LOS SIGNIFICADOS ASOCIADOS A LA NOCIÓN DE FRACCIÓN EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Rebeca Flores García
CICATA – IPN (México)
rebefg@gmail.com

Resumen. Este artículo describe una conexión con la idea de articularse a lo que en la disciplina de Matemática Educativa se está produciendo a través de diversas vertientes de investigación relacionadas con el concepto de fracción que se están generando, algunas ligadas a la noción de fracción, a su operatividad y a los significados que le son asociados. Aquí se presenta y analiza un problema de reparto resuelto por jóvenes de entre 12 y 15 años pertenecientes a una escuela secundaria del Estado de México, en cuyas producciones se evidencian diferentes significados del concepto de fracción así como de formas de operación entre ellas.

Palabras clave: fracción, significado, operatividad, número racional

Abstract. The article describe a link to the idea of articulating what in the discipline of Mathematics Education is taking place through various aspects of research related to the concept of fractions that are being generated, some linked to the concept of fraction, in operational and meanings that are associated. Here we present and analyze a distribution problem solved by young people between 12 and 15 years belonging to a secondary school in the State of Mexico, whose productions are evident in different meanings of the concept of fractions as well as methods of operation between them.

Key words: fraction, meaning, operability, rational number

Introducción

En la Matemática Educativa para llevar a cabo el análisis de fenómenos cognitivos y del aprendizaje matemático, se utilizan algunas nociones teóricas, las cuales actualmente siguen siendo clarificadas, entre ellas se encuentra la noción de significado, la cual ha sido expuesta por D'Amore (2005) a través de dos vertientes: una visión desde lo real y otra desde lo pragmático. Bajo estas visiones intentamos mirar la problemática presentada en esta investigación.

Uno de los contenidos que en el nivel básico ha sido muy estudiado sin duda alguna es el de fracciones. Numerosos estudios que respecto a este objeto se han hecho tanto a nivel nacional como internacional, por ejemplo Perera y Valdemoros (2007), reconocen a las fracciones como uno de los contenidos de las matemáticas que manifiestan dificultades tanto para su enseñanza como para su aprendizaje, fundamentalmente en los niveles básicos de educación. Fandiño (2005), también reconoce que la noción de fracción y la operatividad correspondiente son de los contenidos más estudiados desde el inicio de la investigación en Matemática Educativa debido quizá a que representan una de las áreas de dificultad más comunes en las escuelas de todo el mundo, ya que también nos advierte de algunos errores típicos cometidos por los estudiantes, entre ellos se destacan:

- Ordenar fracciones y escribir números decimales,
- Las operaciones entre fracciones y entre números racionales,
- Reconocer los diagramas más comunes,
- Utilizar el adjetivo "igual",
- Manejar la equivalencia,
- Simplificar fracciones,
- Utilizar figuras no estándares,
- Pasar de una fracción a la unidad que la ha generado y
- Manipular de manera autónoma diagramas, figuras o modelos.

Así es como nuestra de pregunta de investigación se enfocó en responder la siguiente pregunta: *¿Cuáles son los significados asociados a la noción de fracción presentes en la escuela secundaria?,* de este planteamiento se deriva un cuestionamientos más: *¿Cuáles son los significados asociados a la noción de fracción movilizados por los estudiantes?*

De acuerdo con Valdemoros (1993), Dávila (2002) y Fandiño (2005), uno de los estudios que ha contribuido en el análisis de los diferentes significados que le son asociados a la fracción ha sido la investigación que desde los años setenta ha sido desarrollado por Kieren (1988), quien consolida y plantea un modelo teórico con cuatro subconstructos esenciales, el otro (parte – todo) se encuentra implícito en cada uno de los otros:

