left[@2,\ \frac{2\cdot @2}{3}\right]\right]$$

Como F(t) se puede expresar de la siguiente manera:

$F(t)=\begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix}\sin t$, intentaremos encontrar una solución particular que tenga la forma:

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema de redes se obtienen las soluciones particulares siguientes:

$$i_2 = -\frac{20\cdot \hat{e}^{-2\cdot t}}{13} + \frac{375\cdot \hat{e}^{-15\cdot t}}{1469} + \frac{145\cdot \mathrm{COS}(t)}{113} + \frac{85\cdot \mathrm{SIN}(t)}{113}$$

$$i_3 = \frac{30\cdot \hat{e}^{-2\cdot t}}{13} + \frac{250\cdot \hat{e}^{-15\cdot t}}{1469} - \frac{280\cdot \mathrm{COS}(t)}{113} + \frac{810\cdot \mathrm{SIN}(t)}{113}$$

$$i_1 = \frac{10\cdot \hat{e}^{-2\cdot t}}{13} + \frac{625\cdot \hat{e}^{-15\cdot t}}{1469} - \frac{135\cdot \mathrm{COS}(t)}{113} + \frac{895\cdot \mathrm{SIN}(t)}{113}$$

Una vez obtenidas las características volt-ampéricas de los elementos del circuito planteado los estudiantes demuestran, a través del aprendizaje significativo y mediante la articulación interdisciplinaria, estar mejor preparados para enfrentar problemas relacionados con su perfil profesional.

Conclusiones

En la experiencia que acabamos de exponer se ha explicado cómo utilizar los conceptos del Álgebra Lineal en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. En la misma los estudiantes se sienten motivados desde el momento que tienen que retomar los contenidos de valores y vectores propios, lo sienten como algo que no dieron en vano en el curso anterior y por ende reafirman y guardan a largo plazo lo estudiado en su memoria. El Aprendizaje Significativo conduce al alumno a este resultado y lo ayuda a que vaya construyendo sus propios esquemas de conocimiento para una mejor comprensión de los conceptos. También el uso del asistente matemático les facilita el trabajo algebraico, que en ocasiones es engorroso, permitiéndonos defender la idea sobre el rol que deben cumplir las TICs en los procesos formativos.

Referencias bibliográficas

Delgado, R. (1998): *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: dos aspectos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del contenido y el desarrollo de habilidades generales matemáticas*. Tesis de doctorado no publicada, ISPJAE. La Habana, Cuba.

Judson, T. (1997). *University Mathematics Education in the United States.* Recuperado el 7 de julio de 2003 de: http://skk.math.hc.keio.ac.jp/mathsoc/rep97/etrang/judson/node14.html

Maldonado, M. A. *El aprendizaje significativo de David Paul Ausubel*. Recuperado el 29 de agosto de 2009, de www.monografias.com/trabajos10/dapa/dapa.shtml#teo

Vázquez-Reyna, M. *El aprendizaje significativo.* Recuperado el 16 de junio de 2009 de www.consumer.es/web/es/educacion/extraescolar/2009/06/16/185986.php.