# LA ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL –UNA SECUENCIA POSIBLE–

Ethel Barrio
Instituto de Formación Docente IFD No. 12 Argentina
ethel.barrio@gmail.com

**Resumen**. La incorporación de tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el aula genera nuevas oportunidades de estudio, de trabajo, y por supuesto, de nuevas formas de enseñar y aprender. Presentamos en este escrito una propuesta que se implementó en el aula con estudiantes del tercer año de la carrera del Profesorado de Enseñanza Primaria. Se ha seleccionado para esta secuencia un conjunto de problemas que pueden ser modelizados por una ecuación diofántica lineal del tipo $ax + by = c$ con a, b y c pertenecientes a Z para que los estudiantes puedan experimentar el "hacer matemática" con TIC. Iniciar el trabajo matemático de esta manera implica proponer un modo particular de hacer y producir conocimiento. De este modo, las tecnologías permitirán que en las clases se logre experimentar sobre búsqueda de regularidades, patrones, y comportamientos de los objetos matemáticos, conjeturando sobre ellos e iniciándose en un camino de argumentaciones tendientes a la demostración.

**Palabras clave**: variable, generalización, TIC, ecuación diofántica lineal

**Abstract**. The incorporation of information technology and communication (ICT) in the classroom creates new opportunities to study, work, and of course, new forms of teaching and learning. We present in this paper a proposal that was implemented in the classroom with students of the third year of the course of primary school teachers. It has been selected for this sequence a set of problems that can be modeled by a linear Diophantine equation of the type $ax + by = c$ with a, b and c belonging to Z so that students can experience the "doing math" with ICT. Sign mathematical work in this way, involves a particular way of making and producing knowledge. Thus, the technologies allow in classes experimenting on finding regularities, patterns, and behaviors of mathematical objects, speculating about them and starting on a journey of arguments aimed at the demostration.

**Key words**: variable- generalization – ICT - linear diophantine equation

## Introducción

Actualmente, el rol docente tiene otro gran desafío con la implementación en las aulas de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC). La mayoría de los docentes en ejercicio hemos realizado nuestros estudios de grado cuando todavía no estaban incorporadas las TIC en las universidades, o en los planes de estudio. Consideramos que, para que la educación pueda explotar al máximo los beneficios de las TIC en el proceso de aprendizaje, es esencial que tanto los futuros docentes como los docentes en actividad podamos hacer uso de estas herramientas.

Son muchos los trabajos referentes a la introducción de las tecnologías en la educación. Compartimos las ideas de Artigue (2004), referidas al tema de la inclusión de las TIC:

> Ciertamente estas tecnologías son socialmente y científicamente legítimas, pero a nivel de la escuela, esas legitimidades no son suficientes para asegurar la integración. Pues no se busca que la enseñanza forme alumnos aptos para

> funcionar matemáticamente con esas herramientas –lo que sería el caso por ejemplo de una formación de carácter profesional–: se busca mucho más. Efectivamente, lo que se espera de esas herramientas esencialmente es que permitan aprender más rápidamente, mejor, de manera más motivante, una matemática cuyos valores son pensados independientemente de esas herramientas. Lo que se necesita entonces es asegurar la legitimidad pedagógica de estas herramientas, y eso es bien distante de asegurar su legitimidad científica o social. Esto, como hemos mostrado, genera un círculo vicioso que enferma la formación en un esquema de militancia y proselitismo, poco adecuado para otorgar herramientas a los docentes que les permitan hacer frente a las dificultades que inevitablemente van a encontrar, que les permitan identificar las necesidades matemáticas y técnicas de las génesis instrumentales y de responderlas eficazmente; poco adecuado también para permitirles la necesaria superación de una visión ingenua de la tecnología como remedio a las dificultades de la enseñanza.

Esto nos lleva a pensar el tema de la inclusión de las TIC con suma atención y cuidado, sin creer que son la panacea o la solución a la complejidad e infinidad de problemáticas que conlleva el aprendizaje de la matemática.

Las instituciones de formación docente, hoy se enfrentan al desafío de capacitar a la nueva generación para incorporar en sus clases las nuevas herramientas de aprendizaje; es decir, proveer a sus estudiantes las herramientas y conocimientos necesarios para el siglo XXI. Esta tarea supone por un lado, la adquisición de nuevos recursos y habilidades y, por otro lado, una cuidadosa planificación.

