DE LO LÚDICO DEL ORIGAMI AL TRABAJO CON FUNCIONES

Tulio Amaya De Armas, Josefina Gulfo de Puente
Institución Educativa Madre Amalia, Sincelejo Colombia
tuama1@hotmail.com, jgulfo26@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio

Resumen. *En el presente trabajo se comparte una experiencia de aula que se realiza, utilizando el Origami, para introducir el trabajo con funciones cuadráticas, con estudiantes de la media académica. En el proceso de iniciación al cálculo, se estudió la relación entre el plegado de papel y la geometría, al desarmar un módulo cuadrado y analizar las cicatrices que quedan en él. Se relacionaron algunos elementos matemáticos presentes en el módulo, con los conceptos matemáticos que emergieron en las cicatrices y se analizaron algunas propiedades de los poliedros. Esto permitió el estudio de conceptos como rectas paralelas y perpendiculares, bisectrices y mediatrices y familias de poliedros, relacionando el área lateral de los poliedros con el tamaño del módulo y con el número de éstos, lo que llevó al estudio de familias de funciones, haciendo el tránsito por diferentes sistemas semióticos de representación y al interior de algunos de estos, llevando a los mismos estudiantes a que le asignaran significado y sentido a los conceptos estudiados, al poderlos manipular.*
Palabras clave: Plegado, poliedros, pensamiento geométrico, familia de funciones

Introducción

En trabajos que involucren funciones, es común estudiar conjuntamente dos o más variables. Este análisis de covarianza resulta problemático para estudiantes de diferentes niveles, (Nájera, 2008). Sin embargo, estos ambientes brindan una gran oportunidad para explorar diferentes representaciones del mismo objeto en un mismo ambiente y así facilitar el estudio de funciones; así, “hablar de representación equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión, modelización, etc.” (Font, Godino y D`Amore, 2007, p. 1). El trabajo con figuras poliédricas construidas con la técnica del origami, aparece como una alternativa para el tránsito entre diferentes sistemas semióticos de representación, permitiendo relacionar los sistemas tabular, gráfico, icónico y algebraico, y “asignarle significado y sentido a cada una de estas representaciones en relación con las otras, así como el tránsito al interior de un mismo sistema de representación, al variar el tamaño de los módulos, dejando el número de éstos fijos” (Amaya y Gulfo, 2009, p. 898), facilitando el estudio de funciones en un ambiente natural, de mucha camaradería y cooperación mutua.

Acercamiento teórico

El arte del plegado de papel, es utilizado para obtener figuras de formas variadas, el cual es de gran interés por contribuir a adquirir ciertas actitudes y habilidades de forma amena, aparte de aprender y enseñar geometría y poderse relacionar con otras ramas de la matemática, (Badilla, 2007). En este trabajo lo utilizamos para estudiar el pensamiento numérico, y variacional. En particular, nos apoyamos de la postura del Instituto Colombiano para el fomento de la educación superior, quien sostiene que "uno de los elementos centrales a considerar es la apropiación del concepto de función analizando variación y relaciones entre diferentes representaciones y su uso comprensivo a través de la modelación con funciones" (ICFES, 2007, p. 29). Por lo que se procura trabajar con situaciones familiares para los estudiantes, analizadas en diferentes sistemas de representación. Según Duval (1999), para que una representación pueda funcionar como tal, y se puedan reconocer dos representaciones del mismo objeto, se necesita disponer de por lo menos dos sistemas semióticos que representen al objeto que se quiere representar y que se pueda pasar espontáneamente de un sistema semiótico a otro sin siquiera notarlo. En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), sugiere que entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentren los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano, las representaciones pictóricas e icónicas, las fórmulas y las expresiones analíticas, considerando que el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica (MEN, 2004). Esto muestra la importancia de las representaciones y la necesidad de efectuar un proceso de traducción entre representaciones, (Janvier, 1990). De esta forma, el pensamiento variacional, (entendido como la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de variación y cambio, con el propósito de analizarlas y realizar algunas transformaciones en ellas), permite el trabajo con elementos del contextos sociocultural donde se pueden ver relaciones de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía. El ICFES manifiesta que lo que se quiere es desarrollar una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que el estudiante sea capaz de modelarlos y transformarlos (ICFES, 2007), es decir, no solamente identificar la matemática en situaciones reales y contextualizadas, sino que tenga la capacidad de modelar matemáticamente esa situación. Para Monzoy (1998), La importancia de estudiar el concepto de función se puede justificar a partir de la interdependencia que se da entre los conceptos matemáticos y las situaciones reales, como un auxiliar para hacer las interpretaciones y esto es considerado fundamental en la formación matemática básica de los estudiantes.

