PROPUESTAS PARA TRANSITAR NUEVOS CAMINOS DESPUÉS DE UN CURSO DE ÁLGEBRA LINEAL

Ana Lucía Hurman, Félix Orlando Sentinelli, Gabriela Beatriz Tomazzeli
Universidad Nacional de Cuyo - Universidad Tecnológica Nacional Argentina
ahurman@uncu.edu.ar
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Superior

Resumen. *Hemos creado un espacio extracurricular para estudiantes de primer año de ingeniería, a partir del interés que muestran en participar de las distintas propuestas que les formulamos al término de un curso de Álgebra Lineal. Las propuestas surgen de la interdisciplinariedad de esta asignatura y nos permite plantearnos como objetivo de nuestro trabajo, mejorar la calidad de los aprendizajes de dichos estudiantes. Para lograrlo, elaboramos un material didáctico que los estudiantes desarrollan con sus conocimientos previos y con nuevos conceptos matemáticos que surgen a partir de la necesidad de encontrar soluciones a distintas situaciones. La concepción de las propuestas conlleva la necesidad de conversión entre distintos registros de representación semiótica, para lograr una mejor comprensión de los conceptos involucrados.*
Palabras clave: Álgebra lineal, aplicaciones, registros de representación

Introducción

Varios son los investigadores en didáctica del Álgebra Lineal, como los grupos franceses, canadienses y estadounidenses (Jean Luc Dorier (2000) hace una excelente recopilación de algunos de estos trabajos), que están preocupados y trabajando sobre distintos aspectos de la problemática relativa al proceso enseñanza - aprendizaje de esta asignatura. Como docentes, en el primer semestre en facultades de ingeniería, coincidimos con esas apreciaciones.

Como el Álgebra Lineal nos permite un importante trabajo interdisciplinario, presentamos en este artículo, una parte de la experiencia extracurricular con modalidad aula taller, que realizamos con algunos estudiantes de primer año de ingeniería industrial, aunque es aplicable a cualquier especialidad y orientación en el campo de la ingeniería.

Para el material didáctico, en forma de proyectos, tenemos especial cuidado en la selección, elaboración y validación de los mismos, considerando criterios para cada una de estas etapas.

Metodología

Los criterios que establecimos para la selección de nuestros proyectos buscan abordar actividades que, presentadas como situaciones problemáticas, están en función de algunos temas básicos de ingeniería, de matemática pura y/o computacional. Al mismo tiempo la selección se orienta hacia actividades que se resuelvan dentro de un marco computacional con un software matemático. También nos interesa que los proyectos motiven relaciones entre ideas y más interrogantes para acceder a nuevos conceptos de Álgebra Lineal, por ejemplo valores propios complejos, y también temas que serán estudiados en otras asignaturas, como ecuaciones diferenciales o sistemas dinámicos.

En segundo término los criterios de elaboración de cada uno de los proyectos son: que tengan una introducción motivadora del problema a tratar, que muestren una breve referencia teórica necesaria para abordar el tema, que enuncien diversas situaciones a resolver con lápiz y papel y con la computadora, y que finalice con la resolución del problema planteado. Otro criterio importante es, tener siempre en cuenta la utilización de distintos registros de representación para ayudar a los estudiantes a internalizar conceptos, según la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval R (1999).

En tercer lugar la validación del material, se realiza desde el punto de vista conceptual por colegas especialistas del tema a tratar y miembros del equipo de investigación. Además desde el punto de vista didáctico se hace a través de nuestras observaciones y los comentarios de los estudiantes participantes.

Finalmente respecto al desarrollo del aula taller, ésta fue realizada en el laboratorio de computación con una duración total de 30 horas. A la misma asistieron 18 estudiantes a los que les fue entregado el material elaborado según los criterios mencionados anteriormente. Se estableció como pautas de trabajo que durante esas horas se desarrollasen siete proyectos, de un estilo análogo al que presentamos en este artículo, buscando la mínima intervención de los docentes investigadores (evitando así el modelo de clase magistral). En cada jornada se destinó un tiempo para la realización de una puesta en común (exposición de lo obtenido en el día en forma individual o grupal) y en la última reunión, los estudiantes hacen entrega de la totalidad de sus trabajos desarrollados y esto permite otorgarles una certificación de aprobación.