Pensando en esta planificación, es propósito de esta secuencia que los futuros docentes construyan criterios y adquieran herramientas que les permitan gestionar una clase de matemática. Lo que cambia con la tecnología es el conjunto de problemas entre los que se puede escoger y la forma en que se pueden presentar. El uso de la tecnología tiene que ver con la representación dinámica que muestra la pantalla, sobre la cual se pueden hacer visualizaciones concretas acerca de la exploración de posibles resultados y que con el solo uso de lápiz y papel esto era casi imposible de realizar. Así, la tecnología es una estructura representacional que amplía las posibilidades del pensamiento humano (Kaput, 1994). En este sentido, el propósito de las herramientas tecnológicas es desarrollar habilidades y destrezas en los estudiantes al manipular objetos matemáticos en los procesos de resolución de problemas (Moreno, 2005).

Además, si las clases de matemática son planificadas con la concepción que los conocimientos matemáticos han sido elaborados por la cultura, un desafío consiste entonces en desplegar diversas propuestas que permitan a los futuros docentes aprender matemática *haciendo matemática*. Por ello, se ha seleccionado para esta secuencia un conjunto de problemas que pueden ser modelizados por una ecuación diofántica lineal (EDL) del tipo $ax + by = c$ con $a$, $b$ y $c$ pertenecientes a Z para que los estudiantes puedan experimentar el "hacer matemática" con TIC. Iniciar el trabajo matemático con los estudiantes de esta manera implica proponer un modo particular de hacer y producir conocimiento. De este modo, las tecnologías permitirán que en las clases se logre experimentar sobre búsqueda de regularidades, patrones, y comportamientos de los objetos matemáticos, conjeturando sobre ellos e iniciándose en un camino de argumentaciones tendientes a la demostración.

Partimos de la idea de que los objetos matemáticos son por naturaleza abstractos y que debemos atender a su complejidad. Para llevar a cabo esta tarea proponemos una secuencia didáctica donde presentamos a nuestros estudiantes un conjunto de problemas modelizables mediante EDL. Estas situaciones favorecen, entre otras cosas, la construcción de las nociones de variable y generalización y ponen a los estudiantes en mejores condiciones para abordar lo algebraico.

El uso del software de aplicación, planilla de cálculo electrónica, como recurso para esta secuencia, exige que el estudiante entienda la estructura del problema que se le propone, y en función de eso hacer las manipulaciones con el programa para responder a las cuestiones que se le plantean. A través del uso de una tabla se pueden visualizar las relaciones entre las variables de los problemas presentados en la secuencia.

## Marcos teóricos

A partir de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1993), se analizan las representaciones puestas en juego al resolver problemas de EDL, las funciones que cumplen estas representaciones y las posibles conversiones de registro que surjan.

Considerando la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990), se analizan los conocimientos puestos en acto y los esquemas movilizados al resolver problemas de EDL.

Atendiendo a la Epistemografía de Drouhard -en Barrio, Lalanne y Petich (2010)- se identifican los conocimientos de naturaleza diferente que se ponen en juego en la actividad matemática con los problemas modelizables mediante EDL.

## Implementación

La siguiente propuesta didáctica se pensó para ser implementada en el aula con estudiantes del tercer año de la carrera del Profesorado de Enseñanza Primaria del Instituto de Formación Docente N°12 de la ciudad de Neuquén –Argentina-. El espacio de problemas involucra simultáneamente estructuras aditivas y multiplicativas en forma conjunta, que pueden modelizarse mediante ecuaciones de solución entera, del tipo $ax + by = c$ con $a, b, c \in$ Z. En esta secuencia sólo consideraremos la EDL en dos variables.

La elaboración de esta secuencia de problemas se orienta hacia la posibilidad de generar las condiciones para que los estudiantes participen en la resolución de problemas, valorando el intercambio, la discusión, el análisis de los aciertos y los errores como parte del proceso de resolución y utilicen como herramienta la planilla de cálculo electrónica para resolverlos.

Los contenidos matemáticos que se trabajan son los siguientes: estructuras aditivas y multiplicativas en forma simultánea, ecuación diofántica lineal, noción de variable y de generalización. Asimismo, la elaboración y validación de conjeturas constituyen un tópico central de la propuesta.

Los saberes previos requeridos son el manejo básico de la planilla de cálculo electrónica, los números naturales, las operaciones básicas, conceptos básicos de divisibilidad y la combinación aditiva y multiplicativa en N.

