EL RECAPITULACIONISMO Y LA LINEALIDAD

Juan Alberto Acosta Hernández, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado del Estado de Hidalgo México
acostah@uaeh.edu.mx, rondero@uaeh.edu.mx, anataras@uaeh.edu.mx

Resumen. En esta investigación se considera cierto paralelismo entre el desarrollo individual de la noción de *linealidad* y su desarrollo histórico social. El surgimiento de la *linealidad* y de sus significados en las etapas evolutivas de un sujeto parece que están en cierta concordancia con el surgimiento y uso de los conceptos previos asociados a esta noción, que se manifiestan en diferentes escenarios históricos. Sin embargo, en el ambiente escolar de licenciatura no se resaltan de manera suficiente sus significados asociados ni se vinculan con temas afines del nivel medio superior. En este trabajo se buscan precisar algunos elementos que se establecen en este paralelismo entre lo histórico epistemológico y el desarrollo de la noción en situación escolar.

Palabras clave: linealidad, didáctica, recapitulacionismo, significados, articulación

Abstract. In this research we consider some parallelism between individual development of the concept of historical linearity and social development. The emergence of linearity and its meaning in the evolutionary stages of a subject seem to be somewhat consistent with the emergence and use of the previous concepts associated with this notion, which manifest themselves in different historical settings. However, in the graduate school environment is not sufficiently emphasize their associated meanings and related topics are linked to the high school level. In this paper we seek to clarify certain elements set forth in this parallelism between the epistemological and historical development of the concept in school situation.

Key words: linear, didactic, recapitulation, meanings, joint

Introducción

En esta investigación se considera cierto paralelismo entre el desarrollo individual de la noción de linealidad y su desarrollo histórico social, en cuanto al surgimiento, comprensión y uso de conceptos matemáticos asociados. Esto es que el crecimiento intelectual de un individuo compendia los estadios evolutivos de la sociedad. Esta corriente de pensamiento llamada *Recapitulacionismo* considera que la ontogenia recapitula la filogenia en relación al aprendizaje de la matemática.

Los métodos y verdades matemáticas se han obtenido en diversos países y culturas a través de procesos complejos, donde se han dado errores y retrocesos. Esto es fructífero desde la dimensión epistemológica, y puede emplearse pedagógicamente. Detrás de un concepto hay una postura epistemológica, la cual condiciona el pensamiento y la interpretación del desarrollo histórico de conceptos. El estudio del pensamiento pertenece a la psicología, en cambio el desarrollo conceptual de la matemática corresponde al estudio histórico de las ideas. La recapitulación psicológica del desarrollo intelectual de nuestros estudiantes pasa en mayor o menor grado por las mismas etapas por las que ha atravesado la humanidad (Furinghetti y Radford, 2002).

Por otra parte Piaget y García (2004) señalan que se puede hacer un análisis comparativo entre la psicogénesis y la historia de la ciencia, en tal caso la física aristotélica y la medieval tienen sorprendentes coincidencias de método y contenido con las concepciones de un niño o un adolescente, hasta aspectos más elaborados de la ciencia moderna en los que se necesita una abstracción no alcanzable por personas muy jóvenes o adultos sin formación científica. Estos autores señalan de manera contundente que *los únicos factores realmente omnipresentes en los desarrollos cognoscitivos –tanto en la historia de la ciencia como en la psicogénesis- son de naturaleza funcional y no estructural.* De tal modo que los factores funcionales se articulan a la asimilación de nuevos significados las estructuras precedentes, así como a la acomodación de las mismas cuando aparece un nuevo objeto de conocimiento.

Paralelismo entre lo histórico epistemológico y la didáctica

El surgimiento de la noción de linealidad y sus significados en las etapas evolutivas de un sujeto parece que están en cierta concordancia con el surgimiento y uso de los conceptos previos asociados a esta noción, que se manifiestan en diferentes escenarios históricos (Acosta, Rondero, y Tarasenko, 2008). Esto es, la primera aproximación antecedente de la noción de linealidad que hace uso un niño de cuatro años es la proporción cualitativa, al establecer comparaciones del tamaño de objetos *mayor que* o *menor que* (Ruiz y Valdemoros, 2006), hecho que aparece datado en épocas tempranas de la humanidad, al apreciar la diferencia de talla entre una persona y un animal muy grande. Por su parte el uso de la proporción cuantitativa para resolver problemas de estimaciones de interés simple con el propósito de pago de impuestos y en solución de problemas de primer grado con una incógnita. Como se aprecia en la cultura egipcia, donde no sólo se resuelven problemas aritméticos, sino se dan elementos de solución a ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, donde a, b y c son conocidas y x desconocida, como está escrito en el *Papiro Rhind* que data del año 1650 AC (Filloy, 1998). Esto presenta cierta correspondencia con la psicogénesis evolutiva del individuo al abordar dicho tema en la escuela secundaria y preparatoria.

