

ESTUDIO DE LA DERIVADA EN FENÓMENOS DE CAMBIO EN UN ESCENARIO PERIÓDICO

Ángeles Alejandra Ordóñez Morales, Alma Rosa Pérez Trujillo, Hipólito Hernández Pérez

Universidad Autónoma de Chiapas

México

anlejandra@hotmail.com

Campo de investigación: Socioepistemología

Nivel: Superior

Resumen. Esta investigación busca articular los contextos analítico, gráfico, y físico desde una perspectiva de las prácticas sociales que muestren elementos que den significados a la relación $f - f'$ en un contexto de funciones periódicas mediante actividades en donde se involucren fenómenos de cambio como el movimiento. Esta articulación de contextos se desarrolla mediante el uso de herramientas tecnológicas para simular y modelar movimientos y poder estudiarlos desde un ambiente gráfico y analítico.

Palabras claves: Lo periódico, la relación función-derivadas

Introducción

Lo poco significativa que es la relación entre una función y su derivada provoca que las propiedades de una parezcan ser heredables a la otra. Por ejemplo, si a una función se le suma una constante, esta constante permanece en su derivada; en consecuencia, si una gráfica tiene un desplazamiento vertical sobre el eje y , la gráfica de su derivada también se desplaza verticalmente. En el mismo sentido esta “herencia” ocurre también para la propiedad periódica ya que las funciones trigonométricas son el referente para esta propiedad, de tal manera que resulta común que la implicación f es periódica $\Leftrightarrow f'$ es periódica se trivialice al considerar únicamente estas funciones (Ordóñez, 2007).

En esta investigación se desea establecer la articulación de los contextos analítico, gráfico, y físico desde una perspectiva de las prácticas sociales para construir elementos que doten de significados a la relación $f - f'$ en un contexto de funciones periódicas.

Esta articulación de contextos se desarrolla mediante el uso de herramientas tecnológicas para simular y modelar movimientos y poder estudiarlos desde un ambiente gráfico y analítico.

Problemática

Investigaciones en Matemática Educativa, en particular estudios con un enfoque socioepistemológico, dan cuenta del poco significado que se le da a la derivada y a su primitiva, Cantoral (1997) reporta que los estudiantes son capaces de derivar una función pero no pueden reconocer en cierto problema la necesidad de una derivada o de reconocer la derivada de una función como otra nueva función susceptible a volver derivar.

Algunas investigaciones muestran que en las construcciones de los estudiantes usan argumentos que toman por teoremas. En apariencia son verdaderos porque en algunos momentos funcionan pero en otros no; a estos teoremas se les llama teoremas factuales; al trabajar con la relación $f - f'$ se encuentran algunos de estos teoremas, por ejemplo, Aguilar (1999) al trabajar con estudiantes de bachillerato reporta que si a la función primitiva f se le suma una constante $f + a$, también se le sumará una constante a la derivada f' , $f' + a$, a pesar de saber analíticamente que la derivada de f y $f + a$ son iguales. González (1999) desarrolla una secuencia con profesores y en la puesta en escena encuentra que es común suponer que si $f'(a) > 0$, entonces también se cumple $f''(a) > 0$. Hernández (2004) aplicó una situación y halló que dada $f(x) = x^2 + B$, entonces $f'(x) = 2x + B$; suele manejarse que si la gráfica de una función sufre un desplazamiento vertical sobre el eje y , entonces la gráfica de su derivada también se desplaza verticalmente, por tanto, "la gráfica de f' persigue a la gráfica de f ".

En el mismo sentido para funciones periódicas también se genera este tipo de resultado Ordoñez (2007), reporta que al preguntar sobre la veracidad o falsedad de la doble implicación:

$$f \text{ es periódica} \Leftrightarrow f' \text{ es periódica}$$

se trivializa, como verdadera, una respuesta muy común ha sido "Sí, porque si tomamos $f(x) = \text{sen}x$ la cumple. Ese es al menos mi conocimiento sobre ello". Pensamos que esto se ha dado debido a que se asocia a la periodicidad como una característica de las funciones periódicas, y descrita por la igualdad $f(x) = f(x + p)$ (Granville, 1993; Leithold, 1998 y Stewart, 1999).

Aún cuando dicha doble implicación se perciba como no trivial, el privilegio es hacia los aspectos analíticos formales de la matemática. Como ejemplo, Spivak (1980) presenta a la periodicidad

como una propiedad de las funciones en general y no como una propiedad exclusiva de las funciones trigonométricas.

Bajo la problemática de establecer significados para la función-derivada, el objetivo de esta investigación es establecer la articulación de los contextos analítico, gráfico, y físico desde una perspectiva de las prácticas sociales que muestren elementos que den significados a la relación $f - f'$ en un contexto de funciones periódicas, en donde se involucren fenómenos de cambio como el movimiento apoyados en el uso inteligente de la tecnología. De acuerdo a Pérez (2009) el uso de la tecnología como una herramienta apoya la generación de conocimiento matemático y establece un vínculo en la articulación de los resultados de investigaciones socioepistemológicas y la matemática escolar vía diseños didácticos en los que las prácticas sociales viven de forma intencional.