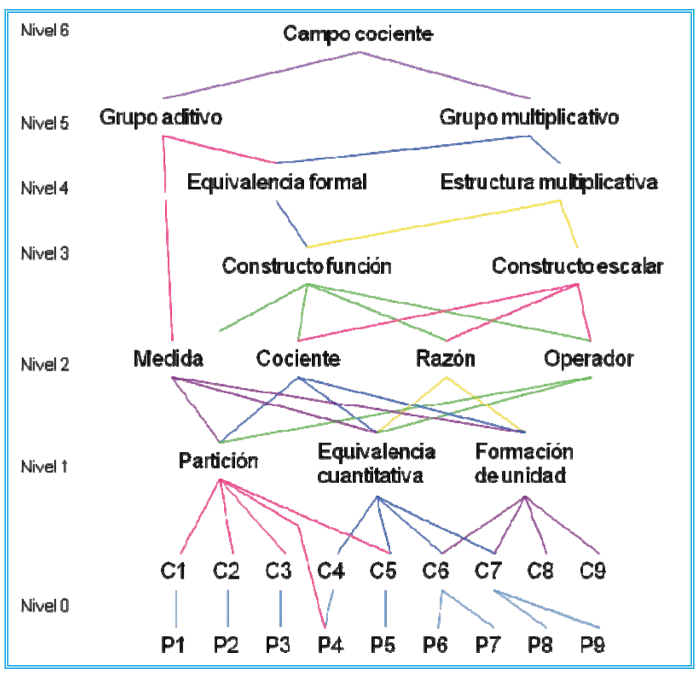


Figura 1. Conocimiento "ideal" del número racional (Millsaps, 2005, p.19)

En la base del modelo se observa un sistema de conocimiento cercano al plano de los hechos (nivel 0), en esta zona el conocimiento es local; en un siguiente nivel se encuentran los *mecanismos de formación*, los cuales corresponden a los procesos de partición, equivalencia cuantitativa y formación de unidades divisibles, los tres le permiten incluso a una persona joven "resolver" cierto tipo de problemas relacionados con número fraccionarios, los cuales se pueden representar mediante un lenguaje fraccionario aditivo y son la base para el conocimiento de la fracción unitaria (Kieren, 1988). En un segundo nivel se ubican los *mecanismos intuitivos*: medida, cociente, razón y operador guardan conexiones con los procesos ya mencionados, además de poseer características o "cualidades" aditivas (en el caso de la medida y el cociente) y multiplicativas (para la razón y el operador) (Valdemoros, 1993). Para un tercer nivel ubicamos al constructo función y al constructo escalar, los cuales, en el modelo contribuyen al desarrollo del razonamiento proporcional y al campo conceptual multiplicativo de Vergnaud (citado por Millsaps, 2005). Entendiéndose este campo multiplicativo como "todas las situaciones que pueden ser analizadas como simples problemas de proporcionalidad múltiple y para los cuales necesitas multiplicar o dividir". En el cuarto nivel se encuentran la equivalencia formal y la estructura multiplicativa, las cuales representan la síntesis de la construcción formal de la fracción y del número racional. En el quinto nivel se ubican los grupos aditivo y multiplicativo; los cuales incluyen las 4 operaciones con los números racionales y cuyo acompañante es la habilidad para crear y representar problemas de los números racionales. Finalmente, aparece la noción de campo cociente, el cual además de ser extenso atraviesa los otros niveles (los cuales se encuentran interconectados) hasta llegar al plano de los hechos, lo cual complejiza aun más el desarrollo de este modelo teórico.

Metodología

La investigación que a continuación se presenta, recupera elementos de corte cualitativo, por lo que es trascendente recuperar dónde, con quiénes y cómo fue llevada a cabo, pretendiendo dar respuesta a las preguntas planteadas.