En el libro clásico de la cultura china *Chiu ch'ang Sua-shu* (Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático) de la dinastía Han (206 AC – 220 DC) (Struik, 1986), en el cual aparecen porcentajes y proporciones; problemas de aplicación de impuestos a productos de cualidades diferentes; uso de "la regla de tres" y de progresiones aritméticas y geométricas. Incluye de igual forma el cálculo de tiempos de transporte y distribución de impuestos por cantidad de población; además aborda el tema de *Excesos y deficiencias* donde se ocupa básicamente de la *regla de la posición falsa*, inventada por los chinos (García, 2000). Tomando el paralelismo del cual se ocupa este reporte, algunos de estos tópicos se estudian durante los dos últimos años del nivel básico elemental y durante la secundaria.

También en los últimos años de este nivel educativo se estudia la solución de una ecuación de primer grado *ax+by=c*, problemas con una incógnita y se resuelven sistemas de ecuaciones lineales simultáneas de dos incógnitas. Estos temas se estudian nuevamente en el primer año de bachillerato, donde se formulan problemas en contexto, vinculado con tales temas (Stewart, Redlin, y Watson, 2001).

Con una cierta analogía, desde el punto de vista histórico epistemológico, Descartes (1596 – 1650) funda el primer sistema matemático moderno. Persigue la unión empezada, pero no terminada por Viète, del Álgebra con la Geometría. Toman lo obtenido por Apolonio de Pérgamo (262? - 190? a d C), desde su escrito *La Cónica,* y establecen la unificación geométrica - algebraica de la recta, proponiendo su ecuación. Esto es determinan la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las *x*, y ya manifiestan a la recta que pasa por el origen de la forma *bx=ay* y consideran a *ax + by= c* como la ecuación de una recta en su forma general y la extienden al problema del lugar geométrico de Apolonio, reconociendo que $\sum a_i x + b_i y + c_i = d$ es la ecuación de una recta (Hofmann, 2002).

Fue Apolonio quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola a los lugares geométricos que hoy conocemos, se le atribuye la hipótesis de las orbitas excéntricas o teoría de epiciclos para intentar explicar el movimiento relativo de los planetas y de la velocidad cambiante de la luna, entre otras cosas (Hofmann, 2002). Tales temas matemáticos se abordan en bachillerato, pero independientemente del aspecto psicogenético, sería conveniente incluir estos aspectos históricos en la asignatura de geometría, pero no desde el punto de vista meramente anecdótico, sino con el afán de escudriñar algunos aspectos de la epistemología de las matemáticas de la época.

Bajo tales consideraciones en el Renacimiento se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de pares ordenados de números reales *(x,y)* a un lugar geométrico (en términos modernos, *f(x,y)=0*) representado en un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta representaciones, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita a su vez ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico. Entonces lo que nos enseña la evolución histórica de las ideas matemáticas, parece que debieran rescatarse en la didáctica actual.

La recapitulación psicológica del desarrollo intelectual de nuestros estudiantes y el desarrollo histórico epistemológico de la noción de linealidad también es manifiesto en los saberes escolares que se ponen en escena en un curso de Álgebra Lineal. Los conceptos de este tema de matemáticas inician de forma incipiente desde el siglo XVIII con algunas ideas de Euler y de Cramer, entre otros. Se va creando una teoría de sistemas de ecuaciones lineales, tratándose el caso de n ecuaciones con m incógnitas, el estudio de los determinantes y el rango de un sistema.