Descripción de uno de los proyectos

El problema motivador surge de la presentación del modelado de un sistema dinámico que utiliza ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y lineal (este tema no ha sido abordado por los estudiantes en sus clases regulares). Para nosotros trabajar con un sistema de ecuaciones diferenciales, nos brinda la oportunidad de destacar la importancia de los valores y vectores propios, como parte de la solución. El caso que se presenta es un sistema hidráulico, en particular el llenado de dos tanques y la distribución de la concentración de sal a lo largo del tiempo en ambos tanques (León, S (2000) pág. 233, enuncia y encuentra la función solución). A partir de este problema les presentamos diversas situaciones que los estudiantes analizan desde distintos registros de representación para entender los conceptos involucrados.

En la situación I usamos el registro gráfico para visualizar la función solución en términos de las concentraciones de sal presentes en cada tanque. Para ello proponemos la ejecución de los comandos de un software matemático que el estudiante deberá convertir al registro del lenguaje natural, para describirlos.

En la situación II utilizamos el registro tabular, usando matrices en bloques, para seguir la evolución de la función solución a través del tiempo, las concentraciones en ambos tanques y la función solución. Además como la orientación es una de las características de la conversión entre registros, les proponemos el proceso inverso, esto es, el armando una tabla que busca mostrar el acercamiento de la función solución a uno de los vectores propios.

En la situación III y con el fin de reforzar lo observado en las tablas, usamos el registro gráfico de la manera que se hace en la situación I, para visualizar el comportamiento de la función solución y del vector propio.

En la situación IV se trabaja en el registro algebraico analizando cuatro problemas según las dificultades que puedan aparecer en el sistema de tanques. Finalmente se realiza la conversión al registro pedido que es el gráfico.

Material didáctico

Introducción

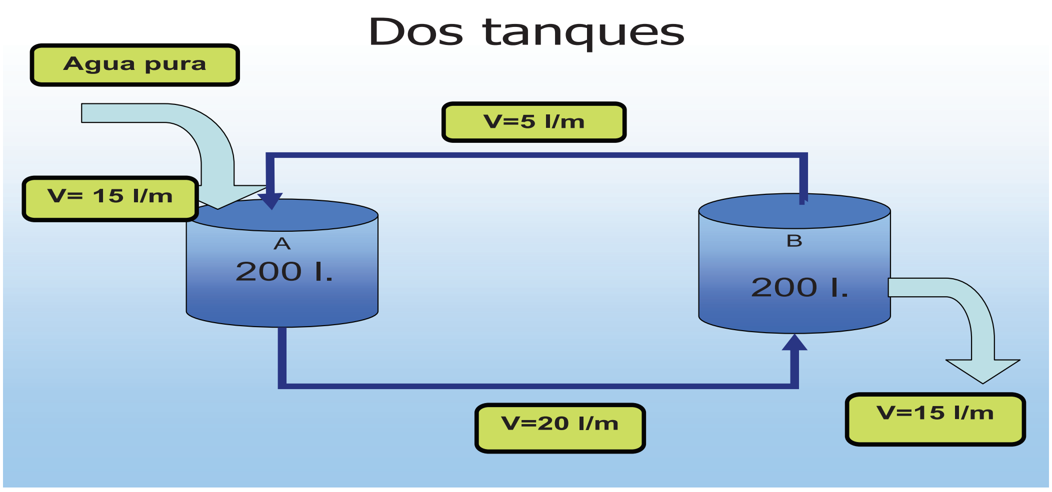
En las aplicaciones matemáticas surgen con frecuencia problemas en los que la incógnita es una función. Llegamos así a las ecuaciones funcionales, entre las cuales conocemos algunos ejemplos como el cálculo de primitivas. En muchos problemas de aplicación, hay cantidades que varían continuamente con el tiempo y están relacionadas por medio de un sistema de n ecuaciones diferenciales con n incógnitas, que esta vez son funciones. Matricialmente escribimos y' (t) = A. y (t), en la solución de estos sistemas aparecerán los valores y vectores propios.

Modelación de un sistema hidráulico

Dos tanques se conectan como se ilustra en la siguiente figura. En un principio el tanque A tiene 200 litros de agua en el que se han disuelto 60 gr de sal y el tanque B contiene 200 litros de agua pura. Se introduce y se extrae líquidos por bombeo de los dos tanques a las intensidades que se indican. Determine la cantidad de sal que hay en cada tanque en el tiempo t.

