# LAS ECUACIONES DE LA RECTA Y LA LINEALIDAD

Juan Alberto Acosta Hernández, Oleksandr Karelin, Germán Reséndiz López
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. U. Tecnológica de Tulancingo (México)
acostah@uaeh.edu.mx, karelin@uaeh.edu.mx, gresendiz@hotmail.com

**Resumen.** La noción de linealidad en la didáctica del nivel superior no es explícita desde las distintas representaciones analíticas de la recta en el plano. Las ecuaciones mismas representan un obstáculo en la interpretación del concepto de transformación lineal. Desde un punto de vista histórico epistemológico el estudio matemático de la linealidad se inicia durante el desarrollo del Álgebra Lineal, a mediados del siglo XIX. Los trabajos sobre la recta tangente sirvieron para profundizar la noción de linealidad. En el ambiente escolar moderno de licenciatura no se resaltan de manera suficiente los significados asociados a la linealidad ni se vinculan con temas afines del nivel medio superior. Se busca precisar, desde lo epistemológico, algunos indicios respecto a las ecuaciones de la recta en el plano, para propiciar un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar. Para tal propósito el rescate de las ecuaciones de la recta permite aclarar aspectos vinculados con la noción de linealidad y sus significados.

**Palabras clave**: linealidad, recta, epistemología, didáctica, significados

**Abstract.** The notion of linearity in the higher educational level is not explicit from the different analytical representations of the line in the plane. The equations themselves are an obstacle in the interpretation of the concept of linear transformation. According to a historical epistemological point of view mathematical studies of the linearity start together with development of linear algebra in the mid-nineteenth century. Work on the tangent line served to deepen the notion of linearity. In the modern school environment degree not sufficiently highlight the meanings associated with the linearity or related topics are linked to the high school level. It seeks to clarify, from the epistemological, some clues to the equations of the line in the plane, to facilitate a consistent and structured didactic discourse in school mathematics. For this purpose the rescue of the equations of the straight clarify aspects linked to the notion of linearity and their meanings

**Key words**: linearity, line, epistemology, didactics, meanings

## Introducción

En la investigación *La noción de linealidad. Una aproximación epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural* (Acosta, 2011) se considera que la noción de linealidad, es un elemento fundamental en la construcción de saber matemático. El propósito general de dicho trabajo es mostrar y caracterizar los diferentes significados de la noción de linealidad y de su antecedente conceptual la noción de proporcionalidad, desde una perspectiva sistémica. Se observa que dichas nociones cumplen la función de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada, al aportar elementos en general para el aprendizaje de la matemática lo que proporciona su función de nociones metamatemáticas.

En particular para este trabajo, se considera un Marco Conceptual constituido por las interpretaciones acerca del término *noción* (un saber susceptible de ser enseñado en ámbito escolar), y de las *nociones didácticas* (Chevallard, 1997).

Las nociones forman distintos estratos del funcionamiento del conocimiento matemático escolar las cuales se dividen en dos grupos (Chevallard, 1997): las nociones explícitas que están conformadas por las nociones matemáticas (Son objeto de estudio y evaluación en si mismas, además sirven como instrumento para el estudio de otros objetos.); y las nociones implícitas conformadas por las nociones paramatemáticas (son las que se utilizan conscientemente, esto es que son reconocidas y designadas como instrumentos para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en si mismas, y por lo tanto no son objetos de evaluación directa.) y las nociones protomatemáticas (Son las nociones que se emplean en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos.) (Martínez, 2002).

En este reporte de investigación se sostiene que la noción de linealidad en la didáctica del nivel superior no es explícita desde las distintas representaciones analíticas de la recta en el plano, ni se vincula con la proporción directa. Además la linealidad adopta un estatus didáctico diferente, de acuerdo al curso y al grado escolar.

La forma científica de conducir este trabajo, está sustentada en el enfoque sistémico, además de tomar en cuenta, como elemento metodológico, el *rescate epistemológico de los significados* (recuperación de significados que subyacen al conocimiento, lo cual se realiza en diferentes momentos de la evolución del mismo (Acosta, 2011)) de la noción de linealidad.