Con anterioridad ya se conocían métodos de solución en las culturas ancestrales china, egipcia y babilónica. Aunque, uno de los primeros casos significativos de su tratamiento analítico, aparece en el libro de Euler, publicado en 1750, *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes*. Este estudio lo llevó al hecho de que cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución única, lo cual era una creencia generalizada en ese momento. Pero esto no era tan significativo para los matemáticos de la época, pues no ofrecía nuevos métodos de solución, lo novedoso fue la aproximación descriptiva y cualitativa de su estudio. Proporciona una conclusión para cualquier n: *que todas las ecuaciones sean diferentes entre ellas, o que no haya ninguna que esté contenida en otras.* (Euler (1750), citado en de Dorier (2000); traducción libre). En la lexicología moderna quiere decir que las ecuaciones son linealmente independientes, y que si hay ecuaciones contenidas en otras implica el concepto de dependencia lineal, el cual es más general y válido para una gran cantidad de objetos matemáticos.

En particular a dicha inclusión de una ecuación en otra Euler, citado por Dorier (2000) le llama *dependencia inclusiva*, la cual dominó la concepción en problemas con ecuaciones lineales durante el siglo XIX. Esta explicación del caso excepcional de dependencia inclusiva en sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, fue un cambio en el punto de vista en la aproximación de ecuaciones lineales. Finalmente, se puede decir que Euler no fundamentó ninguna aproximación teórica de la dependencia lineal, sin embargo sí aportó algunos elementos sutiles que tendrían intervenciones importantes posteriormente.

Cuando un estudiante en el ámbito didáctico aborda el tema de los sistemas lineales descritos por Euler, es recomendable resaltar que cuando alguna ecuación es múltiplo de otra, o que está incluida en otras, interviene el concepto de dependencia lineal, el cual forma parte de la propia noción de linealidad.

Cramer publicó en el siglo XVIII un documento titulado *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques* en el cual se aborda un método para solucionar sistemas de ecuaciones lineales n x n, que depende de los coeficientes, usando lo que en nuestros días se conoce como determinantes. Desde entonces este enfoque ha sido muy importante hasta convertirse en una teoría ampliamente conocida indispensable para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y conceptos vinculados al Álgebra lineal.

A pesar de que el método de Cramer está ubicado en algunos de los programas de estudio desde el bachillerato, el abordaje del tema de determinantes, en el mejor de los casos, es tratado de forma algorítmica, y sin articularse con otros métodos de solución, dejando de lado aspectos conceptuales que le dan sustento.

En la Teoría de determinantes el concepto de rango, tomó forma en el periodo comprendido entre 1840 y 1879, y algunas de las dificultades conceptuales a las que se enfrentaron los matemáticos de esa época fueron: la identificación de ser un invariante; la posibilidad de la misma definición de dependencia entre ecuaciones y vectores; y el hecho importante ha de que un sistema dual mismo conjunto de soluciones.

La relevancia didáctica que tiene el rango no ha sido suficientemente reconocida en relación a otros conceptos que se trabajan en el Álgebra lineal, de manera tal que se pierde gran parte de su esencia conceptual que es la de ser una vertiente fundamental de la noción de linealidad. Esto es, que cuando un sistema $n \times n$ tiene un rango menor que n existen vectores que son linealmente dependientes, o sea que alguno puede escribirse como combinación lineal de los otros, lo que implica un aspecto de la propia linealidad; la explicitación del proceso anterior le da sentido al aprendizaje de la misma asignatura.

El autor que definió en términos modernos las nociones de dependencia e independencia lineal simultáneamente para ecuaciones y vectores, y los consideró como la misma clase de objetos en cuanto a la linealidad, y que los asoció con el concepto de dependencia inclusiva ya mencionada, fue Frobenius. Este autor da un gran aporte tendiente a la definición moderna de vector y del concepto de base de las soluciones e incorpora la noción de *sistema asociado* de un sistema dado. Propuso una forma diferente de los procesos que devienen desde la época de Cramer. Ya no hubo una separación arbitraria entre incógnitas principales y secundarias, y ecuaciones, pero sobretodo el concepto de dependencia lineal reemplazó el término de dependencia inclusiva, acuñado por Euler. Fue hasta 1879 que Frobenius llamó al rango como el orden máximo del menor no nulo (Dorier, 2000).

Posteriormente, en otro estatus de abstracción y generalización, se incorporan conceptos como matrices, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Lo cual lleva a una estructuración temática y conceptual del Álgebra Lineal, donde el eje epistemológico sobre el que descansa es precisamente la noción de linealidad (Acosta, Rondero, y Tarasenko, 2008).