Centramos nuestra atención en analizar la presencia de las fracciones en el discurso matemático escolar del nivel secundario a través de la presentación de investigaciones realizadas en torno a los significados que se otorgan a las fracciones en la escuela y a la identificación de los mismos en libros de texto de uso habitual en la actualidad y en el programa de estudio de México. Hechos que permitieron conformar un instrumento conformado por seis planteamientos que se aplicó a estudiantes de nivel secundario (entre 12 y 15 años de edad) con la finalidad de analizar la manera en la que algunos de estos significados son abordados y trabajados por ellos. Para el caso que nos ocupa presentaremos las producciones generadas de algunos estudiantes al resolver un problema que gira en torno al reparto, que como vimos es uno de los mecanismos de formación considerados en el modelo de Kieren (1988), guardando vínculos con nociones como medida, operador, cociente, los cuáles intentaremos dejar ver en las producciones de los estudiantes. El cuestionario fue aplicado a 36 estudiantes de cada grado del nivel secundario, haciendo un total de 108 estudiantes, todos ellos cursaban en el turno vespertino. Los bosquejos que a continuación se presentan, se encuentran ordenadas en distintos niveles, que van del menor al mayor grado de profundidad, por lo que el último nivel se presentará la solución "completa" propuesta por alguno de los estudiantes, el propósito de efectuar la presentación a través de niveles es con la intención de evidenciar la evolución del significado generada por ellos, lo cual puede revisarse con más detalle en Flores (2010).

Resultados

En la literatura se reconoce que el estudio de las fracciones es importante por sí mismo y porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, como son el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en el álgebra (SEP, 1994)

El planteamiento enuncia lo siguiente:

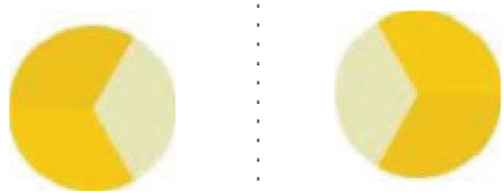
> *Tres amigos entran a un restaurante y piden dos pizzas que reparten entre ellos. ¿Cuánto le toca a cada uno? Poco después llega otro amigo. ¿Cuánto debe convidarle cada uno para que los cuatro tengan la misma cantidad?* (SEP, 2001, p.82)

La solución del problema incluye nociones relacionadas con el concepto de fracción; entre éstas, las de unitización (Lamon, 1999), parte todo, partición (que para las fracciones implica repartir en partes iguales), cociente, operador, medida y razón. Asimismo incluye las nociones de equivalencia de fracciones, así como las operaciones de adición, diferencia y multiplicación de fracciones.

Una mirada a la solución del problema

Solución propuesta a la primera pregunta:

Corresponde al reparto de las 2 pizzas (a partes iguales) entre los 3 amigos. Lo cual se obtiene con sólo dividir la unidad de 2 (1 de 2) entre 3; es decir, al calcular $\frac{2}{3}$, lo cual indicará que cada uno recibirá $\frac{2}{3}$ de pizza.



Reparto a 3 amigos

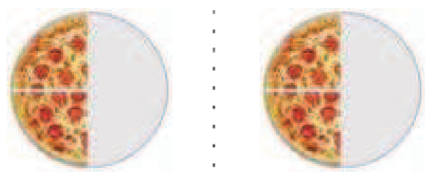
$\frac{1}{3}$ (de 2)

$= \frac{2}{6}$ (de 2)

$\approx \frac{2}{3}$ (de 1)

Figura 2. Representación de $\frac{2}{3}$ de cada pizza.

Solución propuesta a la segunda pregunta:



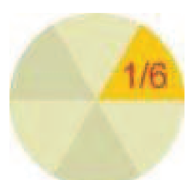
Reparto a 4 amigos

$\frac{1}{4}$ (de 2)

$= \frac{1}{2}$ (de 1)

Figura 3. Representación de $\frac{1}{4}$ de cada pizza

Una solución dependiente: (la segunda respuesta en función de la primera)



$\frac{2}{3} - x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{6}$ (de 1)