Investigación

A lo largo de nuestra investigación encontramos que cuando hacemos una separación de contextos y cuestionamos la pregunta *¿se cumple f es periódica $\Leftrightarrow f'$ es periódica?* encontramos distintas respuestas.

Al preguntar a un profesor de Ingeniería Civil en un contexto analítico argumenta que ambas implicaciones se cumplen y se mueve únicamente en las funciones Seno y Coseno, y cuando es cuestionado en un contexto de graficas vemos que no se cumplen ambas implicaciones (ver fig. 2 sus afirmaciones están encerradas), sin embargo no es consciente de este hecho ya que al separar los contextos le asigna a un mismo objeto matemático diferentes concepciones.

Si las dos porque las únicas funciones periódicas son las trigonométricas.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$$

periódica \leftrightarrow periódica

Fig 1. Contexto analítico

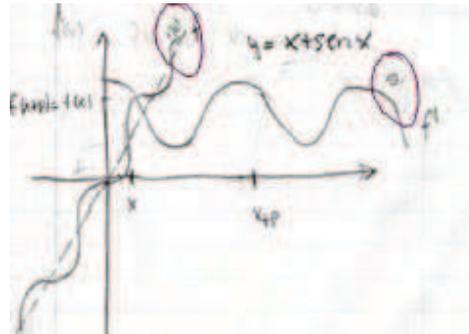


Fig 2. Contexto gráfico, la función $f(x) = x + \sin x$ no es periódica y su derivada $f'(x)$ si lo es

Al analizar detenidamente ambas implicaciones tenemos que se cumple la proposición: Si es f periódica con periodo a y diferenciable, entonces f' es periódica. En efecto

Si f periódica con periodo a se tiene $f(x) = f(x + a)$ derivando ambos lados de la igualdad y usando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = f'(x + a) * \frac{d}{dx}(x + a) = f'(x + a) * (1) = f'(x + a)$$

De aquí:

$$f'(x) = f'(x + a)$$

Es decir la derivada de una función periódica es periódica.

Para analizar la implicación recíproca consideremos la función $f(x) = x + \sin x$ esta función no es periódica debido a que es una función creciente, sin embargo su derivada $f'(x) = 1 + \cos x$ si es periódica período 2π .

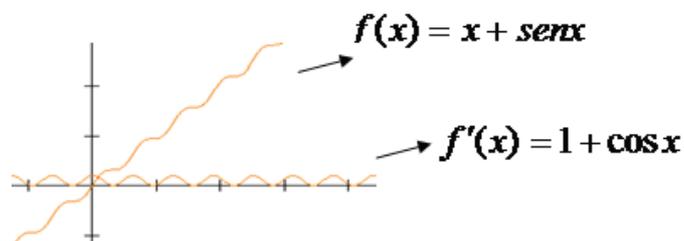


Figura 3. Graficas de la función $f(x)=x +\text{sen}x$ y su derivada

Por lo anterior vemos que si la derivada es periódica no implica que la antiderivada lo sea.

Para un contexto físico, Ordóñez (2007) menciona que si pensáramos en la modelación del movimiento a través de una función $f(x)$ con las características propuestas, resultaría que mientras el desplazamiento no es periódico, su velocidad $f'(x)$ sí lo sería. Esto es, estamos frente a ciertos tipos de movimientos con desplazamientos que no son periódicos pero sí mantienen algunas de sus características periódicas, como la velocidad y por consecuencia, su aceleración. Esto nos lleva a considerar que el comportamiento periódico visto de manera significativa en las funciones y sus derivadas podría dar argumentos para analizar y caracterizar un movimiento desde un tránsito entre los contextos físico y gráfico.

Hasta aquí identificamos que articular contextos nos permite encontrar elementos situacionales para dotar de significados a la relación función –derivadas en un escenario que involucra fenómenos de cambio con comportamientos periódicos. Por lo que en esta investigación proponemos algunas actividades a realizar con el uso de tecnología (calculadoras-graficadoras y sensores de movimiento) para articular las representaciones analíticas, gráficas y físicas y construir elementos significativos de dicha relación en un escenario periódico en donde se involucren fenómenos de cambio como el movimiento. Dichas actividades aun están en construcción y pretendemos que sean base para que en un futuro lleguemos a una secuencia didáctica para incidir en la matemática escolar.