En la búsqueda de poder relacionar la matemática con el medio sociocultural, casi siempre aparece como mediadora la geometría; especialmente cuando se trata de buscar propiedades geométricas en un objeto real, se necesita del poder geométrico, el cual se concibe como aquél que ejercitamos cuando resolvemos un problema o prueba dificultosa; para desarrollar tal poder, se debe entrenar el ojo geométrico para ayudar a ver propiedades geométricas separadas de una figura (Godfrey, 1910, c.p. Fujita, Jones y Yamamoto, 2004). Esto suele ser un problemas en educación geométrica, donde los estudiantes aparecen como incapaces de ver propiedades geométricas en los objetos, esto es, sin su ojo geométrico desarrollado, (Sinclair, 2003, c.p. Fujita, Jones y Yamamoto, 2004). En este contexto parece ser muy importante entrenar la imaginación de los estudiantes, y en su instrucción geométrica intuitiva, apuntar hacia el desarrollo de sus habilidades espaciales a través de actividades apropiadas. Las visualizaciones en geometría son muy importantes en la resolución de problemas, y un requisito previo puede ser, tomar mentalmente una figura, mirar sus elementos individuales y hacer conjeturas suficientemente buenas sobre sus relaciones, de forma semejante al ojo geométrico de Godfrey.

Metodología

En este trabajo participaron estudiantes del último año de la media académica, con edades entre 15 y 17 años, en un curso ordinario de iniciación al cálculo, los estudiantes no habían trabajado antes funciones. Se organizaron en grupos de tres o cuatro, que ellos mismos armaron según sus preferencias.

Un módulo es la unidad mínima de plegado que se repite y se ensambla para armar las figuras geométricas, resultado de manipular adecuadamente un cuadrado de papel. A continuación se muestran, figura 1: un módulo terminado y listo para ensamblar, figura 2: un módulo desplegado, figura 3: un módulo desplegado y repasadas las cicatrices con tinta para resaltarlas, y figura 4: una pirámide siamesa triangular.

Figura 1. Módulo terminado

Figura 2. Módulo desarmado

Figura 3. Módulo desarmado y repasado

Figura 4. Pirámide siamesa triangular

Al desplegar un módulo y observar el cuadrado inicial, permitió analizar las cicatrices que quedaron en el papel y asociarlas con conceptos matemático. El trabajo se realiza a partir de un único tipo de módulo por lo que se instruyó a los estudiantes en la construcción de éstos. El primer poliedro que se construyó fue una pirámide siamesa triangular, la cual se arma con tres módulos, por lo que cada grupo al completar tres, se les explicó cómo armarla. Se varió el tamaño del módulo y se armaron varias de estas pirámides, una por cada tamaño de módulos, se anotan los valores del lado del cuadrado con que se construyó cada módulo y el área lateral de las pirámides correspondientes en una tabla, luego se pasaron al plano cartesiano para construir la gráfica correspondiente a cada número de módulo. Cada punto del plano es una pareja de la forma (lado del cuadrado con que se construyó el módulo, área lateral del tetraedro); Cuando se varió el tamaño de los módulos sin variar el número de éstos, aparecieron familias de poliedros por cada número de módulo y cada familia dio origen a la gráfica de una función; luego se varió el número de los módulos y su tamaño, resultando familias de funciones, apareciendo poliedros a escala, (Ver fig. 5 a 8). En cada sistema de representación para un número fijo de módulo, se verificó si los datos cumplían con las condiciones para ser una función, por ejemplo, cada longitud del lado del cuadrado con que se construyó cada módulo debía estar asociada al área lateral de un único poliedro, si dicha longitud se repetía, había que verificar que el área lateral del poliedro, también se repetía; para el caso de la representación gráfica, se utilizaba el criterio de la recta vertical.

Resultados

El análisis se basa en las dificultades y aciertos de los estudiantes en relación con la definición del concepto de función y con el cambio de sistema de representación. Al comenzar el estudio se quiso priorizar los presaberes que tenían los estudiantes acerca del concepto de función, se comenzó con el dominio y el rango, se identificaron en cada sistema de representación y se compararon los elementos correspondientes en cada registro. Llamó la atención que los estudiantes inicialmente no aceptaran el cero como parte de los intervalos de variación, no aceptaban la continuidad de las variables y la posibilidad de valores muy grandes tanto para el lado del cuadrado como para el área de los poliedros. Al analizar las cicatrices en los módulos, se identificó el conjunto de lados de éstos como el dominio, se calculó el área, primero de la pirámide siamesa triangular, luego del cubo y se analizó el patrón que seguían y a partir de ahí se obtuvo una expresión algebraica para cada número de módulos de cada poliedro lo que permitió asignarle significado a los parámetros de la representación algebraica, al relacionarla con los elementos en la tabla y en los módulos. Los estudiantes inicialmente no llegaron a estos resultados por cuenta propia, por lo que hubo que inducirlos a éstos y en algunos casos mostrarles lo evidente de los conceptos matemáticos en las cicatrices presentes en cada módulo que se desplegó, lo que puede deberse al poco desarrollo de su ojo geométrico (Sinclair, 2003, c.p. Fujita, Jones y Yamamoto, 2004), por su poco trabajo con la geometría hasta entonces. Después de estudiar un concepto, siempre lo tuvieron en cuenta para un desarrollo similar siguiente.

Para relacionar las diferentes representaciones, se comparó un módulo desarmado con otros listos para ensamblar, se identificó la parte del módulo que queda visible en cada poliedro, cuya área es de $\frac{l^2}{8}$, ya que al observar las cicatrices, cada módulo queda dividido en ocho cuadraditos congruentes y es exactamente una de estas partes la que queda visible por módulo en un poliedro. Amaya y Gulfo (2009) encontraron que el área lateral de la pirámide siamesa triangular es $\frac{3l^2}{8}$ ya que la componen tres módulos y por lo tanto quedan visibles tres cuadraditos; el área del cubo es $\frac{6l^2}{8}$, ya que tiene seis cuadraditos, esto es, uno por cada cara. Y en general para una figura construida con n módulos de este tipo, el área lateral es $\frac{nl^2}{8}$. De manera que el significado y el sentido de los conceptos se establecieron manipulando directamente elementos de la vida práctica, acorde con lo sugerido por el MEN (2004). A continuación se muestran algunas de las familias de poliedros obtenidas por los estudiantes.

Figura 5. Familias de pirámides siamesas triangulares con diferentes tamaños de módulos

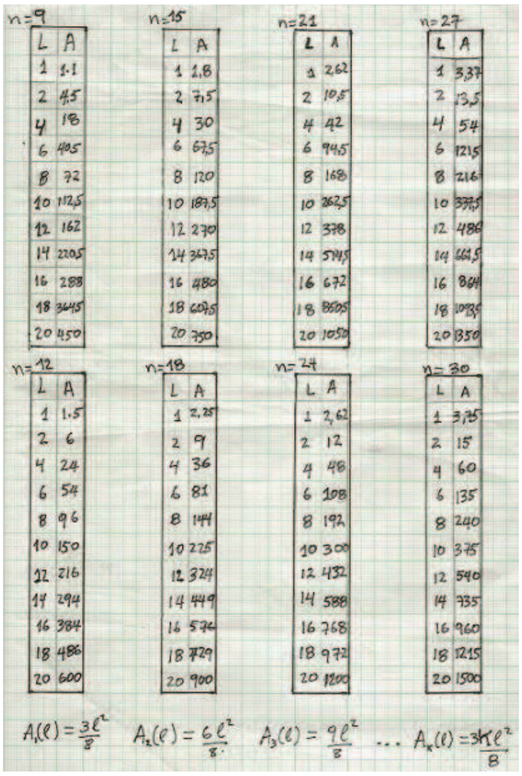
Figura 6. Familias cubos siameses con diferentes tamaños de módulos

Figura 7. Familias de cubos con diferentes tamaños de módulos

Figura 8. Familias de estrellas de doce puntas con diferentes tamaños de módulos

Siempre que a los estudiantes se les pidió verificar el concepto de función en un conjunto de datos, primero realizaron la gráfica dándole valores a la variable independiente en la fórmula y enseguida aplicaron el criterio de la recta vertical, por lo que coincidimos con Monzoy (1998) en que asociaron a la definición de función, con su gráfica, y con la necesidad de una fórmula como requisito para la existencia de la función. En el sistema de representación donde ningún grupo cometió errores al decidir si los conjuntos representaban una función, fue en el sagital. En la conversión de un registro a otro, los estudiantes parecían más cómodos del registro algebraico o el tabular hacia los otros, ya que cuando se les pidió encontrar la longitud de un cuadrado para armar un módulo para un poliedro en particular, en la mayoría de los casos escogieron la fórmula y unos pocos utilizaron una tabla. Y cuando se dieron condiciones en una tabla para que se identificara el tipo de poliedro, se construyera la gráfica y se encontrara la fórmula, los estudiantes salieron airosos.

El origami se convirtió en una herramienta muy adecuada para asignar significado y sentido a los conceptos de cambio y variación, al analizar los cambios en los tamaños de los poliedros e ir mirando cuánto era el aumento del área del siguiente, lo que se aprovechó también para analizar los conceptos de dependencia e independencia entre variables, al observar que al aumentar el tamaño del módulo, necesariamente aumentaba el tamaño del poliedro y el valor de su respectiva área. Este tipo de situaciones que permiten contextualizar los problemas matemáticos son según Hitt (1994, c.p. Monzoy, 1998) un intento por rescatar las ideas intuitivas precursoras de abstracciones, lo que ayuda a reducir obstáculos de aprendizaje y puede ir construyendo a la vez un puente entre ideas intuitivas y conceptos formales, así como un ambiente de experimentación en el aula misma. Cada familia de las que resultaron corresponde a una tabla de las de la figuras 9 y a la gráfica de una función de las que aparecen en la figura 10 respectivamente; a menor número de módulos la gráfica que se obtiene es de menor pendiente, es decir, menor que las demás, así la gráfica correspondiente a las pirámides siamesas es la menor que obtuvimos y la de la estrella de treinta puntas, la mayor ya que no trabajamos con mayor número de módulos.



L (n=9)	A (n=9)	L (n=15)	A (n=15)	L (n=21)	A (n=21)	L (n=27)	A (n=27)
1	1.1	1	1,8	1	2,62	1	3,37
2	4,5	2	7,5	2	10,5	2	13,5
4	18	4	30	4	42	4	54
6	40,5	6	67,5	6	94,5	6	121,5
8	72	8	120	8	168	8	216
10	112,5	10	187,5	10	262,5	10	337,5
12	162	12	270	12	378	12	486
14	220,5	14	367,5	14	514,5	14	661,5
16	288	16	480	16	672	16	864
18	364,5	18	607,5	18	860,5	18	1093,5
20	450	20	750	20	1050	20	1350

L (n=12)	A (n=12)	L (n=18)	A (n=18)	L (n=24)	A (n=24)	L (n=30)	A (n=30)
1	1.5	1	2,25	1	2,62	1	3,75
2	6	2	9	2	12	2	15
4	24	4	36	4	48	4	60
6	54	6	81	6	108	6	135
8	96	8	144	8	192	8	240
10	150	10	225	10	300	10	375
12	216	12	324	12	432	12	540
14	294	14	449	14	588	14	735
16	384	16	576	16	768	16	960
18	486	18	729	18	972	18	1215
20	600	20	900	20	1200	20	1500

$A_1(\ell) = \frac{3\ell^2}{8}$ $A_2(\ell) = \frac{6\ell^2}{8}$ $A_3(\ell) = \frac{9\ell^2}{8}$ ... $A_x(\ell) = \frac{3k\ell^2}{8}$

Figura 9. Tablas utilizadas para hacer las gráficas de las familias de poliedros

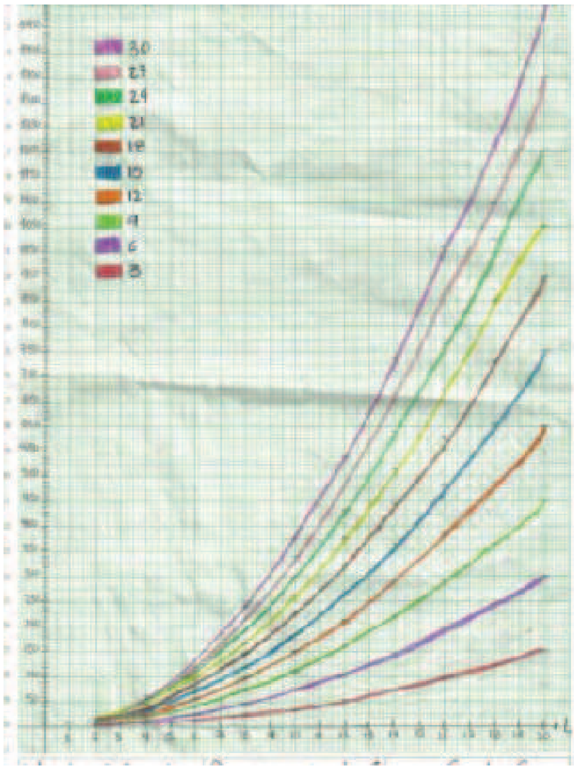


Figura 10. Familias de gráficas correspondientes a las familias de poliedros

El comparar estos sistemas de representación de un mimo objeto matemático permitió asignarle significado al concepto de función al relacionarlo con el área de los poliedros e ir identificando cada elemento de un sistema en los otros, por ejemplo, cada figura poliédrica tiene un lado fijo al que corresponde el área de su figura asociada, esta a su vez corresponde a una pareja en la tabla, que como pareja ordenada representa un único punto del plano cartesiano, verificándose con esto el concepto de función. Así se llega a que cada familia de figuras poliédricas corresponde a una tabla y a una gráfica del plano cartesiano.

Conclusiones

A los estudiantes en general les costó mucho aceptar otro sistema de representación, diferente del algebraico, como representación de una función, para ellos una función es una fórmula, no un conjunto de pares ordenados, en una tabla o en un plano que cumplen ciertas condiciones, ni una gráfica en un plano y mucho menos unas figuritas de colores. Pero una vez lograron relacionar los elementos de un sistema con los correspondientes del otro, las cosas se facilitaron. Esto facilitó el trabajo con otras situaciones en el mismo concepto.

Para decidir sobre si un conjunto cumplía con la definición de función, predominó el criterio de la recta vertical (Monzoy, 1998), y al convertir de un registro de representación a otro, los estudiantes preferían el registro algebraico o el tabular como punto de partida hacia los otros. El Origami se convirtió en una herramienta amena que permite hacer un barrido de muchos conceptos geométricos. Este proceso de análisis de las cicatrices al desplegar un módulo y estudiar sus propiedades geométricas, se convirtió en un paso natural de la geometría espacial a la geometría euclidiana y viceversa.

Referencias bibliográficas

Amaya, T. y Gulfo, J. (2009). El origami, una estrategia para la enseñanza de la geometría. En P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 895-901. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Badilla, J. (2007). El origami y la geometría. Recuperado el día 23 de septiembre de 2009 de http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/5toCIEMAC/Talleres/ElOrigamiylaGeometria.pdf

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle, Grupo de educación matemática. Cali, Colombia.

Font, V. Godino, J. y D`Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Recuperado el 19 de septiembre de 2009 de http://www.webpersonal.net/vfont/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

Fujita, T. Jones, K. y Yamamoto, S. (2004). *Geometrical intuition and the learning and teaching of geometry.* Recuperado el 23 de septiembre de 2009 de http://eprints.soton.ac.uk/14687/.

Instituto colombiano para el fomento de la educación superior. (2007). Fundamentación conceptual área de Matemáticas. Bogotá: Acevedo, M. Montañés, R. Huertas, C. Pérez, M.

Janvier, C. (1990). *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* SpringerLink 21(1), 91-99.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*. Bogotá: Castiblanco, A. Urquina H. Acosta, E.

Monzoy, J. (1998). El estudio del concepto de función en el nivel medio superior mediante la simulación de un contexto. Memorias del IX Seminario Nacional microcomputadoras en educación matemática, Septiembre, Ciudad de México.

Nájera, V. (2008). ¿Las gráficas una representación natural? Recuperado el 19 de septiembre de 2009 de http://www.valois.com.mx/archivos/Valois_Najera_Graficas_Y_Representaciones_2008.pdf