Conocimiento Numérico y Formacion del Profesorado

Luis Rico Romero

Lección Inaugural. Curso 1995 - 96

Universidad de Granada

Excmo. Sr. Rector Magnífico
Claustro de la Universidad de Granada
Excmas e Ilmas Autoridades
Señoras y señores

"*Hay quienes no pueden imaginar un mundo sin pájaros; hay quienes no pueden imaginar un mundo sin agua; en lo que a mi se refiere, soy incapaz de maginar un mundo sin libros*." Borges considera un universo cultural, en el que los datos primarios son los instrumentos construidos por el hombre a lo largo de la historia: la llave, la espada, el arado y, destacadamente, el libro "*que es una extensión secular de su imaginación y su memoria*".

Tampoco es posible imaginar un mundo sin números. Las herramientas elaboradas por la humanidad no se agotan en los artefactos materiales; el espacio cultural humano está habitado por herramientas conceptuales, por sistemas organizados de simbolos significativos que regulan la conducta humana y constituyen condición necesaria de su existencia. Los números están entre las herramientas culturales básicas de la mujer y el hombre, dan cauce y expresión a sus capacidades de clasificar, contar y ordenar.

El sistema de los números está entre los invariantes que delimitan lo que es natural, universal y constante en el género humano. Su presencia se detecta en las primeras huellas de actuación reflexiva localizadas en asentamientos humanos prehistóricos; forma parte de los conceptos y aplicaciones específicos de cada época; también se presenta de modo permanente en estudios antropológicos realizados en diferentes ámbitos culturales. La noción de invariante no hay que entenderla en términos de uniformidad; si bien la noción básica de número es común a cualesquiera de los modos humanos de determinación social y psicológica puesto que da respuesta a necesidades básicas del comportamiento humano, los modos concretos en que estos programas simbólicos se han puesto en práctica han sido y son muy diversos. Spengler expresó esta idea con precisión: "*No hay ni puede haber número en sí. Hay varios mundos numéricos porque hay varias culturas. Encontramos diferentes tipos de pensamiento matemático y, por lo tanto, diferentes tipos de números: uno indio, otro árabe, otro antiguo, otro occidental. Cada uno es radicalmente propio y único; cada uno es la expresión de un sentimiento del universo; cada uno es un símbolo, cuya validez está exactamente delimitada aún en lo científico; cada uno es principio de un ordenamiento de lo producido, en que se refleja lo más profundo de un alma única, centro de una cultura única.*"

El conocimiento matemático y, por tanto, el conocimiento sobre el número, no puede considerarse aislado del medio cultural. Las matemáticas dan expresión a un mecanismo claro de control para el gobierno de la conducta ya que atienden a planes, fórmulas, reglas, estrategias, procedimientos e instrucciones; contribuyen a ajustar la conducta humana a pautas de racionalidad y a desarrollar un pensamiento objetivo (Geertz). También presentan una dimensión social y pública, hunden sus raíces en las formas básicas de expresión humana. Las matemáticas permiten comunicar, interpretar, predecir y conjeturar; dotan de objetividad a nuestra información y la constituyen en conocimiento fundado. Esto se hace especialmente claro con las nociones numéricas: "*El momento en que comienza la comprensión del número y del idioma se caracteriza por una profunda experiencia íntima, verdadero despertar del yo, que de un niño hace un hombre, un miembro de una cultura. A partir de este momento existen para la conciencia vigilante objetos, esto es, cosas limitadas y bien distintas por su número y especie. A partir de ese momento existen propiedades bien determinables, conceptos, un nexo causal, un sistema del mundo circundante, una forma del mundo, leyes del mundo*" (Spengler).

Matemáticas y educación

Nuestro interés por considerar el número como referencia cultural básica tiene su raíz en la importancia que concedemos al conocimiento matemático en la educación. Concebimos la educación como "*ese proceso mediante el cual un individuo en formación es iniciado en la herencia cultural que le corresponde*" (Mead), el modo en que cada generación transmite a las siguientes sus pautas culturales básicas; debe, por tanto, hacer referencia a un sistema de valores, considerar la práctica social en la que se incardina, basarse en unos fundamentos éticos y reflexionar sobre las implicaciones políticas conexas.

La sociología del conocimiento establece que, como en el resto de las disciplinas científicas, las representaciones matemáticas son construcciones sociales. La conjetura de la construcción social ubica el conocimiento, la cognición y las representaciones en los campos sociales de su producción, distribución y utilización. El conocimiento científico es constitutivamente social debido a que la ciencia está socialmente orientada y los objetivos de la ciencia están sostenidos socialmente (Restivo). El conocimiento matemático, como todas las formas de conocimiento, representa las experiencias materiales de personas que interactúan en entornos particulares, culturas y períodos históricos.

Teniendo en cuenta esta dimensión social, el sistema educativo -y, en particular, el sistema escolar- establece multitud de interacciones con la comunidad matemática, ya que se ocupa de que las nuevas generaciones sean iniciadas en los recursos matemáticos utilizados socialmente y en la red de significados (o visión del mundo) en que se encuentran enclavados; esto es, organiza un modo de práctica matemática. En las modernas sociedades el sistema escolar es una institución compleja, que implica a multitud de personas y organismos y trata de satisfacer, simultáneamente, una diversidad de fines no siempre bien delimitados y coordinados. Dentro del sistema escolar tiene lugar gran parte de la formación numérica de las generaciones jóvenes; esta institución debe promover las condiciones para que los más jóvenes lleven a cabo su construcción de los conceptos numéricos mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos.

La dimensión educativa lleva a considerar el conocimiento matemático como una actividad social, propia de los intereses y la afectividad del niño y del joven, cuyo valor principal está en que organiza y da sentido a una serie de prácticas útiles, a cuyo dominio hay que dedicar esfuerzo individual y colectivo. El educador se ocupa de iniciar a los niños y adolescentes en la cultura de la comunidad a la que pertenecen y de transmitirles sus valores sociales; de esta cultura también forma parte el conocimiento matemático, el conocimiento numérico, que debe transmitirse en toda su plenitud a cada generación. La responsabilidad del educador matemático es grande puesto que los números son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales. Pero la tarea del educador matemático no es fácil, ni tiene por qué serlo. Como toda tarea social debe ofrecer respuestas a la multiplicidad de opciones e intereses que, permanentemente, surgen y se entrecruzan en el mundo actual. Llevar adelante esta tarea necesita el conocimiento y dominio de diversas disciplinas, entre las que se encuentran las matemáticas, pero que no se reducen a ellas.

Estos son los datos del problema: un amplio campo conceptual, denominado campo numérico, constituido por sistemas simbólicos estructurados y coordinados, producto de una evolución histórica y de una determinación epistémica; unos sujetos a cuya educación contribuye mediante desarrollo de funciones cognitivas generales y construcción de significados simbólicos compartidos relativos a dicho campo numérico; y un campo de prácticas sociales variadas que tratan de responder a diversas cuestiones e interrogantes procedentes de fenómenos diferentes, mediante los valores, conceptos, procedimientos y herramientas del mencionado campo numérico.

El núcleo de la cuestión radica en que, para abordar de modo sistemático y fundado el tratamiento y resolución de los problemas educativos anteriormente mencionados, se necesitan unos profesionales cualificados, con formación científica rigurosa y diversificada, adquirida en la Universidad, centrada en la Didáctica de la Matemática y en las disciplinas básicas que la fundamentan.

Nuestra cuestión básica es la siguiente: ¿qué formación específica necesita un profesional de la educación matemática para llevar adelante un plan escolar de formación que tenga en cuenta los datos anteriores? Ejemplificamos con los conceptos numéricos la respuesta a esta pregunta general.

¿Qué conceptos numéricos?

La moderna conceptualización del número está basada en la noción de sistema (Feferman); hablando con cierta precisión no nos referimos a números, simplemente, sino a sistemas numéricos. Un sistema numérico es un conjunto de entes abstractos (a los que denominamos números) expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componer números y de unas relaciones mediante las

que se comparan dichos entes; la consideración conjunta de los entes, sus operaciones y sus relaciones es lo que caracteriza un sistema numérico.
Los sistemas numéricos usuales de la matemática son:

1.- El sistema de los números naturales, cuyos entes son 0, 1, 2, 3,....., n,...; sus operaciones básicas son suma y producto y sus relaciones son igualdad, orden y divisibilidad.

2.- El sistema de los números enteros, que comprende los números positivos y los negativos: ..., -n, ...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...., n,.., cuyas operaciones y relaciones reciben las mismas denominaciones anteriores y se establecen de modo similar.

3.- El sistema de los números racionales, basado en las fracciones o en los números decimales finitos y periódicos, con las operaciones suma y producto, la relación de orden y una propiedad que establece que, siempre que consideramos dos fracciones, una menor que otra, se puede obtener un múltiplo de la fracción menor que supere a la mayor.

4.- El sistema de los números reales, establecido sobre la base de todas las notaciones decimales infinitas y la medida relativa de cualquier par de segmentos, en el que se consideran las mismas operaciones y relaciones, con sus correspondientes propiedades, y una nueva propiedad que garantiza que cualquier clasificación de números reales en dos clases disjuntas, tales que los términos de una son todos ellos mayores o iguales que los de la otra, determina un único número real que actúa de frontera.

Estos cuatro sistemas numéricos constituyen, progresivamente, el conocimiento socialmente establecido para nuestros jóvenes cuando concluyan el período de su formación obligatoria; el sistema de los números naturales debe conocerse y dominarse ampliamente al finalizar la Educación Primaria, mientras que los otros tres corresponden a la Educación Secundaria. Centramos nuestra reflexión sobre el sistema de los números naturales, que constituyen el dominio básico cultural sobre números en la sociedad actual.

El término sistema establece el carácter dinámico del conjunto de los números ya que considera que estos entes se determinan por sus relaciones mutuas. Así, conocer o saber lo que significa, por ejemplo, 15 no consiste sólo en leerlo como 1 decena y 5 unidades; también en interpretarlo como 3 veces 5, 5 veces 3, siguiente a 14, anterior a 16, suma de dos números consecutivos: 7+8, suma de tres números consecutivos: 4+5+6, suma de cinco números consecutivos: 1+2+3+4+5, pero no suma de cuatro números consecutivos, anterior a un cuadrado: 16^2 - 1, suma de dos números por su diferencia: (4-1)·(4+1); mitad de 30: 30/2; etc. Desde esta perspectiva, cada número es un nudo en el que se entrelazan una multiplicidad de relaciones, es un elemento de una red compleja fuertemente conectada, cuyo mayor o menor dominio determinará la comprensión real que cada sujeto alcance del sistema de los números naturales.

El sistema de los números naturales, tal y como lo conocemos en la actualidad, se ha consolidado a lo largo de la historia de la humanidad avanzando y profundizando en la determinación de un concepto que se exprese mediante un sistema simbólico de representación adecuado para nombrar, escribir, comparar, operar y relacionar números y, en general, para trabajar con ellos en las cuestiones básicas para las que los hombre los utilizan: ¿cuántos objetos hay?, ¿qué orden o posición ocupa?, ¿cuánto mide?, ¿cuál es el resultado?

El conocimiento de los momentos claves en la historia de los números naturales presenta interés intrínseco, porque pone de manifiesto aquellos obstáculos que hubo que superar para perfeccionar esta herramienta. La historia de las matemáticas ha sido un proceso de aprendizaje de esquematización progresiva. "*Los jóvenes no necesitan repetir la historia de la humanidad pero tampoco debiera esperarse que empezaran en el mismo punto en que se quedó la generación precedente. En algún sentido los jóvenes tendrán que repetir la historia, aunque no aquella que tuvo lugar en realidad sino la que habría tenido lugar si nuestros antecesores hubieran sabido lo que, por fortuna, nosotros sabemos*" (Freudenthal).