Para esta situación llamaremos $y_1(t)$ = cantidad de sal en el tanque A en cierto tiempo t.

$y_2(t)$ = cantidad de sal en el tanque B en cierto tiempo t.



Se sabe que: Intensidad de variación = Intensidad de entrada – intensidad de salida,

Para el tanque A, mirando la figura

$$IE = \left(15\frac{lt}{\min}\right)\left(0\frac{gr}{lt}\right) + \left(5\frac{lt}{\min}\right)\left(\frac{y_2(t)}{200}\frac{gr}{lt}\right)$$

$$IS = \left(20\frac{lt}{\min}\right)\left(\frac{y_1(t)}{200}\frac{gr}{lt}\right)$$

$$IV : y_1'(t) = \frac{-1}{10}y_1(t) + \frac{1}{40}y_2(t)$$

Para el tanque B, ¿cuál es la intensidad de variación?

De ambas variaciones logramos el siguiente sistema de ecuaciones (corrobore):

$$\begin{cases} y_1'(t) = \dfrac{-1}{10}y_1(t) + \dfrac{1}{40}y_2(t) \\[2ex] y_2'(t) = \dfrac{1}{10}y_1(t) - \dfrac{1}{10}y_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{40} \\[1ex] \dfrac{1}{10} & -\dfrac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Ahora bien, expresando el sistema en forma matricial

Comenzamos a determinar la solución de este sistema, sabiendo que es de la forma:

$$y(t) = c_1.e^{\lambda_1 t}y_1 + c_2.e^{\lambda_2 t}y_2$$

Los λ_i son los valores propios de la matriz A, los y_i son los vectores propios de A y los c_i son las constantes a calcular a partir de los valores y vectores propios.

Primero usaremos el comando [V, D] = eig (A), para conocer los valores y vectores de la matriz A

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\frac{-3}{20}.t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\frac{-1}{20}.t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ahora debemos determinar los valores de las constantes c_1 y c_2. En la expresión anterior, tenemos en cuenta que para t = 0 las condiciones iniciales son de 60 gramos de sal en A y 0 en B, podemos reemplazar y obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales, que resolvemos.

$\begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ de donde resulta que $c_1 = c_2 = 30$

La solución general de nuestro problema la podemos expresar entonces:

$$y(t) = 30\, e^{\frac{-3}{20}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 30\, e^{\frac{-1}{20}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Situación I: Visualización de la solución general

La solución se representa teniendo en cuenta ambas concentraciones y está expresada como una combinación lineal de los vectores propios. Complete especificando cada comando usado y ejecute.

```
>> t = [0; 60]…..
>> s = min(t): 1:max(t);…..
>> y = 30*exp ((-3/20)*s)' * [1; -2] ' + 30 * exp ((-1/20)*s)' *[1; 2] ';….
>> plot ( y (:,1), y(:, 2), '*')….
>> grid….
>> xlabel ( 'Concentración de sal en A' )….
>> ylabel ('Concentración de sal en B' )….
>> title ('Solución general')….
```

Situación II: Tablas

Complete las proposiciones a partir de la siguiente tabla construida como una matriz en bloque m = [s' y (:,1) y (:,2) y (:,1) + y (:,2)]. Ella muestra en sus columnas el tiempo, la concentración en A, la concentración en B y la función solución.

- ¿En t = 0 qué concentraciones de sal tienen ambos tanques?.

- ¿En qué tiempo son aproximadamente iguales y cuáles son sus valores?.
- Después de los primeros 30 minutos ¿Cuántos gr de sal están presentes en el sistema?.
- A medida que $t \to \infty$ resulta que los valores de la función solución $y(t) \to$ ……..
- A medida que t crece resulta que los valores de la concentración en B se aproximan al doble del valor de ….

Complete las proposiciones a partir de la observación de una tabla que usted construya. Ella debe mostrar en sus columnas el tiempo, el primero y segundo término de la función solución y la función solución.

- Si $t \to \infty$, el término para λ = -3/20 (de mayor valor absoluto) tiende más rápido a ……
- Si $t \to \infty$, el término para λ= -1/20 (de menor valor absoluto) tiende más lento a …….