## Antecedentes históricos epistemológicos

La matemática previa a la griega, en particular la babilónica y la egipcia, alcanzaron un gran desarrollo de la habilidad operatoria, para afrontar cierto tipo de problemas de la vida cotidiana, desde la distribución de una herencia, hasta el cálculo de interés compuesto. La aritmética babilónica funcionaba para hacer cálculos astronómicos, mercantiles, y mediciones de áreas y volúmenes; en tales estimaciones, la proporción directa se empleaba con frecuencia (Filloy, 1998).

En la cultura egipcia, no sólo se resuelven problemas aritméticos, sino se dieron elementos de solución a ecuaciones lineales, que escritas en simbología moderna son de la forma $x+ax=b$ o $x+ax+bx=c$. En el *Papiro de Rhind,* se muestra la solución de este tipo de ecuaciones, empleando un método que en nuestros días se conoce como el *método de la falsa posición* (Boyer, 1991).

En *Los Elementos* de Euclides, escrito hacia el año 300 a. C., los postulados, *Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto y toda recta se puede prolongar* *indefinidamente.* Dichas proposiciones se refieren a la recta, no sólo en el sentido de que por dos puntos pasa una recta, sino además de que ésta es única.

En el primer postulado del primer libro, *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes, da la definición más empleada de la recta hasta nuestros días: *La recta es la línea más corta que une sus puntos extremos.* Además, Arquímedes aplica la proporcionalidad directa entre variables de la misma dimensión, aunque Euclides había probado que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros (Torija, 1999). Sin embargo tal definición se planteó desde el punto de vista geométrico, sin que hubiera en ese entonces algún vestigio ni antecedente remoto del sistema cartesiano, donde pudiera caracterizarse a la recta como hoy en día.

Hacia el año 370 a. C. Eudoxio de Cnido (408? – 355?) profundiza en las ideas de Anaxágoras, tomando a la geometría antigua como un caso particular, en el sentido de que dos magnitudes no pueden formar una razón si la menor de ellas no puede hacerse más grande que la mayor mediante su multiplicación por números enteros, definiendo indirectamente la igualdad de dos razones *a: b y c: d,* exigiendo que al elegir dos números dados cualesquiera *m* y *n resulte siendo m a* menor o mayor o igual a *nb,* sea *m c* menor o mayor o igual a *n d* (Hofmann, 2002). Este hecho relevante resulta un antecedente epistemológico de la ecuación de la recta *y= mx*, donde por supuesto está implícita la noción de linealidad, cuya perspectiva geométrica en el plano se inicia desde los trabajos de Descartes, y la cual en la actualidad se estudia en el nivel medio superior.

La noción de linealidad, surge de forma incipiente desde que se trabajan las ecuaciones lineales y las progresiones aritméticas, usadas para resolver problemas cotidianos y contextuales.

Se puede resaltar que en los primeros hechos históricos, la proporcionalidad tiene un sentido práctico que se manifiesta en la solución de problemas lineales contextuales y cotidianos, y que la idea naciente de linealidad, aunque no está representada de manera explícita por medio de ecuaciones tal como las conocemos hoy en día, si está presente en aspectos científicos relevantes de aquellos tiempos.

Hacia finales del siglo XVII, hay un florecimiento de la matemática, en el sentido de la unificación de conocimientos nuevos a partir de trabajos antiguos. Fermat y Descartes toman lo obtenido por Apolonio de Pérgamo (262 ? - 190? a. C.), desde su escrito *La Cónica* y establecen la unificación geométrica - algebraica de la recta, proponiendo su ecuación: *En su empeño de dar pleno sentido a los trabajos antiguos sobre lugares geométricos, se le ocurrió a Fermat, como a Descartes, de cuyas obras no conocía nada entonces, determinar la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las x. Ya da a la recta que pasa por el origen, la forma b x = a y y considera a x + b y = c como la ecuación de una recta en su forma general y la amplía al* *problema del lugar geométrico de Apolonio, reconociendo que* $\sum a_i x + b_i y + c_i = d$ *es la ecuación de una recta* (Hofmann, 2002).