Datos en la evolución del sistema de los números naturales.

La destreza más sencilla en relacion con el sistema de los naturales es la de contar, es decir, asignar a cada uno de los términos de un conjunto bien definido un vocablo o símbolo, que lo designa de manera abstracta. Mediante este procedimiento ponemos en correspondencia biunívoca cada elemento del conjunto con un símbolo o término numérico y es la condición previa que permite conocer la cantidad de objetos que tiene el conjunto. Estos vocablos y símbolos constituyen la primera expresión de la numeración. El estudio de las sociedades primitivas ha mejorado nuestra comprensión de cómo contaban nuestros antecesores y facilitado la interpretación de signos y marcas numéricas encontradas en yacimientos prehistóricos.

Al estudiar la actividad de contar en sociedades primitivas contemporáneas se encuentra un número limitado de términos o signos para el conteo; estos términos pueden ampliarse bien incorporando nuevos vocablos o bien mediante técnicas recursivas, que incluyen la repetición de términos. En el estudio de tribus aborígenes en Australia se ha detectado la carencia de sistemas convencionales de conteo, pero esto no limita la posibilidad de hacer recuentos tan extensos como sea necesario, ya que el principio de agregación que subyace a la actividad de enumeración está permanentemente presente. Cuando es necesario se produce un refinamiento de los términos para contar, lo que permite alcanzar cantidades superiores a las que se expresan en el sistema numérico verbal usual.

Hay evidencias que sitúan en el Paleolítico superior (20000- 10000 a.C.) las primeras muestras de algún modo de conteo, que se reconoce en marcas y señales en huesos o piedras que significan cantidades y que han sido interpretadas como calendarios lunares. Las marcas encontradas en estos contadores prehistóricos muestran grupos de 29 o 30 señales, que presentan frecuentemente divisiones o separaciones cada 7 o 14 marcas. Aunque ha sido criticada la interpretación de estos contadores como calendarios lunares se acepta que son muestras indiscutibles de un modo de recuento. Por ello se considera que el hombre en el Paleolítico representaba números en relación con algunos contextos, establecía una correlación entre algo externo y marcas secuenciadas; estas marcas se consideran intencionales, secuenciales y cuidadosamente estructuradas.

Además de las marcas en un palo o en un hueso, en las sociedades primitivas se presentan otras variantes de conteo que, obviamente, no pueden encontrarse en los yacimientos prehistóricos. Por un lado tenemos el conteo verbal, formado por una serie de palabras o términos específicos; por otro lado tenemos el conteo concreto que se manifiesta en la elaboración de contadores sencillos, como un haz de hojas ensartadas o un rosario de semillas, o en el uso de distintas partes de la mano o del cuerpo para asignar términos numéricos.

En las sociedades primitivas no suele presentarse una distinción clara entre un número y el conjunto de objetos enumerados. Algunos términos numéricos se emplean únicamente para determinados objetos o tareas. Otro dato importante, presente prácticamente en todos los sistemas verbales, es el uso de un término o frase singular para nombrar un grupo de objetos; así pueden contarse agrupamientos de objetos. La aparición de estos términos es condición previa para que surjan los símbolos o marcas correspondientes que dan paso a un sistema de numeración, en el que cada n unidades de un orden constituyen una unidad de orden superior.

El contar se presenta con las primeras nociones de número natural y los datos conocidos ponen de manifiesto cierta evolución de la humanidad; esta evolución ha resultado más lenta y menos obvia de lo que se supone usualmente, si bien es posible reconocer ciertos rasgos, modos de expresión y representación y momentos históricos en los que se aprecian cambios importantes. Son muchas las conjeturas que se han hecho sobre el origen del conteo, una hipótesis que se ha manejado es su procedencia de actos rituales o ceremonias religiosas, considerando la secuencia numérica como parte del ritual para llamar a los participantes y para regular su intervención en la ceremonia. Esta hipótesis es valorada por quienes enfatizan el carácter de representación arquetípica de los números, como productos espontáneos y autónomos del inconsciente.

A la vista de los datos aportados por arqueólogos y antropólogos, los supuestos en los que se basa la acción de contar son:

a) el reconocimiento de objetos discretos o acontecimientos distintos en el mundo externo;

b) la relación de aspectos internos o superficiales de cada sujeto con las colecciones del mundo exterior, como ocurre cuando se cuenta con los dedos;

c) la necesidad de una idea relativamente abstracta de número, mediante la que comunicar información sobre cantidades u orden en una secuencia.

Los yacimientos arqueológicos donde se han encontrado los restos más antiguos de un sistema de numeración se localizan en el Irak actual, antigua Mesopotamia. Los especialistas establecen que desde el milenio noveno hasta el milenio cuarto a. C., una gran variedad de fichas de arcilla sirvieron para designar números, medidas y categorías de objetos; los restos conocidos de notación numérica son anteriores en varios milenios a las primeras formas conocidas de escritura. A finales del cuarto milenio se perfeccionó el uso de las fichas con el empleo de símbolos dentro de unas bolas de arcilla que actuaban como sobres protectores; se considera que estos sobres son el precedente de las tablillas de arcilla impresa. Los hallazgos arqueológicos permiten reconocer una continuidad de las representaciones métricas y numéricas desde el Neolítico temprano hasta el nacimiento de las ciudades-estado en el Asia suboccidental.

Se conservan simbolizaciones y textos matemáticos del período paleosumerio, del sumerio presargónico, del reinado de Sargón, del llamado Ur III, del babilonio antiguo, del período babilónico de Acad, y el periodo Seleúcida. Característica común de estos textos es el uso de un sistema de numeración en el que aparece por vez primera la noción de base. En los distintos documentos considerados se presenta una sola base o se combinan dos bases distintas; las bases más usuales fueron la sexagesimal y la decimal, con predominio de la primera, pero también hay sistemas de base 20 y de base 5. La noción de base establece un principio de agrupamiento de cantidades, que indica que cada n unidades de un orden constituyen una unidad de orden superior. Los sistemas de numeración mesopotámicos utilizaban muy pocos signos distintos y un principio posicional de escritura de los distintos órdenes de cifras que componen un número. El sistema babilónico más conocido emplea sólo dos signos cuneiformes en su sistema numérico: una marca vertical, abierta hacia arriba, para la unidad y una marca horizontal, abierta hacia la derecha, para el diez; estos dos signos los combina con un sistema posicional de base 60. Así, los números desde 1 a 59 se escriben por agregación de unidades y decenas en disposiciones establecidas; a partir de 60 hasta 60^2 los números se escriben con dos cifras, correspondientes a los dos órdenes iniciales de la base. El principio posicional se aplica con el mismo esquema que utilizamos actualmente, con una importante limitación: que los babilonios carecían de un signo para 0 y tenían que expresar la ausencia de cantidad para un determinado orden con un espaciamiento.

Estos sistemas de numeración expresan una idea muy elaborada de número, mediante ellos se presentan y resuelven multitud de problemas prácticos y teóricos. En las tablillas se encuentran ejemplificados algoritmos para las cuatro operaciones aritméticas, llegando a operar con grandes números; también el sistema permite escribir fracciones y "decimales". Los sistemas de numeración mesopotámicos evolucionaron hasta el sistema sexagesimal babilónico; esta evolución fue en paralelo con las necesidades de la administración de grandes territorios con un desarrollo cultural y social considerable, que dio lugar políticamente a varios estados. También interaccionó con el avance de la astronomía dedicada al estudio de las regularidades en los movimientos del sol, la luna y los planetas. El sistema babilónico permitió plantear problemas matemáticos importantes como la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado y obtener aproximaciones muy precisas de números irracionales como π y $\sqrt{2}$.

Los sistemas numéricos de las tres grandes civilizaciones fluviales -Mesopotámica, Egipcia e Indostánica- que ejemplifican la revolución urbana que tuvo lugar alrededor del año 4000 a.C., son estructuralmente equivalentes, como lo son en muchos otros ámbitos de la cultura. "*Entre todas estas comunidades había aumentado el capital cultural del hombre con descubrimientos e invenciones. Habían acumulado laboriosamente un conjunto importante de conocimientos científicos -topográficos, geológicos, astronómicos, químicos, zoológicos y botánicos- de saber y destreza prácticos, aplicables a la agricultura, la mecánica, la metalurgia y la arquitectura, y de creencias mágicas que también eran consagradas como verdades científicas. Como resultado del comercio y de las migraciones de los pueblos, la ciencia, las técnicas y las creencias se habían propagado con amplitud; el conocimiento y la destreza eran aprovechados*" (Childe).

Es indudable que una transformación social de esta envergadura necesitó un sistema numérico técnicamente bien construido y desarrollado. Hemos mencionado las características del sistema babilónico. El sistema de numeración jeroglífico egipcio también se fundaba en una base, en este caso la base 10, y disponía de símbolos para las sucesivas potencias de la base, desde 10^0 hasta 10^6. El sistema egipcio no era posicional sino que cada cantidad se expresaba repitiendo tantas veces como fuera necesario los símbolos de las sucesivas potencias de 10. No obstante, este sistema también desarrolló algoritmos para las cuatro operaciones, con los que se fundamentó una aritmética comercial eficiente; permitió elaborar una notación específica para las fracciones, realizar cálculos complejos con ellas y resolver multitud de problemas prácticos, entre ellos la determinación precisa de un calendario basado en los movimientos siderales. Se suele atribuir a la situación más cerrada de la cultura egipcia unos resultados científicos más limitados, que se manifiestan en el menor desarrollo de su sistema numérico y de los conocimientos matemáticos correspondientes. Es más escaso lo que se conoce de la civilización del valle del Indo y de sus sistemas numéricos. Entre los datos conocidos se encuentra un sistema octogesimal, el sistema harappeo, que servía para el comercio y la administración.

En este amplio período de las grandes civilizaciones fluviales o culturas del neolítico, cuya etapa culminante se sitúa alrededor del 4000 a.C., encontramos de modo permanente un sistema de numeración más o menos desarrollado. La característica principal de todos estos sistemas consiste en haber sistematizado el principio de agrupamiento mediante la técnica que hoy denominamos elección de una base, y haber elaborado un sistema de símbolos y reglas sencillos mediante los que conseguir la representación de cualquier número. Sin embargo, los sistemas babilónico y egipcio no completaron las posibilidades que surgían del principio de agrupamiento; en el caso babilónico la limitación a sólo dos signos y la ausencia del 0 complicaban la escritura de números más allá de un cierto orden; en el caso del sistema jeroglífico, los símbolos trataban de resolver el problema de la ausencia de una notación posicional mediante cifras para las distintas potencias de 10, lo que llevaba a la necesidad de reiterar un mismo símbolo hasta 9 veces, haciendo inviable la escritura de números cada vez mayores. De hecho estos sistemas venían limitados por su escasez de cifras o signos básicos, la inexistencia de una noción de 0 y las restricciones que esto impone a la escritura posicional. Ofrecían una posibilidad de control sobre un campo muy amplio de números, pero este campo en cualquier caso es limitado. Hay un procedimiento de cierta perfección técnica para escribir números que permite operar con agilidad, pero aún faltan componentes importantes en estos sistemas; entre ellas la consideración de que el sistema de los números naturales es ilimitado.