$\approx \frac{1}{4}\left(de\,\frac{4}{6}\right)$

Figura 4. Representación de $\frac{1}{6}$ de pizza

Así; cada uno de los 3 amigos iniciales; deberán dar $\frac{1}{4}$ de lo que recibieron en el primer reparto, al cuarto amigo que llega al final. Esto debido a que $\frac{2}{3}\left(\approx \frac{4}{6}\right)$ de una pizza, se convierte en la nueva unidad a considerar para dar respuesta a la segunda pregunta. Ha de observarse que el problema y su solución incluyen (al menos) 3 tipos de unidades distintas: 1 (de 2), 2 (de 1) y 1 $\left(de\,\frac{2}{3}\right)$. Asimismo incluyen la noción de equivalencia y las operaciones de adición sustracción y multiplicación de fracciones. Hechos que apuntan a propiedades de Q como estructura algebraica (es decir, como un conjunto no vacío en el que se tienen definidas operaciones y éstas poseen propiedades). Propiedades como: $\frac{a}{b}(c)=\frac{c}{b}(a)$, $m\left(\frac{1}{m}\right)=1$, $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$, entre otros.

A continuación se presentan evidencias de las soluciones de 4 estudiantes. En un primer nivel se encuentra lo propuesto por Vanessa del primer grado:

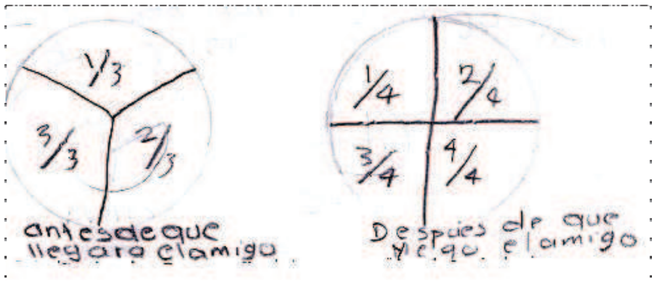


Figura 5. La solución propuesta por Vanessa.

Ella responde las dos preguntas representando el todo (las 2 pizzas) usando sólo un círculo. Hace uso de la noción parte – todo. Utiliza la escritura de fracciones de una manera aparentemente "ordinal" ($\frac{1}{3}$ para el primer tercio; $\frac{2}{3}$ para el segundo tercio, etc.). No percibe una conexión entre la primera y la segunda pregunta.

En un segundo nivel se encuentra la respuesta propuesta por Enriqueta, quien también se encontraba en primer grado:

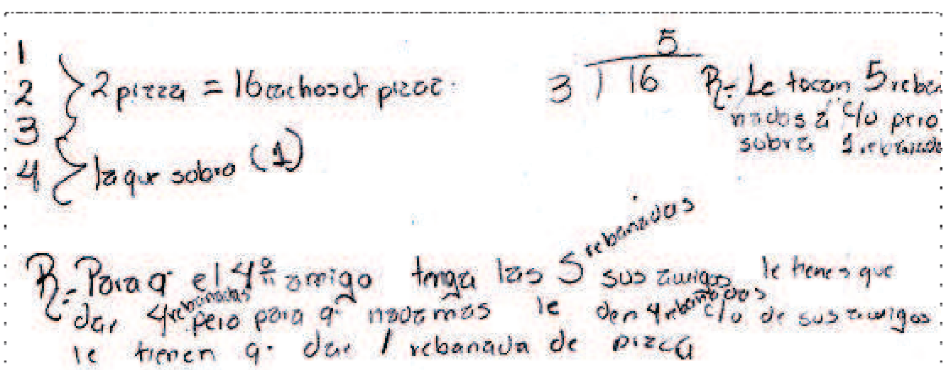


Figura 6. El procedimiento de Enriqueta.

Ella conecta las dos preguntas. Sus respuestas son "aproximadas" y se deben a que la pregunta (que parece dominante) es la segunda. Anticipa una partición de las 2 pizzas en un total de 16 rebanadas, de manera que al repartirlas entre los 4 amigos, cada uno reciba un total de 4 rebanadas. Hecho que obtiene cuando cada uno de los 3 amigos iniciales le convida una de sus

5 rebanadas que le tocaron en el primer reparto. Obteniendo así 3 rebanadas, las cuales sumadas con aquella sobrante de ese primer reparto, le proporcionaría la cantidad requerida. Enriqueta sólo realiza operaciones con enteros.