### *Secuencia de actividades*

A continuación se detallan las actividades trabajadas y el análisis de las producciones de los estudiantes.

### *Actividad 1*

La docente entrega a los estudiantes el enunciado del siguiente problema con el propósito de iniciarlos en la resolución de situaciones problemáticas que puedan ser modelizadas mediante una EDL e integrar la planilla de cálculo en la resolución: *Pedro construye una pared rectangular con 6 ladrillos en la base. Juan construye otra pared rectangular con 8 ladrillos en la base. ¿Cuántas filas de ladrillos puede tener cada pared si entre las dos paredes se utilizan 60 ladrillos?*

Tal como se anticipó en el análisis a priori, los estudiantes encontraron sin dificultad, con lápiz y papel, los pares solución (2; 6) y (6; 3), relacionando los múltiplos de 6 y los múltiplos de 8 y analizando cuáles de estas sumas daban 60. En este caso utilizaron procedimientos aritméticos basados en el concepto de covarianza. El par solución (10; 0) no lo consideraron porque, en el contexto del problema, dice que entre las dos paredes deben tener 60 ladrillos. La Tabla 1 hace referencia a lo descripto anteriormente.

Portapapeles | Fuente | Alineación

E10 $f_x$ =B10+D10

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 1 | 8 | 14 | |
| 2 | 2 | 12 | 2 | 16 | 28 | |
| 3 | 3 | 18 | 3 | 24 | 42 | |
| 4 | 4 | 24 | 4 | 32 | 56 | |
| 5 | 5 | 30 | 5 | 40 | 70 | |
| 6 | 5 | 30 | 4 | 32 | 62 | |
| 7 | 4 | 24 | 6 | 48 | 72 | |
| 8 | 4 | 24 | 5 | 40 | 64 | |
| 9 | 6 | 36 | 4 | 32 | 68 | |
| 10 | 6 | 36 | 3 | 24 | 60 | |
| 11 | 2 | 12 | 5 | 40 | 52 | |
| 12 | 2 | 12 | 6 | 48 | 60 | |
| 13 | | | | | | |
| 14 | | | | | | |

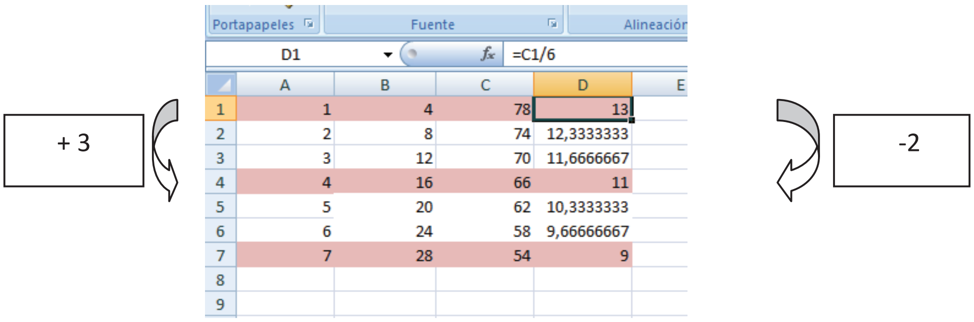
Tabla 1: Procedimiento aritmético basado en el concepto de covarianza.

Al trabajar con el programa la dificultad que se les presenta es, por un lado el armado de la fórmula, y por otro lado ver qué es fijo y qué es variable; es decir, realizan una inversión entre coeficientes y variables. Si bien 2x6 = 6x2, en un miembro de la igualdad interpretamos 2 filas de 6 ladrillos cada una y en la otra se interpreta 6 filas de 2 ladrillos cada una. Otras dificultades que se presentan es expresar la respuesta del problema como par ordenado, o dar la respuesta como cantidad de ladrillos de la pared y no como cantidad de filas.

Considerando como variable didáctica los números que intervienen en el enunciado del problema de Pedro y Juan y con la intención de "pasar de nuevo" por la actividad se les presentó luego el siguiente problema: *Pedro construye una pared rectangular con 4 ladrillos en la base. Juan construye otra pared rectangular con 6 ladrillos en la base. ¿Cuántas filas de ladrillos puede tener cada pared si entre las dos paredes se utilizan 82 ladrillos?*

Al modificar los valores del enunciado, ninguna variable toma el valor cero como solución y la cantidad de soluciones es mucho mayor (tiene siete pares solución). La idea fue hacer evolucionar los comportamientos de los estudiantes luego de un análisis de lo sucedido en la primera instancia. Esto permitió ajustar los procedimientos o encontrar estrategias de resolución que anteriormente no estaban disponibles. Por ejemplo, construyeron una tabla que restaba a 82 los múltiplos de 6 y analizaron cuáles de estos resultados eran múltiplos de 4. En este caso utilizaron procedimientos aritméticos basados en el concepto de dependencia.