Alrededor del año 1000 a.C., en los primeros siglos de le Edad del Hierro, se produce una de las revoluciones culturales más importantes de la historia de la humanidad: la consolidación de la escritura alfabética en los pueblos semíticos que habitaban el Oriente próximo y su transmisión antes del 800 a.C. a los pueblos griegos. "*Si por alfabeto se entiende un sistema de signos que expresan sonidos individuales, entonces el primer alfabeto que merece justificadamente tal nombre es el alfabeto griego*" (Gelb). La escritura semítica es alfabética porque cada símbolo representa un sonido simple, pero está formada incompletamente, ya que no simboliza con claridad todos los sonidos distintos del lenguaje que se escribe. Fueron los griegos quienes, al incorporar símbolos para las vocales, produjeron la escritura fonémica en la que cualquier sonido distinto del lenguaje griego estaba representado por un solo signo. Esta innovación tuvo consecuencias culturales, políticas, sociales y económicas considerables. El término alfabetización, que ha llegado a ser sinónimo de dominio cultural básico, describe el cambio cultural que se produjo en esta época y que afectó a todos los campos del conocimiento.

También los sistemas numéricos se vieron afectados por estos cambios, dando origen a los sistemas numéricos alfabéticos. Numeraciones alfabéticas son la romana y la etrusca, la griega, la hebrea, la fenicia y la árabe, entre otras muchas que se extienden en esta época a lo largo del Oriente próximo y medio y por la cuenca del Mediterráneo, llegando a influir por un extremo en la cultura ibérica y por otro en la hindú. El sistema griego alfabético de numeración utiliza los 24 signos del alfabeto, más 3 signos complementarios para representar las nueve unidades, las nueve decenas y las nueve centenas, respectivamente; para representar cifras de orden superior emplea signos complementarios que acumula a los signos iniciales. De este modo un número viene dado por una combinación de letras y signos especiales, cada una de las cuales expresa una cantidad determinada. Este sistema mantenía la base 10 e incorporaba dos innovaciones interesantes: la simbolización de los números del 1 al 9 con cifras distintas y la consideración de un cierto principio posicional en la escritura de las cifras de los distintos órdenes que forman un número. Sin embargo, venía lastrado por dos limitaciones: el uso de cifras diferentes para expresar un mismo valor en los diferentes órdenes, por ejemplo un signo distinto para 5, otro para 50, otro para 500, etc, lo cual introducía una complejidad artificial y no sacaba partido de la escritura posicional; la segunda limitación es la ausencia de un signo para 0, más aún, la imposibilidad de concebir una noción de 0.

Los escritores griegos apenas se refieren al cálculo con numerales alfabéticos. La suma, resta y multiplicación se realizaban con el ábaco; sólo los matemáticos expertos emplearon los símbolos en épocas tardías para efectuar operaciones. La distinción de los matemáticos griegos entre dos modos de trabajar con los números, el teórico y el práctico, expresa el poco interés que concedieron al sistema de numeración como herramienta útil para reflexionar sobre el número. El sistema de numeración alfabético se utilizaba únicamente para expresar cantidades; la realización de los algoritmos de las operaciones con este sistema era tediosa y complicada y quedaba totalmente al margen de la reflexión teórica sobre los números que realizaron los griegos.

Si bien los sistemas de numeración basados en el alfabeto no aportaron un avance conceptual significativo para el concepto de número, los matemáticos griegos hicieron aportaciones fundamentales que proporcionaron una base conceptual sólida y extensa al sistema de los números naturales, basada en un modelo deductivo y preocupada por las propiedades formales del sistema.

Destacamos tres aportaciones griegas al concepto de número natural.

En primer lugar consideramos las contribuciones de la escuela pitagórica. Aristóteles cuenta que *"los llamados pitagóricos se dedicaron a las matemáticas y fueron los primeros en hacerlas progresar; absortos en su estudio creyeron que sus principios eran los principios de todas las cosas* (...) *Puesto que veían que los atributos y las relaciones de las escalas musicales eran expresables en números y que parecía que todas las demás cosas se asemejaban en su naturaleza a los números y que éstos parecían ser los primeros de la naturaleza, supusieron que los elementos de los números eran los elementos de todos los seres existentes y que los cielos todos eran armonía y número"*.

Para los pitagóricos el número no era simplemente una etiqueta para una colección, el símbolo de una cantidad o una construcción intelectual, sino algo que tenía consistencia en sí mismo; los números eran como una suerte de átomos que, en sus diversas composiciones y relaciones, dan la esencia misma de lo que es la variedad del mundo existente.

Esta noción del número tuvo su mejor instrumento en el sistema de representación que conocemos como configuraciones puntuales o números figurados, diferente totalmente de los sistemas de numeración al uso. La idea básica de este sistema de representación es considerar cada número como un agregado de puntos o unidades distribuidos sobre una trama isométrica, según una figura geométrica plana o espacial. De este modo aparecían números triangulares, cuadrados, rectangulares, pentagonales, piramidales y cúbicos, tantos como variantes de figuras geométricas se consideren, que facilitan pensar en cada número como un todo organizado según una estructura determinada. Al organizar espacialmente las unidades que componen un número, los griegos consiguieron dos informaciones importantes sobre ese número. Por un lado, un análisis aritmético del número: un número triangular es una suma de números consecutivos comenzando desde 1, un cuadrado es el producto de un número por sí mismo, un rectangular es producto de dos números consecutivos; este análisis permitía conocer propiedades del número en cuestión y relacionarlo con muchos otros, facilitando así el dominio de los naturales como sistema, cosa que no se lograba con el sistema alfabético de numeración. Un mismo número podía considerarse perteneciente a varios tipos de números figurados; así 15 es un número triangular, pero también es rectangular de diferencia 2, es un número trapezoidal, y le falta una unidad para ser un cuadrado. En segundo lugar, distintos números comparten la estructura que representa cada tipo de configuración puntual. El análisis aritmético que expresa la configuración correspondiente se convierte así en una propiedad común de todos estos números, que puede generalizarse. Fue así como el sistema de representación mediante números figurados se convirtió en un instrumento para establecer propiedades generales de los números y descubrir nuevas relaciones entre ellos. Este sistema de representación permitió a matemáticos como Nicomano de Gerasa establecer propiedades numéricas generales e identidades algebraicas sin disponer del aparato simbólico del álgebra. El uso de números figurados lo encontramos a lo largo de la historia de la Teoría de Números; así se encuentran en los comienzos de la matemática europea con Leonardo de Pisa, en el *Algebra* de Euler, y aún hoy día se mantienen para facilitar la introducción a esta disciplina

El programa pitagórico ha sido una de las ideas más fecundas en el campo de las matemáticas y en sus aportaciones a la ciencia, pero también ha sido fuertemente criticado por el valor místico y el significado religioso que atribuyó a los números, lo que entorpeció la comprensión del papel real que desempeñan en la interpretación de los fenómenos físicos; Russell afirma de Pitágoras que "*fue uno de los hombres intelectualmente más importantes que jamás hayan vivido, tanto en su sabiduría como en su insensatez*".

La segunda aportación destacable es la conceptualización del proceso de contar como proceso indefinido, que puede continuarse y nunca tiene fin. Corresponde a Aristóteles, en el análisis que realiza en la *Física* sobre la noción de infinito, la determinación de los distintos tipos de infinito que pueden concebirse y la precisión de que la noción de infinito potencial es aplicable al sistema de los números naturales; es decir, la posibilidad de ampliación continuada e indefinida del conjunto de los naturales. Hasta finales del siglo XIX no se retomará esta idea para axiomatizar el sistema de los números naturales, pero es importante destacar que, ya en esta época, los pensadores griegos habían establecido conceptualmente la noción de proceso infinito, llegando a utilizarla en algunas demostraciones, como ocurre en la prueba de que la serie de los números primos es ilimitada.

Finalmente, como tercera aportación destaca el trabajo de Euclides que establece un concepto de número centrado exclusivamente en la noción de número natural. Euclides trata los racionales como proporciones entre números o entre longitudes, pero no los considera números; el concepto de proporción entre longitudes le permite trabajar con determinadas clases de irracionales cuadráticos, estableciendo un marco conceptual que no será superado hasta finales del siglo XIX. El concepto de número de Euclides, junto con la sistematización de la teoría de números conocida hasta el momento, se encuentran en los Libros VII, VIII y IX de los *Elementos*; sobre esta base conceptual trabajarán los matemáticos durante dos mil años.

Aunque el sistema simbólico para representar números naturales no se perfeccionó con la numeración alfabética, es evidente que la profundidad alcanzada por los matemáticos griegos en sus trabajos contribuyó a un dominio conceptual profundo y sistemático de los sistemas numéricos.

Se considera comúnmente que fue en el norte de la India, alrededor del siglo V d.C., donde surgió un sistema de numeración posicional, con un signo específico para 0. El signo primitivo de los hindúes para el cero fue un punto, que fue empleado inicialmente en manuscritos e inscripciones para indicar un hueco. Alrededor del siglo III d.C. aparecen en los textos matemáticos hindúes símbolos numéricos que expresaban un sistema de numeración evolucionado, variando considerablemente de unas épocas y regiones a otras, relativamente próximas. De esta época se conocen los símbolos brahmánicos, que incluyen un signo distintos para cada unidad y para cada decena, como en los sistemas alfabéticos, pero aún no hay cero ni valor posicional. El testimonio más antiguo conocido del empleo de los símbolos numéricos con la regla numeral de posición y un símbolo para 0 se conserva en un texto sánscrito de cosmología, de mediados del siglo V. El matemático y astrónomo hindú Aryabhata, que vivió a finales del siglo V d.C., utiliza los principios posicional y el 0 en trabajos para la obtención de la raíz cuadrada y la raíz cúbica de un número. En esta época las distintas notaciones dentro de la India se diferencian más por los signos utilizados que por los principios empleados. A comienzos del siglo VII el uso de la numeración decimal escrita y del signo cero están bien establecidos en la India, como muestra la obra del astrónomo Bhaskara.

La contribución árabe comienza en Bagdad, en la corte del califa Almansur, con el empleo de tablas astronómicas traidas por astrónomos hindúes. Fue de este modo como se introdujeron el principio posicional y el 0 entre los árabes. La rápida expansión de la cultura islámica, el gran desarrollo ecónomico que la acompañó, junto con los intereses científicos y administrativos, contribuyeron a la consolidación y difusión de un sistema decimal de numeración, cuya única diferencia importante con nuestro sistema actual es la forma de sus cifras.

El símbolo para el cero se denominó "sunya", que significa vacío en hindú; de ahí el termino árabe "sifr" con el mismo significado, que dio lugar en latín al término "zephirum", y de ahí nuestro actual cero.

Es usual admitir que la difusión del sistema decimal de numeración árabe en Europa se realizó durante la baja Edad Media, a partir de las traducciones realizadas en la escuela de traductores e intérpretes de Toledo. Juan de Sevilla hizo la primera traducción al latín de un texto de Aritmética y Algebra. Desde el comienzo aparecen los numerales hindúes, se calcula con el cero, se utiliza el término algoritmo y no se emplea el ábaco. Leonardo de Pisa fue el primer europeo que empleó el nuevo sistema en una obra de matemáticas original, el *Liber Abaci*. En esta obra explica la forma algorítmica de realizar los cálculos con el nuevo sistema de numeración, compara las ventajas del nuevo sistema en relación con el sistema de numeración romano, enseña reglas para el cálculo, muestra las tablas de sumar y multiplicar y enuncia reglas para la divisibilidad.

Alrededor de 1400 fue cuando el nuevo sistema de numeración adquiere peso cultural propio. Sin embargo los numerales arábigos tuvieron que competir con el sistema de numeración romano, que era utilizado por las clases y estamentos con mayor nivel cultural y mayor peso económico, llegando a prohibirse su uso para el gremio de banqueros florentinos a finales del siglo XIII; esta prohibición hubo de ser reiterada varias veces. La superación de una quiebra bancaria por la Banca Medicis en el siglo XV, gracias a la modernización de su contabilidad con el uso del sistema arábigo de numeración, consolidó el sistema decimal en el mundo económico.