En un tercer nivel se encuentra el procedimiento de Brenda de tercer grado:

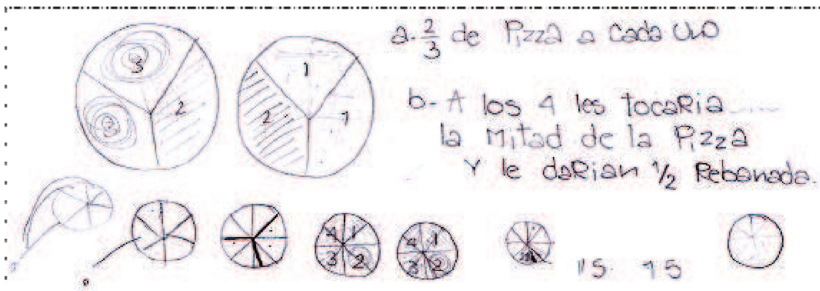


Figura 7. El procedimiento de Brenda.

Aquí ella resuelve correctamente la primera parte; no obstante, hace uso de una notación fraccional, logra conectar las dos preguntas y contesta acertadamente la segunda parte también (aun cuando no lo consiguen expresar en términos fraccionarios de la unidad original). En su solución implícitamente establece que:

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2 rebanadas 1 rebanada

En un último nivel se encuentra el procedimientos de Sandra de segundo grado, quien nos evidencian una solución correcta.

Figura 8. El procedimiento de Sandra.

Sandra incorpora en su solución; de manera implícita, los hechos:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}$$

$$\frac{2}{3}-\frac{2}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Ella logra responder gráficamente la segunda pregunta. Obsérvese que la respuesta a la segunda pregunta está dada en términos de una pizza como unidad, y no como una comparación con la “nueva unidad $\left(\frac{2}{3}\right)$”

Implicando nociones como: equivalencia, orden y comparación.

1/3				1/3				1/3			
1/6		1/6		1/6		1/6		1/6		1/6	
1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12

Figura 9. Fracciones equivalentes de $\frac{1}{3}$

Conclusiones

Al mirar con detenimiento el proceso de solución queda de manifiesto que el problema planteado incluye los siguientes elementos: entre los significados asociados a la noción de fracción involucrados en el problema: (*parte todo, operador, medida, cociente, partición,* la noción unidad: 2 de 1; 1 de 2; 1 de $\frac{2}{3}$ (entre otras); junto con la equivalencia de fracciones, la adición, la diferencia y el producto de fracciones). De acuerdo con las respuestas proporcionadas por los estudiantes, una solución “completa” la ofrece una estudiante de segundo grado.

Algunas de las dificultades detectadas fueron: a) la interpretación del problema, debido a que algunos sólo responden una de las dos preguntas que incluye el problema; b) la forma en que llegan a la respuesta de la segunda pregunta – evadiendo considerar las condiciones para responder esa pregunta; c) la nueva unidad que se considera y que es $\frac{2}{3}$, parece ser la idea que no logra trascender, el hecho de partir ahora de una fracción y repartirla nuevamente en partes iguales; d) acceder a la noción de equivalencia, pocos son los que perciben cómo es que esa noción les permite arribar a fracciones equivalentes para poder realizar el reparto solicitado.

Referencias bibliográficas

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. México: Reverté.

Dávila, M. (2002). *Las situaciones de reparto para la enseñanza de las fracciones. Aportes para la elaboración de un estado del conocimiento*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Fandiño, M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Bologna, Italia.

Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Millsaps, G. M. (2005). *Interrelationships between teacher's content knowledge of rational number, their instructional practice, and students' emergent conceptual knowledge of rational number.* Tesis de doctorado no publicada, Ohio State University, Columbus.

Perera, P. y Valdemoros, M (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática* XI, 209–218.

Secretaría de Educación Pública (1994). *Libro para el Maestro. Educación Secundaria*. México.

Secretaría de Educación Pública (2001). *Libro para el Maestro. Educación Secundaria*. México.

Valdemoros, M. (1993). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en* él. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.