En el mismo sentido, Descartes (1596 – 1650) crea el primer sistema matemático moderno, abandonando la filosofía natural tradicional, siendo su meta un método de investigación que permita ir de lo complejo a lo sencillo, y de las hipótesis a la evidencia y a la claridad. Busca el vínculo iniciado, pero no terminado por Viète, del Álgebra con la Geometría. Descartes agrega a las matemáticas todo lo que admite ordenación y medida, sabe que todos los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático pueden resolverse con regla y compás, considerándolos como problemas del plano (denominación de Apolonio).

A diferencia de los hechos históricos iniciales, en este periodo se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de parejas de números reales *(x,y)* a un lugar geométrico (en términos modernos, *f(x,y)=0*) representado en un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta representaciones analítico-geométricas, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico.

El surgimiento incipiente del Álgebra lineal se da con algunas ideas de Euler y Cramer a partir del siglo XVIII. Su inicio partió del análisis de la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Posteriormente, conceptos como matrices, determinantes, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales y espacios vectoriales. Sin embargo en este desarrollo histórico epistemológico del Álgebra Lineal, no se aclara la importancia conceptual de la proporcionalidad, ni su vinculo con la ecuación de la recta en $R^2$, ni con la noción de linealidad, circunstancia que se hereda a la estructura temática y conceptual de los ambientes didácticos modernos.

## La ecuación de la recta en el plano y la linealidad

En particular en la escuela, las ecuaciones de la recta pueden adoptar un estatus diferente, según el rol que estén desempeñando en la didáctica, por lo que ellas mismas pueden bloquear la interpretación de algunos otros conceptos.

La enseñanza de la recta en bachillerato se inicia con la ecuación *y=mx+b*, como noción matemática, donde *m= tan* $\alpha$ y $\alpha$ es el ángulo de inclinación con respecto al eje *x* (Lehmann, 2001). Las ecuaciones mismas representan un obstáculo en la interpretación del concepto de transformación lineal *L(au+bv)=aL(u)+bL(v)*, como noción matemática, de lo cual Golubitsky y Dellnitz (2001) afirman que: *la idea central en álgebra lineal es la linealidad*. La forma *ay=bx*, la cual es herencia epistemológica de la igualdad de dos razones *a: b y c: d* planteada por los griegos de la antigüedad, representa una transformación lineal, sin embargo *la ecuación pendiente ordenada al origen* no lo es (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008). Ello no se aclara en el nivel medio superior, ni en el sentido del estatus didáctico que tiene en la escena escolar, ni por ser un antecedente histórico epistemológico, y como consecuencia, esta vaguedad sobrevive hasta los cursos iniciales de licenciatura.

También en el ámbito didáctico actual, en general no se hace énfasis a los trabajos de Fermat y Descartes basados en los resultados obtenidos por Apolonio siglos antes, donde definen la ecuación de una recta referida a un sistema de coordenadas cartesianas, el cual la proporcionalidad toma la forma analítica $b\ x = a$, y donde se dan los primeros elementos conceptuales de la noción de linealidad, sin que por supuesto sea el objeto de estudio, esto es que sólo presente un carácter paramatemático.

Desde el enfoque geométrico, se puede trazar una recta uniendo dos puntos diferentes, siendo esta única. Además de que existe sólo una recta que pasa por otro punto distinto que es paralela a la primera, como se evidencia en los postulados de Euclides. La noción de linealidad tiene conexiones estrechas con la noción de paralelismo, (ya que dos rectas en el plano cartesiano son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente). En ámbito escolar se necesita explicar el vínculo conceptual entre la proporcionalidad, la linealidad y dependencia lineal.

En los primeros semestres de licenciatura se aborda, aunque de manera aislada con respecto al tema de *la recta* del nivel medio superior, la ecuación $ax+by=0$ conociendo dos puntos $(x_1,y_1)$ y $(x_2,y_2)$ por medio del determinante $2 \times 2$ igualado a cero:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

pero ello no se articula, ni con la proporcionalidad, ni con la dependencia lineal, lo cual auspicia un referente matemático escolar pobre en significados.