Siguiendo este procedimiento de dependencia la planilla de cálculo, una vez introducidas las fórmulas, juega un papel importante. Con mucha rapidez se puede saber qué pares son solución del problema, y no solo esto. Si analizamos la Tabla 2, se observa una regularidad en los pares solución: a medida que las filas de la pared de Pedro aumenta de tres en tres, las filas de la pared de Juan disminuyen de dos en dos.




| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 78 | 13 | |
| 2 | 2 | 8 | 74 | 12,3333333 | |
| 3 | 3 | 12 | 70 | 11,6666667 | |
| 4 | 4 | 16 | 66 | 11 | |
| 5 | 5 | 20 | 62 | 10,3333333 | |
| 6 | 6 | 24 | 58 | 9,66666667 | |
| 7 | 7 | 28 | 54 | 9 | |
| 8 | | | | | |
| 9 | | | | | |

Tabla 2: Procedimiento de dependencia.

Además, la planilla de cálculo juega un rol importante en la resolución de este problema y en la interpretación de los datos numéricos que se van obteniendo. Los estudiantes valoraron a la planilla de cálculo como una herramienta que permite resolver problemas matemáticos complejos de manera sencilla. Para problemas con varias soluciones poder pensar en una tabla organizada permite encontrar la regularidad y de esta manera se aseguran, de algún modo, que están dando todos los pares solución dentro del contexto del problema.

### *Actividad 2*

En esta clase los alumnos ya estaban familiarizados tanto con los problemas para los cuales las EDL es un recurso adecuado como con el uso de la planilla de cálculo.

En el análisis a priori resultó interesante mantener el contexto del problema de inicio; es decir, no introducir variaciones numéricas con respecto a los coeficientes pero sí realizar una variación estructural ya que el problema que se les presentó responde a la ecuación del tipo $ax - by = c$ .Se les presentó el siguiente problema: *Pedro construye una pared rectangular con 6 ladrillos en la base. Juan construye otra pared rectangular con 8 ladrillos en la base. ¿Cuántas filas de ladrillos puede tener cada pared si la de Pedro tiene 40 ladrillos más que la de Juan?*

En este caso nuevamente están utilizando procedimientos aritméticos basados en el concepto de covarianza. A partir de la Tabla 3 y considerando valores organizados pudieron conjeturar que el número de filas de la pared de Pedro aumenta de 4 en 4 y la de Juan de 3 en 3. A diferencia del problema anterior en este caso las dos variables aumentan y de este modo se pueden obtener infinitas soluciones al encontrar la regularidad.

E5 $f_x$ =B5-D5

secuencia de problemas EDL [Modo de compatibilidad]

+4 +3

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Fila de Pedro | Pared de Pedro | Filas de Juan | Pared de Juan | Diferencia de 40 |
| 2 | 1 | 6 | 2 | 16 | -10 |
| 3 | 5 | 30 | 1 | 8 | 22 |
| 4 | 6 | 36 | 1 | 8 | 28 |
| 5 | 8 | 48 | 1 | 8 | 40 |
| 6 | 9 | 54 | 1 | 8 | 46 |
| 7 | 10 | 60 | 2 | 16 | 44 |
| 8 | 11 | 66 | 3 | 24 | 42 |
| 9 | 12 | 72 | 4 | 32 | 40 |
| 10 | 13 | 78 | 5 | 40 | 38 |
| 11 | 14 | 84 | 5 | 40 | 44 |
| 12 | 15 | 90 | 6 | 48 | 42 |
| 13 | 16 | 96 | 7 | 56 | 40 |
| 14 | 17 | 102 | 8 | 64 | 38 |
| 15 | 18 | 108 | 9 | 72 | 36 |
| 16 | 19 | 114 | 10 | 80 | 34 |
| 17 | 20 | 120 | 10 | 80 | 40 |
| 18 | 21 | 126 | 11 | 88 | 38 |
| 19 | 22 | 132 | 12 | 96 | 36 |

Hoja1 Hoja2 Hoja3 Hoja4 Hoja5 Hoja6 Hoja7 Hoja8

Tabla 3: Procedimiento de covarianza que permite hallar la regularidad

Otro grupo de estudiantes, valiéndose de procedimientos aritméticos basados en el concepto de dependencia construyeron la Tabla 4 que restaba a 40 los múltiplos de 6 para verificar en qué casos la diferencia era múltiplo de 8. Un alumno sugirió empezar la tabla desde el 42 ya que la pared de Pedro debe tener más de 40 ladrillos.