La invención de la imprenta modifica la comunicación del conocimiento numérico. La publicación de numerosas Aritméticas comerciales desde 1478, fecha en que se imprime en Treviso la primera de ellas, contribuye notablemente a la difusión del sistema decimal de numeración, que es empleado extensamente y de modo prioritario desde el siglo XVI.

Desde el punto de vista matemático la prueba definitiva de la potencialidad del sistema decimal de numeración la proporciona el ingeniero flamenco Simon Stevin, quien en 1585 amplía el sistema para escribir las fracciones, extiende la notación a las potencias negativas de 10 y da lugar a la aparición de los números decimales. Desde entonces el sistema decimal de numeración se convierte en un instrumento esencial no sólo para contar y ordenar, sino también para medir y expresar datos científicos. El sistema decimal de numeración está listo para sostener el concepto de número real; el estudio de valores aproximados y la teoría de errores tienen aquí su origen.

La conceptualización del número

En relación con el concepto de número, científicos y filósofos han planteado reiteradamente dos tipos de cuestiones de las que conservamos documentación abundante. El primer tipo lo constituyen las cuestiones ontológicas, que plantean la pregunta sobre la naturaleza de los números, ¿qué clase de entes son esos símbolos a los que denominamos números? Las cuestiones epistemológicas son el segundo tipo, y preguntan por la formación del concepto de número, ¿cuál es el origen del número? e interrogan sobre la relación entre los números y el mundo empírico así como por la aplicabilidad de los conceptos numéricos. Estas dos familias de cuestiones están en la base del conocimiento matemático, y llegan hasta nuestros días con los problemas de la fundamentación lógica del sistema de los naturales y los teoremas de incomplitud de dicho sistema.

La filosofía de la matemática surge con los pitagóricos, quienes proponen un programa científico que cuenta con la noción de número como uno de los fundamentos del conocimiento. Filolao, pitagórico tardío, expresa uno de los supuestos generales del pitagorismo en el fragmento que dice: "*Y en verdad todas las cosas que se conocen poseen número, pues ninguna cosa podría ser percibida ni conocida sin éste*"; hay, sin embargo, un pitagorismo más radical que afirma que las cosas no sólo poseen número sino que todas las cosas son números. Este programa fuerte se puso en práctica, en realidad, concibiendo los números como cosas. La aritmética pitagórica es una teoría de números que considera a éstos como realidades naturales, que estudia cada uno de ellos por separado a fin de establecer sus propiedades intrínsecas. Cada número aparece como consecuencia de las operaciones por las cuales se alcanza; esas operaciones establecen la configuración del grupo de puntos que constituye el número en su esencia. Tomaron como principios de los números la unidad y la diada, y dos formas, lo par y lo impar. Sobre estas bases se propusieron explicar mediante representaciones numéricas la naturaleza de lo conocido, abarcando incluso realidades sociales como la justicia o el matrimonio. Al implicar en la concepción del número las configuraciones geométricas y la representación física, conciben el estudio de los números como estudio de la realidad y convierten el descubrimiento de relaciones aritméticas en descubrimiento de relaciones naturales. La relación numérica es una ley en el sentido objetivo del término: se desprende de la observación y reviste progresivamente la forma general que comporta.

La escuela pitagórica establece la igualdad entre realidad numérica y realidad física, alcanzando su crisis con el descubrimiento de la inconmensurabilidad entre el lado y la diagonal del cuadrado, derivada del teorema atribuido a Pitágoras y que lleva su nombre; a partir de este descubrimiento el paralelismo entre el concepto numérico y la representación geométrica no pudo mantenerse. Platón profundiza en la noción de número y trata de superar las contradiciones del programa pitagórico. Platón pasa de la aritmética del hombre a la del filósofo, para ello establece la distinción entre cálculo y logística, que en nuestra terminología actual llamaríamos Teoría de Números pura y aplicada. "*Así pues, Glaucón, será conveniente poner leyes sobre esta enseñanza y persuadir a los que han de tomar parte en los mayores cargos del Estado que se dediquen a la logística y acometan su estudio no como aficionados, sino hasta llegar a la contemplación de la naturaleza de los números con la inteligencia pura, no* *por motivo de compra o venta, como si se ejercitaran de mercaderes o traficantes, sino para la guerra y para facilitar la comprensión del alma misma del devenir a la verdad y a la esencia*" (República).

Para Platón los números son ideas; están no sólo más allá del número sensible sino más allá, incluso, del número aritmético; la ciencia de los números alcanza a los caracteres de las cosas que logra comprender en sus determinaciones; constituye el paradigma del que las cosas sensibles son imitaciones. La idea de la diada y de la mónada se citan en el *Fedón* para explicar la verdadera naturaleza de los números. Como en el pitagorismo, el uno es el bien y el infinito es el mal y, en la dialéctica de ambas nociones, se somete lo diverso a un principio de limitación que hace desaparecer las contradiciones, introduciendo la armonía mediante un número determinado. Sin embargo, hay cosas que están más allá del número, como las longitudes irracionales, que no por eso dejan de ser inteligibles, si bien encuentran su solución en la geometría. El programa geométrico y el método denominado de regresión analítica, que remonta de la hipótesis a los principios, extienden las relaciones entre longitudes más allá de los límites en los que se detiene el cálculo con números naturales o razones entre naturales. Hasta la aritmetización del número real en el siglo XIX este predominio del programa geométrico de Platón, sintetizado en la obra de Euclides, no será superado.

Los *Elementos* de Euclides establecen la conceptualización de número que va a permanecer durante cerca de casi veinte siglos; esta conceptualización aun cuando conserva nociones y planteamientos pitagóricos se propone aplicar el programa deductivo a las nociones estrictamente matemáticas. El tratamiento euclídeo del concepto de número se presenta en las 23 definiciones con las que comienza el libro VII de los *Elementos* y se desarrolla a lo largo de 102 proposiciones que abarcan los libros VII, VIII y IX. Los dos conceptos básicos de los *Elementos* son el de unidad y el de número: "*Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de la cosas que hay es llamada una*", "*Un número es una pluralidad compuesta de unidades". Esta misma noción la encontramos de modo invariante a lo largo de varios siglos: "Número, según la experiencia lo demuestra, y Euclides lo escribe, no es otra cosa que una agregación y ajuntamiento de unidades*" (Gerónimo Cortés)

La noción de Euclides fundamenta una consideración del número que abarca no sólo los aspectos conceptuales, sino también el campo de aplicaciónes prácticas relacionadas y los modos humanos de empleo del número: "*La cantidad discreta, que es llamada muchedumbre, sirve para Arithmética, la qual es ciencia de números, y de sus definiciones, generación y propiedades, y toda cosa en Arithmetica es sujeta y atribuida a número. Tambien se hallan tres suertes de número; conviene a saber, numerus numerans, numerus numeratus y numerus numerabilis. El primero de los cuales significa el numerante, que dicen ser nuestra ánima, la qual numera las cosas por los instrumentos de la boca, de la lengua y del corazón. El número numeratus dice que son las cosas numeradas, como son los animales, las monedas y otras cosas que* *se compran y venden a número, peso y medida; y aquesta tal suerte de número es aquel que llamamos número natural. El número numerabilis es aquel por el qual numeramos, dicen que es el uso y la regla del numerar en las cosas diversas*." (Miguel de Santa Cruz).

Hay que llegar al siglo XVII para encontrar una ampliación del concepto de número. Malebranche considera que todo número es una relación; los números naturales son tambien relaciones tan verdaderas como los números quebrados, aunque se pueda no reflexionar sobre ello a causa de que los números naturales pueden expresarse mediante una sola cifra. Las verdades de la Aritmética son "relaciones reales e inteligibles"; así la relación de igualdad 2 x 2 = 4 es una verdad eterna, inmutable y necesaria, que satisface la exigencia cartesiana de ideas claras y distintas. Esta ampliación conceptual, junto con las nociones de secuencia, proceso infinito y paso al límite constituyen la base sobre la que se desarrolla el análisis del siglo XVIII.

A partir del siglo XVII el interés se desplaza progresivamenter de la ontología del número -¿qué objetos son los números?, ¿cuál es su naturaleza?- hacia la epistemología; la preocupación derivó hacia cuestiones sobre la formación del concepto de número como, en general, ocurre con otros campos del conocimiento matemático. Durante el siglo XVII y primera mitad del XVIII la física matemática sigue dos formulaciones diferentes que contraponen, en primer lugar, a Descartes con Galileo y, posteriormente, a los seguidores de Leibniz con los de Newton. En una de estas formulaciones el procedimiento es la deducción y el instrumento la geometría o el cálculo formalizado; en la formulación alternativa el procedimiento es la observación y el instrumento es la experiencia. Esta disyuntiva también se manifiesta en la conceptualización del número, respecto a la que se contraponen dos posiciones: quienes consideran que el concepto de número es empírico, y se forma por abstracción de cosas particulares, y quienes consideran que el concepto de número es enteramente a priori.

En la segunda mitad del siglo XVIII Kant identifica como problema central de la filosofía las relaciones entre dos clases de representaciones: "formales" (conceptos) y "materiales" (intuiciones), a las que considera igualmente reales pero irreductiblemente distintas. Su propuesta se dirige a reconciliar "la afirmación cartesiana de que podemos tener certeza únicamente de nuestras ideas, con el hecho de que ya teníamos certeza -conocimiento a priori- de lo que parecían no ser ideas. Su propuesta se basaba en la idea de que sólo podemos tener conocimiento a priori de los objetos si los constituimos"(Rorty). Kant vuelve a considerar el conocimiento matemático centrado en las disciplinas básicas: Aritmética y Geometría, y basa su reflexión filosófica sobre las matemáticas en estas disciplinas; hace nacer la realidad matemática de una "función pura de la imaginación productora", que subordina bajo los conceptos de cantidad, las formas del espacio y del tiempo. La Aritmética para Kant es la ciencia de las cosas numeradas, y es la naturaleza de las relaciones entre las cosas mismas la que decide en las relaciones entre los números. Kant tiene igual preocupación por la Aritmética que por la Geometría.

Para Kant la noción de número no es un concepto, es un "monograma de la imaginación pura a priori", un esquema. Pero no se trata de un simple ejemplo de esquema; es, en el orden de la cantidad, el esquema único mediante el que se constituyen las nociones cuantitativas; es decir, el número es la condición de nuestro conocimiento sobre cantidades. Desde el momento en que el esquematismo es un proceso dinámico, capaz de aplicarse a la representación espacial, pero independiente en sí del espacio, encuentra su expresión cuantitativa en el número, que tiene un origen empírico en la configuración espacial, pero que en su producción trascendental se define sólo por el tiempo. "*El esquema puro de la cantidad, en tanto que ella es un concepto del entendimiento, es el número, que es una representación que comprende la adición sucesiva de la unidad a una unidad (homogénea). Así, el número no es otra cosa que la unidad de la síntesis de lo diverso con una intuición homogénea, en general, siendo que yo produzco el tiempo mismo en la aprehension de la intuición*" (Kant, citado por Brunschvigg). No concluye de ahí que la Aritmética sea la ciencia del tiempo, como la Geometría es la ciencia del espacio. El tiempo no es un objeto, es una condición de la Aritmética y de la matemática en general.

El planteamiento de Kant encuentra una grave dificultad: si el número es el esquema de la cantidad en general, ¿cómo concebir la relación de lo finito y lo discontinuo, que son los caracteres aparentes del número, con lo infinito y lo continuo, que son los caracteres aparentes de la cantidad? La doctrina de las antinomias permite a Kant incorporar esta disyuntiva a su filosofía, que analiza pero no resuelve. El aparato conceptual de la matemática de la época no disponía de un concepto integrador que permitiese dar respuesta a la disyunción planteada. Habrá que esperar a la construcción del concepto de número real a finales del siglo XIX para contemplar una síntesis de las oposiciones y disyuntivas planteadas; pero en la noción de número de Kant se ve la insuficiencia de un concepto de número basado en el sistema de los números naturales para dar respuesta a las necesidades de la filosofía de la ciencia de finales del siglo XVIII.