Marco teórico

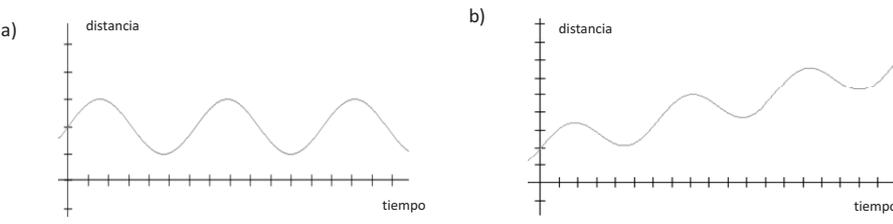
Por la naturaleza de nuestra investigación el marco teórico que nos guía es la socioepistemología entendida como una epistemología de prácticas sociales asociadas a la producción y difusión del saber científico a través de una visión sistémica de las cuatro componentes de la construcción social del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral, 2004). La práctica social para esta aproximación teórica son actividades que las personas hacen a propósito, que no son inerciales y que se realizan de manera intencional con cierto significado. Es decir, la intencionalidad es una característica fundamental que imprime significados al conjunto de acciones que tienen que ver con la intención de hacer, reproducir y comunicar el conocimiento matemático (Buendía 2004).

Buendía (2004, 2005, 2006) propone una socioepistemología para lo periódico en ella señala a la predicción como una práctica asociada al reconocimiento significativo de dicha propiedad. Se reconoce a lo periódico como una construcción social en la que los aspectos analíticos de la periodicidad se nutren de otros de carácter cultural, histórico e institucional.

Las actividades

En esta sección mostramos las actividades que estamos trabajando, en donde la idea es articular las representaciones analíticas, gráficas y físicas de la relación función-derivadas.

Actividad A



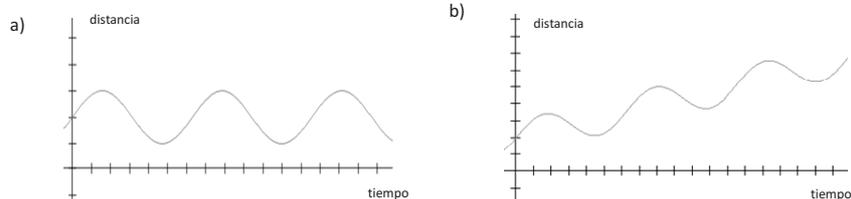
a) distancia vs tiempo

b) distancia vs tiempo

1. En las gráficas anteriores, describa el movimiento y su velocidad.
¿Cuál es la velocidad después de 45 segundos?
2. Con ayuda de las graficas realiza una tabla de valores tiempo-distancia
Encuentra la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo.
3. Realiza una gráfica de los datos obtenidos y el tiempo
¿Cuál es la posición y la velocidad en el tiempo 125?

Actividad B

Describe como debe moverse un cuerpo frente a un sensor para que éste dibuje las siguientes graficas



¿Qué velocidad tiene el cuerpo en el tiempo 124?

Con estas actividades se busca intencionalmente que al describir y caracterizar movimientos es necesario considerar la posición y sus variaciones, es decir, velocidad y aceleración; a demás provocar el uso del comportamiento periódico como una herramienta para predecir. El uso de la tecnología en ambas actividades nos permite visualizar la forma de los movimientos ya que la idea, de las gráficas como la trayectoria a seguir se descarta de manera inmediata.

Comentarios finales

Hemos explorado estas actividades mediante entrevistas individuales cada una con distintos participantes. Los primeros resultados que obtenemos es que al articular contextos la derivada se irá construyendo al matematizar la variación del movimiento y los cambios de las gráficas.

De tal forma que realizar actividades en contextos de movimientos nos permite analizar qué es lo que varía –y cómo varía– esto nos ayuda asignar significados a la derivada más allá de lo analítico y algebraico. Trabajar en un contexto de variación nos permite identificar el papel de las prácticas para la construcción de significados de la relación función-derivadas.

Referencias bibliográficas

Aguilar, M. (1999). *Relaciones entre la derivada y la primitiva: El papel del registro gráfico en algunas de las construcciones de los estudiantes*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Buendía, G. (2005). Lo periódico: una revisión en el marco de la socioepistemología. En Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R., Carrillo, C., López, I., Navarro, C. (eds) *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*. (pp. 77-90) México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Buendía, G. (2006) Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 9 (2), 227-251.

Buendía, G. y Ordóñez A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 12(1), 7-28

Cantoral, R. (1997). *Matemática Educativa. Serie: Antologías, número 1. Programa Editorial del Área de Educación Superior (pp. 81-98)*. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cantoral R. (2004) Pensamiento y Lenguaje Variacional, una mirada socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sanchez y J. Molina (Eds.), *Acta latinoamericana de matemática educativa*, Vol.18, pp.1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Granville, W. (1993). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa Noriega Editores

Hernández, D. (2004). *Las argumentaciones gráficas de los estudiantes en las relaciones de f y f' para las funciones x , x^2 , y x^3* . Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Leithold, L. (1998). *El cálculo*. 7 ed. México: Oxford University Press – Harla

Ordoñez, A. (2007). *Un estudio de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas*. Tesis de maestría no publicada, UNACH, México.

Pérez, A. (2008). *Una vinculación de la matemática escolar y la investigación a través de diseños didácticos con el uso de la tecnología*. Tesis de maestría no publicada, UNACH, México.

Spivak, M. (1980) *Calculus*. USA: Publish or Perish, Inc. Second edition

Stewart, J. (1999) *Cálculo Diferencial e Integral*. México: International Thomson Editores.