B7 $f_x$ =A7*6

secuencia de problemas EDL [Modo de compatibilidad]

+4 +3

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Fila de Pedro | Pared de Pedro | Pared de Pedro - 40 | Fila de Juan | |
| 2 | 7 | 42 | 2 | 0,25 | NO |
| 3 | 8 | 48 | 8 | 1 | SI |
| 4 | 9 | 54 | 14 | 1,75 | NO |
| 5 | 10 | 60 | 20 | 2,5 | NO |
| 6 | 11 | 66 | 26 | 3,25 | NO |
| 7 | 12 | 72 | 32 | 4 | SI |
| 8 | 13 | 78 | 38 | 4,75 | NO |
| 9 | 14 | 84 | 44 | 5,5 | NO |
| 10 | 15 | 90 | 50 | 6,25 | NO |
| 11 | 16 | 96 | 56 | 7 | SI |
| 12 | 17 | 102 | 62 | 7,75 | NO |
| 13 | 18 | 108 | 68 | 8,5 | NO |
| 14 | 19 | 114 | 74 | 9,25 | NO |
| 15 | 20 | 120 | 80 | 10 | SI |
| 16 | 21 | 126 | 86 | 10,75 | NO |
| 17 | ..... | | | ....... | |
| 18 | | | | | |
| 19 | | | | | |

Hoja1 Hoja2 Hoja3 Hoja4 Hoja5 Hoja6 Hoja7 Hoja8

Tabla 4: Procedimiento de dependencia que permite hallar la regularidad.

La dificultad que se presentó en esta clase fue expresar la regularidad del problema ya que tiene infinitas soluciones.

Luego se preguntó qué analogías y qué diferencias se ven entre los problemas trabajados y con la idea de llegar al modelo matemático. Se institucionalizó lo siguiente:

*El mismo tipo de expresión modeliza ambos problemas: ax ± by=c. A este objeto algebraico definido en N se lo llama ecuación diofántica lineal. En ambos problemas hay variables y éstas varían de acuerdo a una determinada relación. En el primer problema, que responde al modelo ax + by=c, a* *medida que una variable aumenta, la otra disminuye y la cantidad de pares solución es finita dentro del contexto del problema. En el segundo problema, que responde al modelo ax – by =c, ambas variables aumentan o disminuyen simultáneamente. Si se encuentra una solución y se descubre la regularidad se pueden generar otros pares solución. Para resolver ambos problemas se debe encontrar una manera de expresar todos los pares solución:*

- *en los problemas de suma, pueden mencionarse todos los pares solución (cabe aclarar que si los pares son muchos, es conveniente plantear la regularidad),*
- *en los problemas de resta, es necesario plantear la regularidad correspondiente.*

## A modo de cierre

Las hojas de cálculo constituyen un puente ideal entre la aritmética y el álgebra y, al implementar la secuencia se desprende que los estudiantes se mueven libremente entre dos mundos. Los estudiantes buscan esquemas, construyen expresiones algebraicas, generalizan, justifican conjeturas y establecen regularidades.

Además, la cantidad de preguntas que el profesor pueden generar a partir de cada problema, precisa que el estudiante construya y analice una larga lista de números, interprete las respuestas correspondientes entre los datos resultantes, generalice y explique esquemas.

## Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2004), *Problemas y desafíos en educación matemática: qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática*, Université Paris 7 Denis Diderot, presentado para publicación a Educación Matemática, Editorial Santillana.

Barrio, E., Lalanne y L. Petich, A. (2010). *Entre aritmética y álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario.* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5* (pp. 37-65). IREM, de Strasbourg.

Kaput, J. (1994). *Democratizing access to calculus: New routes to old roots. Mathematics and cognitive science.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Moreno, M (2005). *El papel de la didáctica de la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros*. España: Departamento de Matemáticas (UdL).

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques 10*, 2-3.