A comienzos del siglo XIX se considera que el sistema de los números naturales tiene fuerza conceptual suficiente para convertirse en base de la matemática. Tras la crisis derivada de las geometrías no euclídeas, el sistema de los números naturales se presenta como fundamentación del edificio completo de la matemática. En este caso, si el punto de partida es la noción de número natural, debe considerarse inconveniente tratar de definir el concepto de número natural a partir de otras nociones previas. La noción de número natural establece el vínculo entre lo inteligible y lo real, por ello se busca en esta noción la medida de la realidad. Se asiste al desarrollo del Aritmetismo, teoría de técnicos que trabajan sobre ideas claras y distintas, dejando fuera de sus estudio todo tipo de controversia metafísica. Cauchy propone en este marco una concepción completamente aritmética de la noción de límite de una función en un punto, basada en valores exactos que se asignan a la variable; mediante una combinación de términos aritméticos es posible definir nociones como la de número irracional o la de imaginario. Este es el camino que sigue la aritmetización del análisis en esta época. Los números naturales se suponen realidades dadas, comparables con los objetos de las ciencias naturales. La conocida sentencia de Kronecker: "*Los naturales los hizo Dios, todos los demás números son obra de los hombres*", resume el punto de vista de la época según el cual el resto de los sistemas numéricos no puede aspirar al mismo tipo de objetividad.

Pero, a la larga, este planteamiento conduce a un nuevo problema. La noción de número natural, bien corresponda a una forma del entendimiento bien a realidades de la naturaleza, parece tener una verdad intrínseca y necesaria. Ahora bien, esta verdad no se transmite al resto de los sistemas numéricos sobre los que se fundamentan el álgebra y el análisis; la posición aritmetista se ve abandonada por la percepción de verdad. O, alternativamente, todas las partes de la matemática han de buscar un fundamento con la misma exactitud y rigor. Históricamente se llega de este modo a la búsqueda de alternativas entre las que destacan, por un lado, la fenomenología de Husserl y su teoría de la objetividad ideal y, por otro, las corrientes de investigación lógica orientadas a conectar las verdades aritméticas con el cálculo lógico de clases.

A mediados del siglo XIX el programa de investigación lógica se propone descargar de la noción de número todo lo que ha permitido ver en él un objeto de intuición, una realidad natural, para no conservar más que los caracteres necesarios del sistema. Hay que disociar las leyes del proceso numerante de la existencia de las cosas numeradas. En la introducción de *Los Fundamentos de la Aritmética*, Frege señala que "*No hay que tomar por definición la descripción de cómo surge una imagen, ni hay que considerar que la indicación de las condiciones mentales y corporales, para hecernos conscientes de un enunciado, constituyen su demostración, ni tampoco confundir el acto de pensar un enunciado con su verdad*". Por ello se trata de determinar el mínimo de condiciones requeridas para fijar las reglas del simbolismo operatorio. Son varios los investigadores que se esfuerzan en esta dirección.

Así, Helmhotz (1887) establece una fundamentación, sobre base ordinal, en la que los números son una serie de signos arbitrarios a los que se aplica un modo determinado de sucesión, conocido como sucesión natural. La aritmética no es otra cosa que el relato de las operaciones que el espíritu puede entretenerse en hacer con estos simbolos. Helmhotz trata de evitar la noción de cardinal; su fundamentación está en la serie ordinal y en el acto de contar.

Con el desarrollo de la lógica de clases, que despega con Boole en 1847, así como de la lógica de las proposiciones y de las relaciones, los matemáticos disponen del aparato técnico para llevar adelante el programa logicista. Peano trata de obtener con el menor número de convenciones todas las proposiciones matemáticas; en particular, deriva la noción de número natural de 5 axiomas. Frege se propone establecer que los teoremas aritméticos son enunciados analíticos. Utilizando la noción de equipotencia de conjuntos establece que "el número de una clase es la clase de todas las clases similares a la misma". Pero el programa logicista no resulta de fácil ejecución, como pudieron comprobar Russell y Whitehead. Hay que recordar que el enunciado "1+1 = 2" se presentaba en el volumen II de los *Principia Mathematica* como un teorema, precedido por casi 800 páginas.

La inevitable artificiosidad junto con las contradicciones y limitaciones del programa logicista van acompañadas, casi desde sus comienzos, por una fuerte crítica intuicionista. Uno de los críticos mas lúcidos y radicales es Poincaré, quien pone de manifiesto que la lógica formal es incapaz de llegar a la afirmación de una verdad categórica.

Otro programa alternativo es el constructivista, para el que los objetos matemáticos sólo existen si pueden construirse; presenta dos corrientes bien diferenciadas: el formalismo y el intuicionismo. El programa formalista está ligado a David Hilbert, quien establece cuatro grupos de axiomas: axiomas de enlace, de cálculo, de disposición y los axiomas de la constancia, para su fundamentación de los sistemas numéricos. Desde esta perspectiva el sistema de los números naturales es un conjunto específico de signos que se unen de acuerdo con las reglas de las expresiones bien formadas, dando lugar a fórmulas bien definidas, a partir de las cuales se pueden señalar ciertas expresiones como teoremas. Desde el planteamiento axiomático, la distinción entre naturales y reales no tiene una función constitutiva sino simplemente pedagógica o heurística. Hilbert estableció que la realidad de los entes matemáticos se reduce a demostrar que el sistema formal respectivo no presenta contradicciones; también exigió que la consistencia de un sistema matemático debiera demostrarse exclusivamente con ayuda de métodos finitos.

Los dos teoremas de Gödel supusieron un golpe definitivo para el programa de Hilbert. El primer teorema establecía que cualquier sistema formalizado libre de contradicción, que abarcase la teoría elemental de los números naturales, es incompleto en el sentido de que siempre puede construirse un enunciado no decidible en el propio sistema. Ningún sistema que contenga los números naturales es formalizable. El segundo teorema probó que la teoría elemental de números no puede mostrarse libre de contradicciones sólo con métodos finitistas. Aunque el estudio de la estructura lógica de los sistemas axiomáticos sigue siendo un campo de investigación importante, Gödel mostró que el programa formalista no fundamenta el sistema de los números naturales.

El intuicionismo se basa en un retorno al concepto de construcción en Kant; establece que toda afirmación de existencia que aparezca en matemáticas debe apoyarse en un procedimiento que permita encontrar o construir la entidad afirmada. Según Brouwer el término intuicionismo proviene de que los números naturales brotan en el sentido interno por una especie de intuición originaria del acto de contar. Los intuicionistas rechazan el infinito actual y dan una importancia destacada al infinito potencial, como ya hizo Aristóteles; también rechazan el principio del tercio excluso y de la doble negación. El intuicionismo ha conseguido que se conceda cada vez mayor importancia al principio constructivo, sin embargo deja sin fundamentación partes considerables de la matemática que necesitan de principios no admitidos por el intuicionismo.

Con las limitaciones señaladas es posible adoptar una postura formalista, logicista o intuicionista respecto al concepto de número natural dentro de la filosofia de la matemática. En cada caso se tiene una interpretación diferente del concepto de número, que lleva a modificaciones en la presentación de los restantes sistemas numéricos. Las tres opciones de fundamentación plantean de nuevo la cuestión ontológica y sólo ofrecen una respuesta parcialmente satisfactoria. El aparentemente simple concepto de número natural muestra una complejidad que no se ha dejado controlar en su totalidad hasta el momento.

Pero de nuevo conviene no olvidar las cuestiones epistemológicas. Tres son las posiciones actuales sobre el origen y formación del concepto de número natural: la denominada empirista radical, la apriorista y la conceptualista, que actualizan planteamientos ya surgidos a lo largo de la historia y que abordan la cuestión de la aplicabilidad del conocimiento numérico.

Heredero de la tradición filosófica alemana, influído por Husserl, el matemático alemán Hans Freudenthal marcha en 1930 a Holanda a trabajar con Brouwer, interesado por el planteamiento intuicionista, y allí desarrolla su carrera como matemático, junto con sus propios planteamientos filosóficos sobre el conocimiento matemático a los que denomina Fenomenología Matemática, que han tenido una influencia considerable en educación matemática. El planteamiento de Freudenthal era así: las matemáticas son un instrumento cognitivo (conocimiento público) para organizar, estructurar y matematizar partes de la realidad. Mediante este organizar, estructurar y matematizar, cada individuo se apropia personalmente de las matemáticas. Hay que volver a la historia, en particular, y comprobar cómo fue descubierto cada conocimiento mediante ensayo y error en su época. Describir cómo las matemáticas organizan los fenómenos. Mostrar cómo las cosas pensadas (noumena) describen los fenómenos (phenomena), los analizan y los hacen accesibles para el pensamiento y el cálculo, ayudan a entenderlos mejor, y permiten predecirlos y, en su caso, controlarlos. Esto se denominó fenomenología, el método fenomenológico como lo vio Freudenthal. Mediante el análisis fenomenológico se logra una realización cognitiva que expresa cómo la cosa pensada puede organizar un fenómeno. La fenomenología didáctica se orienta en particular a la adquisición de todo aquello que se necesita para tal organización. De este modo revisó una gran cantidad de fenómenos que estaban en la base de los conocimientos numéricos.

"*Las matemáticas surgen de los fenómenos: abstraen, organizan y estructuran grandes familias de fenómenos, dando lugar a los conceptos matemáticos. La Fenomenología de los conceptos, estructuras e ideas matemáticas significa su consideración a partir de las relaciones con los fenómenos para los que fueron creados y a los que se ha extendido, y su descripción mediante ella del proceso de aprendizaje de la humanidad; en tanto que se implica en el proceso de aprendizaje de las generaciones* *jóvenes, se trata de Fenomenología Didáctica, un camino para mostrar al profesor los lugares por donde el aprendiz debe caminar en el proceso de aprendizaje humano. No en su historia sino en el proceso de aprendizaje que aún continúa, lo cual significa que se debe prescindir de las vías muertas y reforzar y aprovechar las raíces vivas*".

"*Los conceptos son el núcleo de nuestras estructuras cognitivas. Pero en las actuaciones usuales no se consideran como materia de enseñanza. Aunque los niños aprenden lo que es una silla, lo que es un alimento o la salud, no se les enseñan los conceptos de silla, alimento y salud. Las matemáticas no son diferentes. Los niños aprenden lo que es un número, lo que es un círculo, lo que es sumar, lo que es trazar una gráfica. Ellos lo captan como objetos mentales y los utilizan en actividades mentales. Es un hecho que los conceptos de número y círculo, de suma y trazado de gráficas son suceptibles de mayor precisión y claridad que los de silla, alimento y salud. Por ello, es usual que los profesores prefieran enseñar el concepto de número antes que los números y, en general, los conceptos antes que los objetos y actividades mentales. Pero es necesario buscar aquellos fenómenos del entorno de los niños que pueden matematizarse mediante ciertas partes de las matemáticas*". (Freudenthal)

La diferencia entre fenomenología y fenomenología didáctica puede hacerse explícita. En el primer caso una estructura matemática se tratará como producto cognitivo que describe sus objetos posiblemente no matemáticos de una determinada forma; en el segundo caso, se considerará como materia de enseñanza y aprendizaje, que es un proceso cognitivo.

La posición de Freudenthal muestra que las cuestiones filosóficas y epistemológicas en matematicas no son triviales para su enseñanza y transmisión, para el modo en que los profesores planifican el conocimiento que van a presentar a los escolares. Esto ocurre desde la complejidad de nociones básicas como el concepto de número natural, hasta los conceptos matemáticos mas avanzados. Pero el planteamiento de Freudenthal muestra que para encontrar respuestas a las cuestiones planteadas desde el marco de la filosofía sobre el conocimiento numérico no es suficiente una respuesta filosófica, hay que contar con otros ámbitos. Cuando también hay que satisfacer necesidades educativas, el planteamiento epistemológico es sólo la primera parte de un plan de acción.