En particular, cuando se estudia el tema de dependencia lineal no es común que sea abordado, partiendo de la proporcionalidad. En la escuela se menciona: *Dos vectores $v_1$ y $v_2$ definidos en $R^n$, con $n > 1$, se dice que son linealmente dependientes sí y sólo si la combinación lineal $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 = 0$, se cumple cuando $c_1 \neq 0$ ó $c_2 \neq 0$. Un aspecto didáctico rescatable es el que refiere a cómo se relacionan conceptualmente la dependencia lineal y la proporcionalidad directa. Se puede ver de la definición anterior, que se cumplen las proporcionalidades directas, $\overrightarrow{v_1} = -(\frac{c_2}{c_1})\overrightarrow{v_2}$, siempre y cuando $c_1 \neq 0$, o bien $\overrightarrow{v_2} = -(\frac{c_1}{c_2})\overrightarrow{v_1}$, si $c_2 \neq 0$* (Rondero, Tarasenko, Acosta, 2009).

El que dos vectores sean linealmente dependientes implica que geométricamente sean paralelos, y ello está relacionado conceptualmente con la idea de paralelismo entre rectas en el plano cartesiano. Tales significados tendrían que ser resaltados en la didáctica para una articulación apropiada de saberes en el curso inicial Álgebra Lineal. Sin embargo en la didáctica escolar no se agregan dichos elementos, privilegiando lo algorítmico y memorístico.

Por otra parte, para el aprendizaje de los conceptos de *recta tangente*, *derivada* y *diferencial* del *corpus* del Cálculo diferencial (Edwards & Penney, 1997) son indispensables las aproximaciones lineales. Por ejemplo en el texto de cálculo para bachillerato *Elementos del Cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza* (Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo, Garza, 2005) se presenta una conceptualización de la derivada, a partir de la idea de razón de cambio constante, mediante un problema de movimiento rectilíneo uniforme, generalizando después a la ecuación lineal, donde la velocidad corresponde a la pendiente de la recta. En ese mismo texto se analiza el problema de la velocidad no constante de un automóvil, considerando pequeños intervalos de tiempo, en los cuales la velocidad sí es constante o sea emplea el Método de Euler. Lo que se hace es una linealización en cada subintervalo, al considerar la velocidad constante en cada uno de ellos. La expresión lineal recursiva que aparece es un instrumento y por lo tanto juega un papel paramatemático, ya que de manera explícita se emplean el carácter lineal, sin embargo la noción de linealidad no es el objeto de estudio.

En el Cálculo multivariable (Stewart, 1999) cuando se trata la forma vectorial de una recta en $R^2$, como noción matemática, especificando su dirección y uno de sus puntos; se tiene que, si $u= (a, b)$ es un vector no nulo diferente de cero, el punto $P_0= (x_0, y_0)$, $w_0$ el vector asociado con $P_0$, y $x$ el vector asociado al punto $P(x, y)$. La recta $L$ que pasa por $P_0$ y es paralela a $u$ consiste de los puntos $P(x,y)$, con lo que se forma la ecuación vectorial: $x=w_0+tu$. Este objeto matemático se denomina *la ecuación paramétrica de la recta*: $x=x_0+ta,\ y=y_0+tb$ (escrita por componentes), donde $t$ es un parámetro al que se le puede asignar cualquier número real. De lo anterior despejando $t$ de ambas ecuaciones, e igualándolas se obtiene la *ecuación simétrica de la recta*:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$$

Para obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0=(x_0, y_0)$ y que contiene el vector no nulo $n=(a,b)$, se emplea el producto punto $n\cdot P_0P=0$, donde $P(x, y)$ está en la recta y donde $P_0P= (x-x_0, y-y_0)$, por lo que

$n\cdot P_0P=a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ (Kolman & Hill, 2006).

La forma paramétrica conecta las nociones de paralelismo y dependencia lineal, y representa el movimiento de una partícula por la trayectoria rectilínea. Aunque esta manera de presentar la ecuación de la recta tampoco se vincula de manera clara con la linealidad en la didáctica. Ello representa un obstáculo para el entendimiento de su definición, tanto como mapeo lineal como transformación lineal.