En el ámbito escolar la teoría de sistemas de ecuaciones lineales, el estudio de los determinantes, matrices, rango de un sistema, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales y en particular el concepto de transformación lineal

$$L(a\mathbf{u}+b\mathbf{v})=aL(\mathbf{u})+bL(\mathbf{v}),$$

se aborda hasta el primer curso de Álgebra lineal (Kolman y Hill, 2006) en los primeros semestres de licenciatura. En referencia a ello Golubitsky y Dellnitz (2001) sostienen que: *la idea central en álgebra lineal es la linealidad*. Pero dicha noción se estudia en etapas escolares anteriores con otras formas y significados, los cuales están desarticulados con respecto a la definición formal.

La siguiente tabla muestra un comparativo entre aspectos de la evolución histórica epistemológica y el desarrollo individual que se da en el ámbito didáctico:

La *ontogenia* recapitula la *filogenia* de la *Noción de linealidad*			Línea del tiempo
Historia y personajes	Significado asociado a la noción	Etapa escolar donde se aborda	
Épocas tempranas de la humanidad	Proporción cualitativa *mayor que, menor que*	Jardín de niños	
Civilizaciones, egipcia, babilónica y china (500 a. c.)	Proporción cuantitativa *interés simple*	Educación primaria	
Grecia (400 a. c.) Eudoxio de Cnido	Proporción cuantitativa *igualdad de dos razones*	Educación primaria	
Grecia (300 a. c.) Euclides	Concepto geométrico *Recta*	Educación primaria	
Renacimiento Descartes y Fermat (Siglos, XVI y XVII)	La *recta* como lugar geométrico en un sistema coordenado	Educación secundaria y Bachillerato	
Siglo XVIII, Euler Cramer	Solución y propiedades de *sistemas de ecuaciones lineales*	Bachillerato y educación superior	
Siglo XIX, Cramer, Frobenius y otros.	Concepción de *rango, dependencia e independencia lineal, transformación lineal*	Educación superior	

Lo que se propone en la tabla es de carácter funcional y no estructural, y no pretende ser contundente, sino que es un elemento de reflexión didáctica.

Conclusiones

Hay diversos temas de matemáticas que se explicitan mediante nociones y significados asociados a la *linealidad*. Sin embargo, en el ambiente escolar de licenciatura no se resaltan de manera suficiente sus significados asociados, ni se vinculan con temas afines del nivel medio superior.

El paralelismo entre la evolución de las nociones y el desarrollo psicogenético se puede entender cuando se trata de conceptos que son precientíficos pero no es posible generalizar tal paralelismo de manera absoluta en el caso de las teorías científicas.

En este trabajo se buscan precisar algunos elementos que se establecen en el recapitulacionismo entre lo histórico epistemológico y el desarrollo de la noción en situación escolar, tales que, a partir de esta investigación, lleve a resultados que favorezcan un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática del aula. Para tal propósito el rescate de los significados de la noción de linealidad en las etapas históricas permite aportar elementos para su aprendizaje en el ámbito escolar.

Referencias bibliográficas

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2008). Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. *Memoria HPM* (pp. 301-308). México: CINVESTAV-IPN.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2010) La resignificación de la noción de linealidad. *ALME 23* (enviado para su publicación). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dorier, J. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Mathematics Education Library. Vol. 23. Dordrecht. The Netherlands.

Filloy, E. (1998). *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual development and the teaching of mathematics: From philogenesis and ontogenesis theory to classroompractice. En L. D. English (ed.) *Handbook of international research in Mathematics Education.* USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. NTCM.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción.* España: Gedisa.

Golubitsky, M. y Dellnitz M. B (2001). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de MATLAB.* México: Thomson.

Hofmann, J. (2002). *Historia de la Matemática.* México: Limusa.

Kolman, B. y Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal.* México: Pearson Educación.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo XXI Editores.

Ruiz, E. y Valdemoros, M (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(2), 299-324.

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2001) *Precálculo.* México: Thomson editores.

Struik, D. (1986). *Historia concisa de las matemáticas.* [Serie Maestros del Pensamiento Científico]. México: Instituto Politécnico Nacional.