Cognición numérica

Desde los comienzos de la Educación Matemática como disciplina se detecta un interés considerable por los procesos de pensamiento matemático y se estimula la colaboración con psicólogos para el estudio de los procesos de pensamiento y creación matemática y para la investigación sobre aprendizaje de los escolares. En el primer número de la revista *L'Enseignement Mathématique*, publicada en 1899, aparece un trabajo de Poincaré sobre la creación matemática, un artículo de Binet sobre pedagogía científica, y un cuestionario dirigido a más de 100 matemáticos profesionales para determinar las condiciones de la creación matemática. Desde comienzos de siglo hay un grupo significativo de estudiosos e investigadores que se plantean las mismas preguntas generales de la psicología, pero referidas al contenido matemático: ¿cómo piensa la gente en matemáticas?, ¿cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos?; en general, estos especialistas estudian cómo contribuye la experiencia y el intelecto a lo que se denomina capacidad matemática (Resnick). El campo que estamos describiendo necesita de un fomación científica dual: el conocimiento de las estructuras de la matemática y el conocimiento de cómo la gente piensa, razona y utiliza sus capacidades intelectuales. En el estudio de cómo se interrelacionan el contenido matemático y el pensamiento humano surge un campo específico, conocido en la comunidad científica como Psicología de las Matemáticas. Dentro de este campo han ocupado un lugar preferente y diferenciado los estudios sobre cognición numérica, por el interés intrínseco y las propias peculiaridades de estos conocimientos.

En las investigaciones realizadas por Thorndike sobre la formación de vínculos y los trabajos para establecer "la ley del efecto", ocupa un lugar prioritario el sistema de los números naturales. En 1922 Thorndike publica la *Psicología de la Aritmética*, donde sostiene que el aprendizaje aritmético consiste en establecer y reforzar las asociaciones necesarias entre piezas de conocimiento numérico. Sin negar la posibilidad de la transferencia en los aprendizajes, defendió que la práctica seguida de recompensas es uno de los medios más importantes del aprendizaje humano. Estudió cuidadosamente cadenas y secuencias de asociaciones que debieran conducir desde el aprendizaje de los hechos numéricos básicos a formas más elaboradas de conocimiento aritmético. Estableció ordenaciones de problemas en función de su dificultad y trató de optimizar la eficacia de la práctica. Justificó el uso de ejercicios y reforzó los vínculos estímulo-respuesta; de esta manera consiguió mejorar la velocidad y la precisión en los problemas de cálculo. Sin embargo, la variedad de tareas que estudió no consiguió alcanzar un alto nivel de complejidad cognitiva, sino que interpretaban los sistemas numéricos como colección de vínculos aislados sobre los que se trataba de adquirir automatismos, olvidando su carácter de sistema integrado, con relaciones múltiples. También sus planteamiento fueron criticados por la insistencia en la realización de ejercicios elementales que no desarrollan el pensamiento numérico.

Brownell, con su defensa del aprendizaje significativo de la Aritmética, tomó en consideración la complejidad del conocimiento numérico, y abordó su estudio en una serie de investigaciones que aún hoy día conserva interés; se basó en una variedad de técnicas, que incluían entrevistas individuales detalladas y análisis rigurosos de los datos encontrados, y sirvió de contrapunto a los estudios conexionistas.

A comienzos de la década de los 60, Gagné se propuso explicar, mediante la denominada "teoría del aprendizaje acumulativo", por qué los aprendizajes sencillos facilitan conocimientos complejos; una técnica de análisis utilizada sistemáticamente fue la jerarquía de los aprendizajes. Gran parte de los ejemplos que utiliza Gagné para ilustrar su teoría se refieren a tareas aritméticas, a cuyo análisis exhaustivo y verificación empírica dedica grandes esfuerzos. Las jerarquías de aprendizaje se utilizan como hipótesis de trabajo, que hay que probar, revisar y validar. Igualmente se emplean como esquemas para secuencias de trabajo en la práctica, dando lugar a los estudios sobre entrenamiento. La teoría del aprendizaje acumulativo implica para la enseñanza que toda tarea se puede disgregar en componentes más sencillas; por las posibilidades analíticas que presenta el sistema numérico se presta especialmente a este tipo de planificación. Una jerarquía bien estudiada debe posibilitar pruebas y tests diagnósticos para situar a los individuos en función de sus niveles de habilidad. También han de determinar ciertas relaciones de transferencia y de requisitos previos. Las jerarquías de aprendizaje sugieren un orden para la enseñanza y sirven de base para la toma de decisiones que permite adaptar la enseñanza a las diferencias individuales. El análisis racional de tareas es una herramienta práctica que complementa la aplicación de las jerarquías de aprendizaje a la enseñanza.

Avances posteriores en el campo de la psicología han llevado a los especialistas en cognición a estudiar los procesos de pensamiento mediante el análisis empírico de la realización de tareas; es decir, a desarrollar modelos generales de ejecución con los que se puedan contrastar las realizaciones individuales. Los estudios principales han estado orientados a analizar la conducta real de los niños ante tareas de cálculo numérico. Entre los estudios sobre el procesamiento mental para ejecutar tareas aritméticas se encuentran: las investigaciones sobre conteo y subitización, de finales de los 70, y las más recientes sobre estimación de cantidades discretas; la comparación de diferentes modelos para la realización de las operaciones aritméticas, donde se estudia el tiempo de reacción ante una operación concreta y se compara con el número de pasos que conjetura cada uno de los modelos, para ajustar el modelo que mejor se adecue a la ejecución real; el estudio de los errores sistemáticos en el cálculo y en la resolución de problemas aritméticos verbales, los patrones encontrados y la interpretación de los mismos; la simulación de la resolución de problemas mediante ordenador. Todas estas investigaciones se centran en determinar y describir con la mayor precisión posible los procesos y capacidades implicadas cuando niños, jóvenes y adultos acometen la realización de tareas aritméticas.

Desde la psicología de la Gestalt se postula que el pensamiento y la percepción están orientados hacia una percepción de la estructura. De este modo, tanto la percepción como el pensamiento, logran una organización superior al agregado de elementos o estímulos singulares; el todo predomina sobre las partes y es la estructura global la que define las funciones e interrelaciones entre las partes. Wertheimer, psicólogo gestaltista, trabajó sobre problemas matemáticos en la década de los 50 para poner de manifiesto el pensamiento basado en la aprehensión de una estructura. Uno de los problemas que estudió con mayor interés es el de la suma de los términos de una progresión aritmética, utilizando diferentes presentaciones que pusiesen de manifiesto la estructura de relaciones entre los términos de la progresión. Desde la misma posición teórica, Duncker estudió las estrategias generales para la resolución de problemas, distinguiendo entre procesos ascendentes y descendentes, pero basados en la apreciación de un principio estructural común; los ejemplos numéricos son abundantes en los problemas estudiados por Duncker.

Polya, desde una formación profesional matemática, se considera cercano a los planteamientos gestaltistas con su estudio de los heurísticos para la resolución de problemas. La heurística facilita que el resolutor de un problema actúe de forma sistemática para lograr la comprensión, el *insigth*, del mismo. En vez de suponer que la comprensión de una estructura es producto del azar, hay una planificación para su alcance; esta idea ha dirigido gran parte de las investigaciones sobre resolución de problemas en matemáticas.

Los estudios sobre visualización tratan de establecer el papel que juegan las imágenes visuales en el pensamiento matemático y, en particular, en el aprendizaje de las matemáticas escolares. Castro (1994) hace una revisión de las investigaciones sobre visualización; a partir de la década de los 80 se han estudiado la naturaleza y características de las imágenes visuales en el descubrimiento y comprensión de conceptos y relaciones matemáticas. Investigadores como Suwarsono, Presmeg y Tall han realizado estudios destacables en este marco. El papel de la visualización en el aprendizaje de conceptos numéricos propone una revisión de los sistemas de representación empleados en cada uno de tales sistemas y una recuperación de las representaciones con soporte visual. De esta manera, las configuraciones puntuales utilizadas en la época griega y los números figurados han constituido el núcleo de investigaciones orientadas al estudio del pensamiento numérico. También se vienen realizando estudios sobre otro tipo de representaciones, como las relativas al esquema de la recta numérica, tanto en el caso del sistema de los números naturales, como en el sistema de los números racionales y el de los números reales. Las investigaciones sobre visualización se han enmarcado en los trabajos sobre habilidad matemática, dedicados al estudio del pensamiento matemático. También el pensamiento numérico se caracteriza mediante los tres criterios establecidos por Mayer: el pensamiento es cognitivo, pero se infiere de la conducta; el pensamiento es un proceso que establece un conjunto de operaciones sobre el sistema cognitivo; el pensamiento es dirigido y tiene como resultado la resolución de problemas.

Los trabajos de Piaget y la escuela de Ginebra sobre el estudio de las estructuras cognitivas y su evolución han sido una de las grandes aportaciones de la psicología al esclarecimiento de la cognición humana. Piaget se preocupó específicamente del proceso y del desarrollo del pensamiento; entre sus trabajos, los estudios dedicados al desarrollo del concepto de número natural han marcado la línea de reflexión para generaciones de investigadores posteriores. El concepto de estructura del pensamiento, su caracterización evolutiva, las nociones de operación y su reversibilidad, y el distinto comportamiento de los sujetos a lo largo de su desarrollo, llevaron a Piaget a conjeturar la existencia de distintas etapas en el desarrollo del pensamiento. La evolución del concepto de número se convierte en uno de los criterios para caracterizar cada una de las etapas establecidas. Aunque gran parte de la crítica a Piaget desde la psicología matemática se centró en discutir la precisión con la que dichas etapas estaban delimitadas, la idea central se ha mantenido: la construcción del concepto de número natural es uno de los rasgos característicos del pensamiento humano y de su consideración evolutiva. Hoy día se sigue investigando en la evolución del pensamiento lógico y matemático, entre cuyos elementos esenciales se encuentra el conocimiento sobre el sistema de los números naturales.

Las aportaciones de Piaget al pensamiento numérico no quedan limitadas a los estudios evolutivos; su profundo conocimiento de la matemática, de su historia y filosofía, le permitió analizar la construcción operacional del número desde un marco teórico más completo, que denominó epistemología genética, y que ha servido de referencia obligada para todos los investigadores posteriores en este campo.

En su planteamiento actual, *se denomina psicología cognitiva al análisis cientiíico de los procesos mentales y estructuras de la memoria humana con el fin de comprender la conducta humana* (Mayer). En el estudio de la conducta humana se han singularizado, en términos generales, cuatro áreas de indagación: análisis del sistema de procesamiento de la información; análisis de procesos cognitivos; análisis de estructuras cognitivas; y, finalmente, análisis de estrategias. Cada una de estas grandes áreas ha estudiado amplia y extensamente la conducta humana en relación con el sistema conceptual de los números naturales.

Podemos asegurar que hoy día existe un gran cuerpo de conocimiento fundado sobre el modo en que los seres humanos utilizan y trabajan la herramienta conceptual que denominamos sistema de los números naturales. Este conocimiento, que se propone caracterizar las funciones cognitivas propias del sistema, interesa al educador que tiene que trabajar con niños y adolescentes en el período de su formación, y a los que tiene que ayudar en su construcción de las estructuras numéricas.

Pero la explicación y justificación en los términos propios de la psicología cognitiva no son suficientes. La interpretación de los modos cognitivos de uso de una estructura conceptual, como la del sistema de los números naturales, dependen no sólo del marco psicológico sino también, como estamos viendo, de la propia estructura y del campo de fenómenos en cuya organización se ocupa y sobre cuyos problemas actúa.