Situación III: Gráficas y vectores propios

Veamos cómo la curva de la solución se acerca al vector propio (1, 2) a medida que transcurre el tiempo, a través de las gráficas. Use los comandos anteriores para graficar la función y complete especificando cada comando usado y ejecute.

>> z = 0: .1:20; ....

>> v1= z'*[1 2]; ....

>> hold on ……….

>> plot (v1(:,1), v1(:,2),'m*') ……….

>> plot (y (:,1), y(:, 2), '*') ……….

Situación IV: Armando un catálogo

Arme un catálogo con gráficas para un operario, de modo que pueda determinar dónde se producen bloqueos en el sistema que él tiene a su cargo.

- Problema 1: Deja de bombear del tanque B al tanque A.

- Problema 2: Se bloquea la salida de la mezcla del tanque B (15 l/min).
- Problema 3: Se bloquea la salida del tanque A hacia B (20 l/min) en el tiempo $t_o = 0$.
- Problema 4: Supongamos que está funcionando y se bloquea la salida del tanque A hacia el tanque B (20 l/min) en el tiempo $t_o=4$, las concentraciones en ese instante son 41.0263 y 16.1951 gramos de sal respectivamente.

(Ayuda) Te damos un archivo en el que identifiques cada parte del mismo y modifiques según el problema.

```
function g = problema(A)
[P, D] = eig(A)
v1 = P(:,1);        v2 = P(:,2);
L1 = D(1,1);        L2 = D(2,2);
 s = [60;0];
 M = [v1 -v2 s]
 R = rref(M)
 for t = min(s): 1:max(s);
 y = R(1,3)*exp(L1*t)'*(v1)'+ R(2,3)*exp(L2*t)'*(-v2)';
 tabla = [t' y(:,1) y(:,2) y(:,1)+ y(:,2)]
                    hold on
                    plot(y(:,1),y (:,2),'b*')
                    xlabel ( 'concentración en A' )
                    ylabel ('concentración en B')
 end
```

Reflexiones finales

Llevamos cuatro años haciendo nuestra propuesta de aula taller con siete proyectos, que cambiamos cada dos años. En este artículo, quisimos compartir uno de ellos. Para poder determinar el logro de nuestro objetivo, mejorar la calidad de los aprendizajes de los estudiantes, nos planteamos ciertos indicadores. En este proyecto, nos interesa el desarrollo de competencias en informática y la formación para un autoaprendizaje responsable.

El desarrollo de la competencia en informática les posibilitó usar comandos, archivos y crear los propios, dentro de un software matemático (esta vez se usó Matlab), que resultó de fácil manejo por la similitud con las expresiones simbólicas de álgebra lineal. Centramos nuestros esfuerzos alrededor de esta posibilidad tecnológica, ya que permite el tratamiento (transformación dentro de un mismo registro) y la conversión entre registros. De este modo, se ve facilitado recorrer registros discursivos, no discursivos, plurifuncionales y monofuncionales (Duval 2004).

De acuerdo con Duval, toda representación es parcialmente cognitiva respecto a lo que representa, y cada registro muestra aspectos diferentes del objeto; por lo tanto los distintos registros son complementarios. Esto permite interpretar las consignas manteniendo la referencia del objeto matemático que se estudia, pero con otras propiedades que facilitan su adquisición conceptual o noesis.

La formación para un autoaprendizaje responsable se tradujo en la realización de la totalidad de los proyectos propuestos, y como dijimos buscando una mínima intervención por parte de los docentes a cargo. Todo su trabajo se ve fortalecido por la creación del hábito en el uso de más de un registro de representación semiótica, la coordinación entre ellos y las posibilidades de tratamientos algorítmicos. De este modo estos elementos se transforman en herramientas para el inicio de la investigación autónoma del estudiante.

Por otra parte nos interesa comentar que usamos un modelo matemático, no como un curso corto de ecuaciones diferenciales, sino como motivador para la aplicación de los conceptos ya estudiados y para otros nuevos de Álgebra Lineal y de otras asignaturas.

Finalmente podemos agregar que esta enriquecedora experiencia, tanto para profesores como para alumnos, permite la validación constante entre colegas y estudiantes para mejorar el material ya desarrollado y elaborar otros nuevos.

Referencias bibliográficas

Dorier, J.-L. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. *Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Colombia: Universidad del Valle.

León, S. (2000). *Álgebra Lineal con aplicaciones (3ª edición)*.México: Cecsa.