

## COMPETENCIAS DE MODELACION Y USO DE TECNOLOGÍA EN ECUACIONES DIFERENCIALES

Ruth Rodríguez, Samantha Quiroz, Lorenza Illanes  
Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey  
ruthrdz@itesm.mx, samanthaq.rivera@gmail.com, lillanes@itesm.mx

México

**Resumen.** El presente trabajo explora a la modelación matemática como una estrategia didáctica que permite enlazar situaciones de la vida real con situaciones matemáticas escolares con lo cual se pretende obtener una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. En particular se pretende analizar la implementación de una situación diseñada en base a la modelación matemática en un curso de Ecuaciones Diferenciales (ED) el cual está dirigido a estudiantes de segundo año de ingeniería. En un primer momento se desea identificar las competencias de modelación a propósito del contexto de circuitos eléctricos RC para la enseñanza del tema de ED lineal y en un segundo momento se pretende dar evidencia de los aportes de la modelación en el desarrollo de competencias de modelación. El resultado de esta experiencia muestra que el diseño de actividades en base a la modelación y su posterior implementación a través de la experimentación permite dotar al objeto matemático ED de significados varios que un ambiente de aprendizaje, sin esta estrategia didáctica, difícilmente se podría poner en juego.

**Palabras clave:** modelación, competencias, tecnología, ecuaciones diferenciales

**Abstract.** This study explore the mathematical modelling as a didactic strategy that allow to link real life situations and scholar mathematics in order to get a better comprehension of mathematical concepts. In particular the study analyze the application of one situation designed for engineering students using mathematical modelling on a Differential Equation's course (DE). First, the study aims to identify the modelling competences using a electric circuits's context RC for teaching Linear Differential Equations and secondly it pretends to show the benefits of mathematical modelling on the development of modeling competences in the course. This experience shows that the design of activities using mathematical modelling give to the DE object different meanings that couldn't do it a class without this didactic strategy.

**Key words:** modelling, competences, technology, differential equations

### Introducción

La enseñanza de las matemáticas tiene como una meta importante el preparar ciudadanos críticos los cuales desarrollen las competencias adecuadas que permitan identificar y resolver problemas en cualquier contexto que se les presente, así como expresar, probar, revisar o rechazar incluso sus maneras de pensar (Alsina, 2007; Confrey, 2007; Lesh y Yoon, 2007; Muller y Buskhardt, 2007). Para el logro de tales objetivos es necesario el desarrollo de actividades que permitan al alumno reconocer la importancia de las matemáticas en situaciones de su vida cotidiana.

### Marco teórico

Desde hace alrededor de 35 años, se inicia el estudio de la modelación matemática cuyo principal meta es tender ese puente entre la matemática escolar y las utilizadas en contextos extra matemáticos. Se pueden identificar en total seis perspectivas desde las cuales puede ser

vista la modelación matemática de acuerdo a Kaiser y Sriraman (2006). De entre ellas, el presente trabajo se enfoca en la perspectiva realística o aplicada puesto que enfatiza la importancia de la enseñanza a través de la modelación matemática como un medio más pragmático para resolver problemas reales y desarrollar competencias de modelación.

Han existido diversos autores que buscan definir a la modelación matemática, siendo una de las más completas la que exponen Blum y Niss (1990) quienes explican que la modelación matemática es el proceso completo de transitar desde un problema planteado en una situación real hasta un modelo matemático. Posteriormente aparecen varias definiciones del proceso de modelación, en este estudio hemos elegido la descripción de Rodríguez (2007, 2010) la cual es representada de manera gráfica en la figura 1:

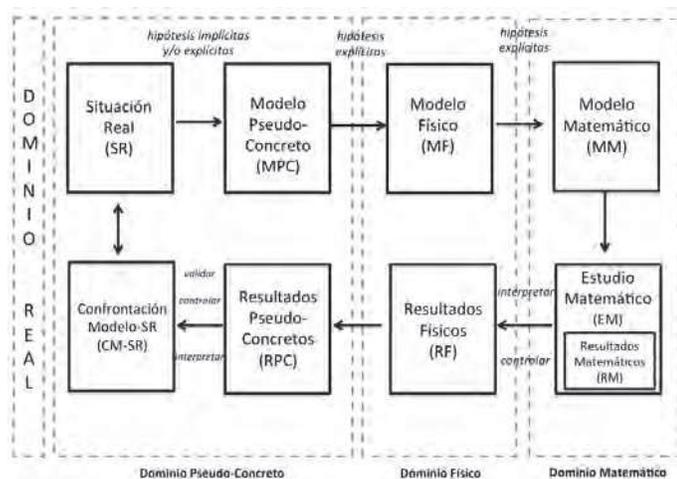


Figura 1.- Ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010)

Es importante enfatizar que este proceso ha sido definido en base a diversos autores (ver Rodríguez, 2007) pero en particular esta propuesta incorpora de manera explícita dos elementos importantes, la inclusión de un dominio físico en el cual se modela (puede ser un dominio extra-matemático biológico, químico u otro) y la importancia dada al dominio pseudo-concreto como esa transición difícil para los estudiantes y clave en el proceso de modelación (basado en el modelo pseudo-concreto de Henry, 2001 citado en Rodríguez 2007 y 2010; análogo al modelo real o *real model* introducido por los trabajos anglosajones sobre modelación).

El análisis de la literatura ha puesto en claro que la modelación matemática ha permitido múltiples beneficios en su aplicación con alumnos de diversos niveles educativos, entre ellos el logro de conexiones entre las matemáticas escolares y las de la vida diaria, la reducción de la ansiedad hacia la asignatura, la promoción de la comunicación y el trabajo colaborativo, y el

desarrollo de competencias matemáticas (Alsina, 2007; Aravena y Caamaño, 2009; Bonotto, 2007; Lombardo y Jacobini, 2009; Muller y Buskhardt, 2007; Von Hofe et al., 2009)

Aunado a lo anterior es importante resaltar que el interés por el logro del desarrollo de competencias ha sido un aspecto que se ha tomado en cuenta por diversas instituciones a nivel internacional y nacional por ejemplo el Proyecto Tuning Latinoamérica (Beneitone et al., 2007), la *Accreditation Board for Engineering and Technology* (ABET, 2011) y la Misión 2015 del Tecnológico de Monterrey (Tecnológico de Monterrey, 2005) quienes basan sus criterios en el desarrollo de alumnos competentes de resolver problemas de su contexto, así como la adquisición de competencias tecnológicas y de colaboración.

Así mismo, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2010) expone como importante el desarrollo de competencias matemáticas y en específico de las competencias de modelación. En un esfuerzo por definir dichas competencias Maaß (2006) y posteriormente Rodríguez (2010) muestran que las competencias de modelación matemática incluyen habilidades de desempeñar el proceso de modelación apropiadamente y bien orientado, así como la posibilidad de poner en acciones dichas habilidades.

Teniendo como base teórica el enfoque anterior el presente estudio tiene como intención unificar lo anterior y presentar el diseño de dos actividades que fueron diseñadas para favorecer el tránsito entre las diversas etapas de modelación matemática a través de enfrentarse a situaciones que estén relacionadas a dos contextos con que los alumnos conviven en ingeniería. Se presentan una experiencia didáctica donde se muestran los resultados de un estudio cualitativo donde se resalta la parte de experimentación en aula a través de la construcción de un circuito RC y el análisis de la respuesta del mismo para el desarrollo de competencias de modelación matemática en un curso de Ecuaciones Diferenciales.

### Marco metodológico

Experiencia: Modelando un circuito eléctrico RC a través de una ED Lineal

A continuación se presenta una experiencia de una situación de modelación, que muestra un trabajo que es una continuación de un estudio previo ( Rodríguez, 2007, 2010; Quiroz y Rodríguez, 2011; Rodríguez y Quiroz, 2012) que propone justamente un enfoque teórico del desarrollo de competencias de modelación en los estudiantes a propósito justamente de la enseñanza y aprendizaje de las Ecuaciones diferenciales. Se presentan algunos resultados recolectados y analizados a través del enfoque teórico anteriormente presentado y de una metodología cualitativa a través de guías de observación, rúbricas y análisis de producciones de

los estudiantes. Se apoya el llenado de estos instrumentos con la video grabación de la sesión para su posterior análisis. La muestra está conformada por los alumnos de un grupo de ecuaciones diferenciales que cursan su tercer semestre en 28 diversas ingenierías.

El contenido matemático que se estudió fueron las ED lineales y el contexto que se eligió para ello fue el de circuitos eléctricos, específicamente un circuito RC (resistencia, capacitor). La clase estaba dividida en cinco etapas:

*Etapas 1:* Discutir en grupo los conocimientos previos respecto al modelo analítico de la ED que modela el cambio de la carga de un capacitor en un circuito RC.

*Etapas 2:* Armar físicamente un circuito eléctrico RC y medir la carga del capacitor a través de un sensor de voltaje. El material utilizado para la actividad consistió en un circuito eléctrico (un foco, capacitor, juego de 4 baterías conectores) para cada equipo, un sensor TI de voltaje, un TI navegador y el protocolo de práctica.

*Etapas 3:* Analizar la gráfica generada por el sensor y reconocer su forma analizando su comportamiento respecto al fenómeno real modelado.

*Etapas 4:* Resolver analíticamente la ED de un circuito RC con entrada de voltaje constante con el método de ED lineal anteriormente visto clase por equipos de 3 integrantes.

*Etapas 5:* Resolver una ED de un circuito RC de entrada de voltaje variable de manera analítica individualmente.

## Resultados

Los resultados se analizan en base a las transiciones entre las etapas de modelación por las que se fueron desarrollando de acuerdo al diagrama propuesto por Rodríguez (2007, 2010):

*Etapas 1:* Favorece la transición entre la etapa Modelo Pseudo-Concreto (MPC) hacia el Modelo Matemático (MM). Si bien la gran parte de los alumnos a pesar de estudiar ingeniería, no son muy familiares con el contexto eléctrico. Gracias a la discusión en grupo los alumnos lograron identificar la situación que se les presentaba y comprender el papel de las variables en juego, reconociendo a la segunda ley de Kirchoff como aquella que permite establecer la ED que modela la carga del capacitor en el circuito RC.

*Etapas 2:* Favorece la transición entre la etapa Modelo Pseudo concreto (MPC) hacia el Modelo Físico (MF). Al interior de cada equipo, los alumnos armaron el circuito eléctrico con apoyo del material que se les proporcionó discutiendo con sus compañeros las razones por las que sucedía el encendido del foco al momento de la carga y la descarga.

*Etapa 3:* Favorece la transición entre el Modelo Físico (MF) hacia Modelo matemático (MM) reconociendo este último en su representación gráfica. En un tercer momento los alumnos observan la gráfica que les brinda el sensor de voltaje y analizan las cargas y descargas, así como sus asíntotas (Ver figura 2). Es importante decir que de manera natural los argumentos dados por los alumnos para analizar la gráfica tiene que ver con la situación física por lo que de manera natural se realiza una transición hacia la etapa de Resultados Físicos (RF) y Pseudo-Concretos (RPC).



Figura 2. Imagen de trabajo en el aula y de la gráfica de carga y descarga del capacitor generada por un equipo.

*Etapa 4:* Favorece la transición entre el Modelo Matemático (MM) hacia el Estudio matemático (EM). Los alumnos logran plantear y resolver la ecuación diferencial lineal a través de método analítico visto en una clase anterior. En esta etapa se logra percibir dudas aún de la parte matemática pero que lograron resolver sin mayor dificultad. Así mismo, se observa una transición hacia los Resultados Físicos (RF) y Pseudo-Concretos (RPC) ya que los alumnos discuten en sus equipos los resultados obtenidos y contrastan con la gráfica que habían generado con el sensor y el fenómeno observado. En esta misma etapa los alumnos realizan muy brevemente una Confrontación Modelo-Situación Real (CM-SR) al mostrar en plenaria sus resultados a los compañeros de otros equipos sobre todo en términos del problema planteado anteriormente, analizando lo que pasaría después de mucho tiempo con la solución  $q(t)$  de la ED.

*Etapa 5:* Se solicita a los alumnos recrear la situación anterior pero ahora con una entrada de voltaje variable (de tipo senoidal) aunque las dificultades mayores se observan en la parte analítica (resolver una integral que aparece en la solución) más que en la parte de plantear el modelo en sí.

A través de una triangulación de los datos recolectados mediante los instrumentos utilizados se presentan como resultados las competencias de modelación que se lograron observar en cada etapa del proceso seguido por los alumnos:

Tabla 1. Elementos de Competencias de modelación matemática observadas en los alumnos

Transiciones entre etapa del proceso de modelación	Competencia de modelación matemática (Maaß, 2006; Rodríguez, 2010)
MPC -> MF	- Competencia para identificar y estructurar situaciones problema - Competencia para entender y analizar el problema real
MF -> MM	- Competencia para determinar y manejar variables - Competencia para crear un modelo matemático a partir de términos reales
MM -> EM	- Competencia para manipular las variables del modelo matemático - Competencia para trabajar con el modelo matemático - Competencia para manipular las variables del modelo matemático
EM -> RF	- Competencia para interpretar el modelo en términos del dominio en el cual se modela (físicos en este caso)
RF -> RPC	- Competencia para interpretar el modelo en términos reales - Competencia para interpretar el resultado en la situación real
RPC -> CM-SR	- Competencia para adaptar el modelo a nuevas situaciones - Competencia para reflexionar y criticar el modelo - Competencia para evaluar el modelo matemático - Competencia para comunicar el modelo y sus resultados

## Conclusiones

La experiencia nos permite concluir que la actividad de modelado de un circuito RC, la cual esta diseñada en base a la modelación, permitir alcanzar los objetivos de clase previstos (la enseñanza del tema de ED lineal y de una aplicación en circuito RC), favorece el desarrollo de competencias de modelación matemática a través del diseño de la actividad misma la cual, es diseñada para favorecer transiciones entre etapas del ciclo de modelación y así mismo se ponen en juego otras competencias dentro del ciclo de modelación como las colaborativas y algunas tecnológicas. Estas últimas no han sido abordadas de manera profunda en este trabajo pero aparecen importantes en cuanto el uso de la calculadora graficadora (TI Nspire CX CAS) y el sensor de voltaje por parte de los alumnos. Su uso no representó dificultad alguna gracias a la facilidad de manejo del equipo y del diseño de un protocolo de práctica que guiaba al alumno en la actividad misma.

Deseamos concluir este trabajo enfatizando la gran importancia de la enseñanza de las ED y Matemáticas en general a través de la modelación, sobre todo el trabajo previo al diseño de las actividades en base a las etapas del proceso previamente definidas y el aporte de cada uno de ellas en llevar a los alumnos a transitar entre las etapas y momentos claves de la modelación. El identificar las diversas competencias que el alumno debe desarrollar para la competencia de modelación es importante y es un aporte que esta experiencia permite tener a lo ya establecido con anterioridad y el reconocer que parte de la dificultad de implementar

actividades de modelación en clase radica en el hecho de tener que poner en juego competencias matemáticas, extra-matemáticas, colaborativas y de discusión así como tecnológicas pero al mismo tiempo esto evidencia la gran riqueza de poner en clase situaciones que permitan poner en juego tales competencias de modelación.

### Referencias bibliográficas

- Accreditation Board for Engineering and Technology [ABET]. (2011). *Criteria for Accrediting Engineering Technology Programs*. Retrieved from [http://www.abet.org/uploadedFiles/Accreditation/Accreditation\\_Process/Accreditation\\_Documents/Current/tac-criteria-2012-2013.pdf](http://www.abet.org/uploadedFiles/Accreditation/Accreditation_Process/Accreditation_Documents/Current/tac-criteria-2012-2013.pdf)
- Alsina, C. (2007). Teaching applications and modelling at tertiary level. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, 10(44), 469–474.
- Aravena, M. D., y Caamaño, C. E. (2009). Mathematical models in the secondary Chilean education. In M. Blomhoj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*, pp. 159–176. Dinamarca: Roskilde University.
- Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Maletá, M., Siufi, G., y Wagenaar, R. (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina, Informe Final Proyecto Tuning América Latina 2004-2007*. Madrid, España: Universidad de Deusto.
- Blum, W., y Niss, M. (1990). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68.
- Bonotto, C. (2007). How to replace word problems with activities of realistic mathematical modelling. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, 10(32), 185–192. doi:10.1007/978-0-387-29822-1\_18
- Confrey, J. (2007). Epistemology and modelling-overview. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, 10(3), 125–128. doi:10.1007/97803872982214
- Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 38(3), 302–310. doi:10.1007/BF02652813
- Lesh, R., y Yoon, C. (2007). What is the distinctive in (our views about) models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching? *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, 10(31), 161–170. doi:10.1007/978038729822115

- Lombardo, D. H., y Jacobini, O. R. (2009). Mathematical modelling: From classroom to the real world. In M. Blomhoj y S. Carreiro (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*, pp. 35–46. Dinamarca: Roskilde University.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 38(2), 113–142.
- Muller, E., y Buskhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics-overview. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, 10(34), 267–274. doi:10.1007/978038729822128
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE]. (2010). *PISA 2009 Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science. Assessment*. París, Francia: OCDE Publishing.
- Quiroz, S. y Rodríguez, R. (2011). Las competencias de modelación matemática con apoyo en Webquest. *Memorias de la XIV Escuela de Invierno de Matemática Educativa*, Monterrey, México.
- Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation d ' élèves en Terminale S. Sciences*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Joseph Fourier Grenoble I. Grenoble: France.
- Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13(4-1), 191–210.
- Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2012). *Modelación y tecnología en ecuaciones diferenciales*. Memorias del VI Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. Monterrey: Asociación Nacional de Investigadores en el uso de la tecnología en educación matemática.
- Tecnológico de Monterrey. (2005). *Visión Misión 2015*. Documentos del Sistema Tecnológico de Monterrey. Recuperado de <http://www.itesm.mx/2015/recursos/2015-Vision-Mision.pdf>
- Von Hofe, R., Jordan, A., Hafner, T., Stolting, P., Blum, W., y Pekrun, R. (2009). On the development of mathematical modelling competencies-The PALMA longitudinal study. In M. Blomhoj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*, pp. 47–60. Dinamarca: Roskilde University. doi:10.1093/teamat/22.3.123