El número: herramienta cultural

La noción de cultura que interesa al educador no está confinada en los libros de historia o filosofía de la matemática y de la ciencia, ni tampoco en los informes de etnógrafos y antropólogos. Nos interesa, por supuesto, conocer detalladamente la gran variedad de acciones, términos, símbolos, técnicas, y recursos empleado por la humanidad para construir y utilizar estas herramientas intelectuales denominadas números, y los modos de su empleo para comunicar conocimientos y organizar grandes parcelas de la actividad científica, económica, cultural y social a lo largo de la historia. Pero este interés no es pura erudición.

Constatamos que el sistema de los números naturales es una herramienta con un campo de aplicaciones y significaciones preciso en nuestra sociedad; su consideración cultural lleva a varias reflexiones que interesan al educador.

En primer lugar, los números están presentes en la práctica social cotidiana. El mundo del trabajo incluye el conocimiento de horarios, retribuciones, manejo de cuentas corrientes, pagos y adquisiciones. La admistración del tiempo, del dinero y la gestión de cantidades de determinados materiales, ya sean ladrillos, tomates, medicinas o software informático, forma parte de la práctica usual de la población adulta, en toda la gama de niveles laborales y sociales. Determinar el campo de las aplicaciones y usos numéricos de cada una de las profesiones y actividades laborales de nuestra sociedad actual ha sido objeto de debate y reflexión en algunos estudios sobre necesidades de formación, y ha resultado sorprendente comprobar la ubicuidad y relevancia del sistema decimal de numeración en todas ellas (Cockcroft). Para abordar los más variados problemas que surgen en distintos campos profesionales la herramienta que llamamos número natural es imprescindible; esto ha dado lugar a reconocer en la competencia numérica una de las competencias básicas que debe cubrir cualquier ciudadano, con carácter general, y cualquier trabajador, con carácter profesional. La capacidad para afrontar confiadamente las exigencias numéricas de la vida cotidiana y del campo profesional correspondiente incluye, básicamente, la familiaridad con los números y las destrezas que permiten su uso y la comprensión de información presentada en términos numéricos.

En segundo lugar, y haciendo abstracción del campo profesional concreto en que utilicemos los números naturales, es importante considerar los contextos en que se utilizan los números para un propósito específico. Un contexto numérico es un marco estructural en el que el número satisface una determinada función como instrumento de conocimiento. Son varios los contextos numéricos del sistema de los números naturales.

El contexto más sencillo es el de contar; en este caso hay que asignar los términos de la secuencia numérica a los objetos de una coleccion, bien señalando cada objeto o marcando pautas y realizando espaciamientos temporales. El aprendizaje de los números en nuestra cultura se inicia mediante el dominio de la secuencia numérica, al igual que ha ocurrido en la historia de la humanidad. Todos tenemos la experiencia de haber enseñado a nuestros hijos o familiares cercanos la secuencia de los primeros números mediante algún tipo de recitado, canción o cantinela, cuya comprensión se ha ido perfeccionando progresivamente, y que ha servido para marcar y distinguir objetos.

Un segundo contexto se denomina cardinal; encontramos un contexto cardinal o de cardinación cuando queremos dar respuesta a la cuestión ¿cuántos hay? ante una colección discreta de objetos distintos. En contextos cardinales los números naturales satisfacen una de sus funciones mas importantes como instrumento de conocimiento y de legitimación.

Los contextos de medida permiten conocer la cantidad de unidades de alguna magnitud continua; en este caso los números proporcionan respuesta a la pregunta ¿cuánto mide?

Un cuarto tipo lo constituyen los contextos ordinales en los que se quiere conocer la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y ordenado; proporcionan respuesta a la pregunta ¿qué lugar ocupa?

Los contextos operacionales son los más fecundos, en todos ellos hay que dar respuesta a la cuestión ¿cuál es el resultado? El sistema de los números naturales tiene un amplio campo de aplicaciones operatorias, ofreciendo un modelo para determinadas acciones reales sobre objetos y cantidades. Las acciones de agregar, separar, reiterar y repartir expresan multitud de transformaciones con los objetos; también se pueden establecer relaciones de comparación e igualación. Todas estas acciones tienen su expresión en el sistema de los números naturales mediante las operaciones aritméticas básicas que, a su vez, satisfacen las cuestiones cuantitativas que se plantean con las acciones mencionadas. Son las operaciones numéricas las que dotan al sistema de su gran poder modelizador, las que permiten considerarlo como algo dinámico. También actúan como un conjunto de reglas de valor indiscutible. Expresiones como "2+2 = 4" se utilizan para reforzar la idea de que existen verdades indiscutibles y certezas absolutas en nuestro mundo

Finalmente, un sexto tipo de contextos, menos convencional, lo constituyen los denominados contextos simbólicos en los que los números se utilizan para distinguir y denominar clases de fenómenos o elementos, confundidos a veces con etiquetas.

El sistema de los números naturales es una herramienta que permite responder a una variedad de cuestiones que se plantean en diferentes contextos; su potencialidad se pone de manifiesto en el extenso uso social alcanzado. Ahora bien, las representaciones matemáticas son construcciones sociales. Los sistemas numéricos están integrados y reflejan las visiones del mundo. Las visiones del mundo son productos de las estructuras sociales creadas por la gente cuando se esfuerza por determinar y utilizar patrones y regularidades. El éxito de las estructuras sociales y las visiones del mundo son una medida de la extensión con la que proporcionan acceso al conocimiento en toda su amplitud, multiplicidad y profundidad y no a una realidad ilusoria o a una visión estrecha del mundo real.

Por todo lo anterior conviene, en tercer lugar, considerar, brevemente, los hábitos de comportamiento numérico en el ámbito de las relaciones humanas. El conocimiento numérico que las personas concretas ponen en funcionamiento en su práctica diaria es distinto del uso formal que puede hacer el especialista. Obviamente, tiene que haber unas competencias numéricas básicas para que pueda hablarse de conocimiento numérico, pero estas competencias tienen niveles muy distintos de concreción y los sistemas de prácticas en que se sustentan varían entre sectores sociales distintos, de unos habitats a otros, y de unas sociedades a otras. Un ejemplo sencillo clarifica la importancia de la práctica cotidiana en el dominio del sistema de numeración. Cada país tiene un sistema de precios, basado en la propia potencia económica y en una moneda que establece el valor tipo; el papel moneda y las monedas toman valores numéricos, de orden muy distinto entre unos países y otros. Hay países cuya economía doméstica básica funciona con números de dos dígitos y emplea números decimales, mientras que en otros son necesarias cantidades de tres y cuatro dígitos y no utilizan decimales. En el primer caso el conocimiento y práctica con decimales y las operaciones con números de dos dígitos es muy precisa, mientras que el dominio práctico con cantidades de cuatro o más cifras es escaso o inexistente; en el segundo caso el conocimiento de los decimales será un conocimiento especializado, siendo más frecuente una destreza en operaciones con números de cuatro o cinco cifras. Para el ciudadano medio de nuestra sociedad el sistema de los números naturales está incardinado en una serie de prácticas, de las que sólo algunas coinciden con aspectos convencionales del sistema. En la mayoría de los casos da prioridad a sólo una parte de las reglas y representaciones del sistema, hace un uso amplio de la aproximación, utiliza destrezas no estandarizadas para sus cálculos, trata de solucionar la mayoría de los problemas aditivamente, evitando la multiplicación excepto cuando se ve forzado explícitamente a ello. Hay un predominio de las relaciones aditivas sobre las multiplicativas en la práctica usual de la aritmética que indica que, aun cuando el sistema escolar transmite desde edades tempranas las estructuras aditiva y multiplicativa de los números naturales, los hábitos numéricos de nuestra sociedad favorecen por su mayor sencillez la interpretación aditiva sobre la multiplicativa; cuando un sujeto se encuentra ante una cuestión numérica desconocida, que implica algunos cálculos, es usual que trate de resolverla inicialmente mediante relaciones aditivas.

Estos tres ámbitos de reflexión: la práctica profesional, los contextos numéricos y los hábitos y prácticas usuales en el empleo de los números, ponen de manifiesto tres modos de considerar el sistema de los números naturales como una herramienta intelectual determinada socialmente. En esta determinación social no está excluída la caracterización que hace la matemática del conocimiento numérico como objetivo, preciso, abstracto, riguroso y unívoco, pero consideramos que limitar la actividad numérica a sólo sus aspectos fomales ha sido un punto de vista convencional muy restrictivo y limitado, que ha empobrecido su análisis fenomenológico al excluir sus dimensiones sociales y ha proporcionado a la comunidad científica y educativa una perspectiva deficiente y equivocada.

Consideración crítica del conocimiento numérico

Una visión crítica de la educación matemática destaca la importancia de considerar diferentes perspectivas por lo que se refiere al conocimiento (Skovmose), que nosotros ejemplificamos para los números naturales. En primer lugar, el sistema de los números naturales es un conocimiento matemático, abarca una serie de competencias formales que se suelen centrar en el dominio del sistema decimal de numeración, de la estructura aditiva y de la estructura multiplicativa. En segundo lugar, el sistema de los números naturales es también conocimiento tecnológico, ya que se refiere a la capacidad para aplicar unos determinados conceptos y procedimientos a la resolución práctica de problemas y, de un modo más sistemático, a la consecución de metas tecnológicas; este tipo de conocimiento constituye la concreción más potente de las aplicaciones del conocimiento numérico al correspondiente campo de fenómenos en las sociedades avanzadas. En tercer lugar, el sistema de los números naturales debe ser parte del conocimiento reflexivo, es decir, de aquel que tiene que ver con la evaluación y la discusión general de lo que se identifica como propósito tecnológico y con las consecuencias éticas y sociales de abordar dichos objetivos con los instrumentos elegidos. El planteamiento crítico sostiene que el conocimiento numérico está conectado con la vida social de los hombres, que se utiliza para tomar determinadas decisiones que afectan a la colectividad y sirve como argumento de justificación; por lo tanto, debe ser analizado y evaluado no sólo en sus fundamentos sino también en sus aplicaciones

En la dicotomía matemática pura/ matemática aplicada, el proceso de modelización se concibe como la vía mediante la cual las matemáticas realizan su tarea organizadora y estructuradora. El sistema de los números naturales ofrece uno de los instrumentos mas potentes para la modelización matemática de multitud de actividades profesionales, en una variedad considerable de contextos y mediante unas prácticas establecidas y renovadas.

La modelización es una actuación técnica que incorpora sistemas como herramientas intelectuales en grandes parcelas de la realidad social. Para elaborar un modelo hay que identificar elementos de la realidad que puedan considerarse como importantes; también hay que decidir qué relaciones entre los elementos resultan esenciales. De este modo se construye un sistema que aún no es parte de la realidad. El sistema es inicialmente conceptual y está creado mediante ciertas interpretaciones de la realidad, es decir, por medio de cierto esquema teórico para observar la realidad y teniendo en cuenta ciertos intereses para constituir conocimiento. Es necesaria una cierta sistematización de la realidad para proceder a la modelización matemática. Los modelos matemáticos deben ser manejables numéricamente, para lo cual hay que establecer los métodos para realizar los cálculos necesarios. El sistema de los números naturales constituye un ejemplo clave de modelo matemático, base de multitud de de actuaciones técnicas y sociales.