Hay diferentes temas de matemáticas que se explicitan mediante ecuaciones de rectas, como *Polinomios de Lagrange*, *Métodos de aproximación*, *Convexidad*, entre otros, dando variantes a los puntos de vista sobre la *noción de linealidad*. En particular los *Polinomios de Lagrange* para la recta que pasa por dos puntos se definen como:

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} y_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} y_2 .$$

Sin embargo en el ambiente escolar de licenciatura no se resaltan de manera suficiente sus significados asociados (Acosta, Tarasenko y Rondero, 2010), ni se vinculan con temas afines del nivel medio superior.

## Conclusiones y reflexiones

Se ha buscado precisar el papel didáctico que presentan las ecuaciones de la recta en el plano, en diferentes momentos curriculares, para propiciar un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar. Además se clarifica cuando por ejemplo una representación, como lo es una ecuación de la recta en el plano cartesiano, es un obstáculo en el entendimiento de algún saber, por ejemplo el concepto de transformación lineal.

La noción de linealidad es un elemento de articulación en la matemática escolar y se puede apreciar su característica de transversalidad conceptual entre la matemática elemental y la matemática avanzada, en el entendido de que la noción adopta diferentes estadios didácticos, a veces manifiestos por las propias ecuaciones de la recta, que tienen su expresión en los conceptos que generan y que a su vez aportan nuevos significados a la misma.

Un obstáculo importante que tiene repercusión en la didáctica, es por la desarticulación manifiesta entre la igualdad de dos razones *a: b* y *c: d* con la recta que pasa por el origen, *bx* = *ay*, y con la función lineal *f(x)*= *ax* +*b*. Se cree que esto sucede porque la noción de linealidad presentan distintos significados que se entrevén por las ecuaciones.

Es de resaltarse el hecho de que los significados de la noción de linealidad rescatados de las ecuaciones de la recta en el plano, representan un andamiaje fundamental de articulación conceptual en la matemática escolar y se distingue su importancia transversal entre la matemática elemental y la matemática avanzada, esto es debido a la condición metamatemática de la noción de *linealidad*. En tal caso, la adecuada instalación de los elementos conceptuales antes señalados, propiciaría un aprendizaje matemático bien articulado con diversos conceptos del Álgebra Lineal.

En este trabajo se dan evidencias, de que el estudio de la recta permite aclarar aspectos vinculados con la noción de linealidad y sus significados asociados al papel didáctico que juegan en el ambiente escolar.

## Referencias bibliográficas


Acosta, J. (2011) *Análisis epistemológico, cognitivo y sociocultural de la noción de linealidad.* Tesis doctoral no publicada. México: CICATA-IPN.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2008) Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. *Memoria HPM* (pp. 301-308). México: CINVESTAV-IPN.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2010) La resignificación de la noción de linealidad. *ALME 23* (enviado para su publicación). México: CLAME.

Boyer, C. (1991) *A History of Mathematics*. New York, USA: John Wiley.

Chevallard, Y. (1997) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Editorial* Aique. Buenos Aires: Argentina.

Edwards, C. y Penney, D. (1997) *Cálculo diferencial e integral.* (4ª ed.). México: PEARSON Educación Prentice Hall.

Filloy, E. (1998) *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Golubitsky, M. y Dellnitz M. B (2001). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de MATLAB.* México: Thomson Editores.

Hofmann, J. (2002) *Historia de la matemática.* México: Limusa.

Kolman, B. y Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal.* (8ª ed.). México: PEARSON Educación. Lehmann, C. (2001) *Geometría Analítica.* Editorial LIMUSA, México.

Martínez, G. (2002) Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (5) 1, (pp. 45-78).

Rondero, C., Tarasenko, A., Acosta, J., (2009) *Algunas incongruencias conceptuales sobre la noción de linealidad*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 22: México.

Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J., Garza, J. (2005) *Elementos del Cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza.* México: Trillas: ITESM.

Stewart, J. (1999) *Cálculo multivariable.* (3ª ed.). México: Thomson editores.

Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* (2ª ed.) [La matemática en sus personajes]. España: NIVOLA.