Al utilizar el sistema de los números naturales como modelo matemático el lenguaje de los números y de las operaciones hace invisible el proceso de construcción del sistema y, por esto mismo, se dificulta la identificación de la interpretación específica desarrollada. El pensamiento reflexivo no pretende eliminar las interpretaciones y supuestos sino identificar la naturaleza de la comprensión que ha precedido a la modelización. El pensamiento reflexivo se propone hacer explícitas las condiciones previas al proceso de modelización que permanecen ocultas cuando el lenguaje numérico proporciona una cobertura de neutralidad. La reflexión debe encauzar el modo en que la modelización numérica afecta al contexto completo de la resolución de problemas vista como una empresa técnica (Skovmose). El conocimiento reflexivo tiene que identificar la potencialidad estructuradora del sistema de los números naturales y, al hacer esto, tiene que proporcionar bases para la crítica y la corrección asequibles a todos los ciudadanos.

Siguiendo a Popper, un falsador es una proposición cuya verdad contradice la verdad de una teoría en cuestión. Si encontramos que un determinado falsador es cierto, debemos refutar la teoría o, al menos, considerarla seriamente afectada. Si una teoría ha de tener algún interés, el conjunto de sus falsadores no puede ser vacío. Ha de ser posible falsar una teoría científica; debe estar abierta a la crítica. Reformulando estas ideas en términos educativos, consideramos que debe ser posible criticar las aplicaciones del sistema de los números naturales desde un punto de vista social. Esto significa que los escolares deben recibir formación para articular una crítica a cualquier aplicación tecnológica surgida de los conocimientos matemáticos y de las actuaciones correspondientes para esta aplicación. Pero esta es una de las carencias esenciales del trabajo con las matemáticas en el sistema escolar. Las aplicaciones tecnológicas son triviales y ficticias, el dominio fenomenológico es muy escaso y estereotipado. Los escolares reciben un conocimiento técnico cuya aplicación se les oculta y, lo que es más grave, se les hurta cualquier reflexión crítica sobre la aplicación de tales conocimientos. Sin embargo, el resultado de un proceso de modelización tecnológica conduce básicamente a una acción que se basa en la toma racional de una serie de decisiones.

El sistema de los números naturales por su simplicidad técnica actual, su prioridad en el currículo para la formación obligatoria y su amplio campo de aplicaciones reúne las condiciones adecuadas para estudiar los efectos que tienen los procesos de modelización sobre los principales aspectos de la resolución de un problema tecnológico; es decir, los efectos de la identificación y definición de los problemas, las razones para la elección de una determinada estrategia de resolución y su implementación tecnológica. Al ciudadano común no le interesa tanto la perfección técnica cuanto la efectividad del sistema de los naturales para resolver problemas prácticos. El planteamiento crítico, al abordar el campo de aplicaciones del sistema de los números naturales, permite una evaluación no sólo de las consecuencias técnicas de las decisiones aportadas sino, lo que es más importante, una evaluación ética que tenga en cuenta cómo afecta al contexto cada una de las posibles soluciones alternativas y cómo paliar los efectos negativos que se derivan. Sólo un planteamiento reflexivo sistemático del conocimiento numérico ofrece la oportunidad real de abordar las cuestiones de dominio de la estructura conceptual del sistema, sus aplicaciones tecnológicas y el análisis de las normas y valores implicados. Una escuela orientada hacia la consecución de valores democráticos junto con los formativos individuales debe enfatizar el conocimiento reflexivo de todo el sistema de las matemáticas y, en particular, del sistema de los números naturales.

Conclusión

A lo largo de esta lección hemos presentado una variedad de consideraciones interconectadas, cuyo objeto común ha sido la relación del número natural con los modos de pensamiento y de actuaciones prácticas de mujeres y hombres. Nuestra reflexión se ha centrado en tres elementos fundamentales:

Unos instrumentos conceptuales: sistema de los números naturales, simbólicamente estructurado; su evolución histórica y su análisis conceptual.

Los modos de uso de este sistema simbólico: funciones cognitivas, así como los estudios que se han propuesto delimitar y caracterizar tales funciones como parte del pensamiento humano, su evolución y las condiciones para su aprendizaje.

Los campos de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas, en los que se pone en práctica y se trabaja con este sistema; especial importancia hemos concedido a la reflexión crítica en relación con el período escolar.

A la línea de indagación sistemática que se propone abordar los problemas de transmisión, comunicación y construcción de conocimiento numérico en el sistema educativo la denominamos Pensamiento Numérico. Hemos visto que constituye un campo teórico y de investigación complejo, al que contribuye una gran diversidad de disciplinas, pero que interesa de modo particular a la Didáctica de la Matemática.

Con esta reflexión hemos ejemplificado uno de los campos en los que es posible y necesario abordar desde la Universidad, desde los Departamentos universitarios, la preparación científica, rigurosa, de profesionales cualificados de la educación.

En la perspectiva actual de creación y desarrollo de las facultades de Ciencias de la Educación, de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, hemos de contemplar las funciones y competencias de las nuevas y jóvenes disciplinas que reciben la denominación genérica de Didácticas específicas o especiales. Se trata de la Didáctica de la Expresión Plástica, Didáctica de la Expresión Corporal, Didáctica de la Expresión Musical, Didáctica de las Ciencias Experimentales, Didáctica de las Ciencias Sociales, Didáctica de la Lengua y Literatura y Didáctica de la Matemática. Estas disciplinas ofertan su contribución cualificada a los planes de formación inicial y permanente del Profesorado de los distintos niveles educativos y reclaman su participación plena en cualquier actuación sobre formación de profesores que conecte con las disciplinas correspondientes.

Las Didácticas específicas, junto con las áreas de conocimiento consideradas tradicionalmente núcleo de los estudios educativos: Teoría e Historia de la Educación, Didáctica y Organización Escolar, Psicología Evolutiva y de la Educación, Sociología, Antropología, y Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación, hacen realidad las ideas centrales de un proyecto de Facultad de Educación, conjeturado hace más de 50 años. El necesario compromiso con el mundo de la Educación, que la Universidad debe asumir sin restricciones, tiene su mejor instrumento en esta Facultad.

Como ocurre en los momento iniciales, tenemos ante nosotros multitud de necesidades para planificar un futuro en el que se concrete y profundice dicho compromiso efectivo de la Universidad con el Sistema Educativo del que forma parte. Una de las obligaciones consiste en atender a las necesidades formativas de unos profesionales de la educación cualificados, con formación profesional específica, que no se detenga en planteamientos generalistas. El modelo de una preparación pedagógica complementaria, separada de la formación disciplinar, es un modelo obsoleto y superado por el desarrollo de jóvenes disciplinas. Nuestra contribución quiere contemplar las nuevas necesidades de los educadores en sus respectivos campos de conocimiento y en sus responsabilidades sociales, proporcionando una formación integrada. La reflexión realizada sobre Pensamiento Numérico es sólo un ejemplo del potencial de las disciplinas Didácticas.

Esperamos de la sensibilidad de la comunidad universitaria que haga frente a este nuevo reto, que establezca y mantenga exigencias de calidad y rigor para estos nuevos estudios y disciplinas en los que se actualizan las misiones tradicionales de la Universidad: la creación, desarrollo, transmisión y crítica de la ciencia, de la técnica y de la cultura; la preparación para el ejercicio de actividades profesionales; el apoyo científico y técnico al desarrollo cultural, social y económico, y la extensión de la cultura universitaria.

Referencias

Borges, J.L. (1979) *Discurso en la recepción del Premio Cervantes*

Brownell, W. (1935) Psychological considerations in the Learning and the Teaching of Arithmetic, en Bidwell & Clason (edts) (1970) *Readings in the History of Mathematics Education*. Reston: N.C.T.M.

Brunschvigg, L. (1945) *Las Etapas de la Filosofía Matemática*. Buenos Aires: Lautaro.

Castro, E. (1994) *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuracionea Puntuales*. Granada: Universidad de Granada.

Castro, E.; Rico, L.; Castro, E. (1988) *Números y Operaciones*. Madrid: Síntesis.

Cockcroft, W. (1982) *Mathematics Counts*. Londres: H.M.S.O.

Cortés, G. (1604). *Arithmetica práctica*. Valencia: Imprenta de Juan Chrisóstomo Garriz

Crossley, J.N. (1987) *The Emergence of Number.* Singapore: World Scientific.

Crump, T. (1993) *La Antropología de los Números*. Madrid: Alianza.

Dedekind, R. (1963) *Essays on the Theory of Numbers.* New York: Dover Publications
Euclides (1994) *Elementos. Libros V-IX*. Madrid: Biblioteca Clásica Gredos
Feferman, S. (1989) *The Number Systems. Foundations of Algebra and Analysis*. New York: Chelsea Publishing Company.
Ferrater, J. (1981) *Diccionario de Filosofía.* Madrid: Alianza.
Flegg, G. (1983) *Numbers. Their History and Meaning*. Suffolk: Penguin.
Frege, G. (1972) *Los Fundamentos de la Aritmética*. Barcelona: Editorial Laia.
Freudenthal, H. (1981) Major problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 12.
Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Gagné. R. (1987) *Las condiciones del aprendizaje*. México: Interamericana.
García, M. (1993) *Categorías, intencionalidad y números*. Madrid: Tecnos.
Geertz, C. (1987) *La interpretación de las culturas*. Barcelona: Gedisa.
Gelb, L. (1982) *Historia de la escritura.* Madrid: Alianza.
Gordon, G. (1982) *Los orígenes de la civilización*. México: Fondo de Cultura Económica.
Guzmán, M. (1993) *El Pensamiento matemático, eje de nuestra cultura. Discurso Inaugural del año académico 1993-1994*. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
Høirup, J. (1994) *In Measure, Number and Weitght*. New York: SUNY Press.
Hurford, J. (1987) *Languaje and Number.* Oxford: Basil Blackwell.
Husserl, E. (1992) *Philosophie de l'Arithmétique.* París: Presses Universitaires de France.
Ifrah, G. (1987) *Las Cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza.
Kilpatrick, J.; Rico, L. Sierra, M. (1994) *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Síntesis.
Krings, H.; Baumgartner, H.; Wild, C. (1978) *Conceptos fundamentales de Filosofía*. Barcelona: Herder.
Mayer, R. (1985) *El futuro de la Psicología Cognitiva.* Madrid: Alianza.
Mead, M. (1985) *Educación y Cultura en Nueva Guinea.* Barcelona: Paidós.
Peano, J. (1979) *Los principios de la Aritmética expuestos según un nuevo método*. Oviedo: El Basilisco.
Piaget, J. (1975) *Introducción a la Epistemología Genética. El Pensamiento Matemático*. Buenos Aires: Paidós.
Popper, K. (1979) *El desarrollo del conocimiento científico. Conjeturas y refutaciones*. Buenos Aires: Paidós.
Resnick, L. & Ford, W (1981) *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
Restivo, S. (1992) *Mathematics in Society and History*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Rico, L.; Castro, E.; Castro, E. (1985) Sistemas de Numeración. El sistema decimal. Evolución histórica,. en *Libro Homenaje en la jublilación de D. Manuel Vallecillos*. Granada: Universidad de Granada.

Rorty, R. (1979) *La filosofía y el espejo de la naturaleza.* Madrid: Cátedra.

Russell, B. (1973). *Obras Completas, Ciencia y Filosofía.* Madrid: Aguilar.

Santa Cruz, M. (1754) *Dorado Contador.* Madrid: Imprenta de Joachin Ibarra.

Shapiro, H. (1980) *Hombre, Cultura y Sociedad.* México: Fondo de Cultura Económica.

Skovmose, O. (1994) *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Spengler, O. (1958) *La Decadencia de Occidente.* Madrid: Espasa-Calpe.

Stenhouse, L. (1984) *Investigación y Desarrollo del Currículo.* Madrid: Morata.

Thorndike, E. (1922) *The Psychology of Arithmetic*. New York: The Macmillan Co.

Wertheimer, M. (1991) *El Pensamiento Productivo*. Barcelona: Paidós.

Wittgenstein, L. (1987) *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza.