

## UN ESTUDIO DE LA VARIACIÓN UTILIZANDO FUNCIONES EN ESTUDIANTES DE LA MEDIA ACADÉMICA

Tulio Rafael Amaya De armas; Javier Barrera Ángeles  
Institución Educativa Madre Amalia. Universidad de Sucre  
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
tuama1@hotmail.com, jbarrera12@hotmail.com  
Campo de investigación: Pensamiento variacional

Colombia  
México  
Nivel: Básico

**Resumen.** *El presente trabajo tiene como objetivo principal observar y analizar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de los dos últimos años de bachillerato al intentar resolver situaciones problema que involucran situaciones funcionales de variación y cambio. Para ello se consideró el concepto de función como el objeto matemático que permite relacionar los conceptos matemáticos con otras áreas del currículo, planteados en situaciones de la vida real. Se consideraron dos grupos de trabajo, un grupo control y un grupo experimental; a ambos grupos se les aplicó un examen de reconocimiento, posteriormente, al grupo experimental se le aplicó una serie de talleres usando situaciones funcionales, enfatizando sobre su aplicabilidad en diferentes contextos y su relación con la vida real, finalmente se aplicó una prueba de contraste a ambos grupos de trabajo con el objeto de verificar los avances luego del trabajo en el aula.*

**Palabras clave:** pensamiento variacional, grupo control, grupo experimental, intervención en el aula

### Introducción

En el presente trabajo se reportan algunos hallazgos encontrados en el marco de una investigación cuyo objetivo principal era observar y analizar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de la media académica de la Institución Educativa Madre Amalia del municipio de Sincelejo Colombia, utilizando situaciones problema que involucran el concepto de función. Interesaba mirar las estrategias utilizadas por los estudiantes al encontrar el valor de una incógnita, identificar las cantidades que intervienen en la situación y describir las relaciones entre ellas, identificar los intervalos de variación para estas variables, los máximos y mínimos así como indagar por procesos matemáticos como la modelación de la situación, de argumentación al tratar de describir los procedimientos realizados al dar respuesta a una pregunta planteada, y hacer el tránsito entre sistemas de representación.

Para llevar a cabo esta investigación fue necesario considerar dos grupos de trabajo, un grupo control y un grupo experimental; a ambos grupos se les aplicó un examen de reconocimiento, posteriormente, al grupo experimental se le aplicó una serie de talleres usando situaciones

funcionales y enfatizando sobre su aplicabilidad en diferentes contextos y su relación con la vida real, después se aplicó una prueba de contraste a ambos grupos de trabajo con el objeto de verificar los avances luego del trabajo de intervención en el aula; posteriormente se realizó un análisis de los resultados teniendo en cuenta los antecedentes de investigación y los referentes teóricos considerado. Algunos de los resultados de esta investigación fueron: 1) los estudiantes mostraron dificultades para pasar del lenguaje ordinario al algebraico, 2) tuvieron problemas para identificar las cantidades que intervienen en una situación, cuáles cambian y cuáles permanecen fijas, entre otras, 3) luego del proceso de intervención, las estrategias de solución a las situaciones en el grupo experimental fueron múltiples e insospechadas por los autores en relación con las del grupo control.

### Algunos acercamientos teóricos

El concepto de función es uno de los de mayor aplicabilidad en matemáticas, por cuanto permite relacionar esta área con otras del currículo y modelar situaciones de la vida real, además, “Poder analizar el comportamiento de funciones es una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional” (Dolores, 2004, p.197), básico también en la apropiación de otros conceptos fundamentales de cálculo como el de límite y derivada entre otros. Según el Instituto Colombiano para el fomento de la educación superior, para el estudio del pensamiento numérico y variacional, “Uno de los elementos centrales a considerar es la apropiación del concepto de función analizando variación y relaciones entre diferentes representaciones y su uso comprensivo a través de la modelación con funciones” (Icfes) (2007, p. 29) por tal razón, en esta investigación se quiso, mediante algunas estrategias metodológicas y utilizando el concepto de función, favorecer el desarrollo de dicho pensamiento en estudiantes de la media académica; pues la interacción con situaciones funcionales y su aplicabilidad en diversos campos y aspectos de la vida, puede permitir al educando un avance en el desarrollo del pensamiento variacional, por cuanto tiene la posibilidad de asignarle significado y sentido a los contenidos trabajados en relación con dicho pensamiento.

En el ámbito de la Matemática Educativa se ha discutido ampliamente acerca de cómo el contexto escolar debe acercar al estudiante al quehacer del matemático. La educación matemática permite a través de una buena transposición didáctica que el estudiante se apropie de los conocimientos

matemáticos, que le permitan generar formas de interpretación y de construcción de situaciones desde los avances de la matemática como disciplina. En este sentido el Icfes, considera que “la matemática escolar debe promover el desarrollo del pensamiento matemático, el cual posibilita al estudiante describir, organizar, interpretar y relacionarse con determinadas situaciones a través de la matemática; en otras palabras, un pensamiento que facilita matematizar la realidad” (Icfes (2003, p. 4). Lo que puede dar luces a los educadores matemáticos acerca de los enfoques para enseñar esta disciplina en la escuela en busca de resultados óptimos. Respecto a esta temática, Rico, establece algunos referentes a tener en cuenta en tales procesos de enseñanza y aprendizaje:

*Los fines que nosotros consideramos prioritarios en la educación matemática son los siguientes: 1) desarrollar la capacidad del pensamiento del alumno, permitiéndole determinar hechos, establecer relaciones, deducir consecuencias, y, en definitiva, potenciar su razonamiento y su capacidad de acción. 2) Promover la expresión, elaboración y apreciación de patrones y regularidades, así como su combinación para obtener eficacia o belleza... 3) Lograr que cada alumno participe en la construcción de su conocimiento matemático... 4) Estimular el trabajo cooperativo, el ejercicio de la crítica, la participación y colaboración, la discusión y defensa de las propias ideas. (Rico, 1995, c.p. Icfes, 2003, p. 4).*

En lo propuesto por Rico, se nota el protagonismo que debe tener el educando en el desarrollo de su proceso de aprendizaje, frente a las diferentes alternativas que este autor sugiere que se deben plantear para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es evidente que esto requiere un mayor y cuidadoso trabajo por parte del docente, al seleccionar las actividades que se presentan, las forma de presentarla con el fin de que los estudiantes participen lo mas que se pueda, poniendo todo de sí para mejorar su aprendizaje. Esperando que tales condiciones puedan generar mayor motivación en los estudiantes, que los comprometa con sus procesos de aprendizaje y puedan mostrar desinhibidamente sus estrategias de solución frente a las situaciones planteadas y en el transito por los diferentes planos de representación.

Godino, Batanero y Font plantean algunos elementos determinantes en el proceso de enseñanza de las matemáticas y de las condiciones que pueden favorecer su aprendizaje.

*Para que el estudio de un cierto concepto sea significativo, debemos mostrar a los alumnos una muestra representativa de las prácticas que lo dotan de significado. Al planificar la enseñanza debemos partir del análisis del significado de dicho concepto (...) Es importante dar a los alumnos la oportunidad de plantearse y de tratar de resolver problemas interesantes donde formulen hipótesis y conjeturas, traten de usar diferentes sistemas de representación, traten de comunicar y validar las soluciones propuestas, confronten sus soluciones con las de otros compañeros, y finalmente, traten de confrontar su solución con la solución que se considera correcta en matemáticas (Godino, Batanero y Font (2005, p. 70)*

En lo planteado por estos autores se muestra la importancia del trabajo con problemas familiares para los estudiantes, como medio para asignar significado a los conceptos que se trabajen al permitirles resolver tales problemas y analizar sus soluciones, teniendo así la posibilidad de relacionar los conceptos con elementos de su mundo real utilizando diferentes sistemas de representación. Según Duval (1999), para que una representación pueda funcionar como tal, y se puedan reconocer dos representaciones del mismo objeto, se necesita disponer de por lo menos dos sistemas semióticos que representen al objeto que se quiere representar y que se pueda pasar espontáneamente de un sistema semiótico a otro sin siquiera notarlo. Donde además, no es posible aislar la noesis de la semiosis, es decir, no se puede separar el contenido representado de la correspondiente forma que lo representa. En el trabajo de Duval se resalta la importancia del tránsito entre sistemas semióticos de representación para poder entender un concepto, según este autor, “no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación (...) Y esto, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación” (Duval, p. 26). Se aprecia aquí, la utilidad de las representaciones semióticas como medio de representar algunas representaciones mentales, conceptos que sin llegar a ser totalmente congruentes, si guardan una estricta relación.

### **Metodología**

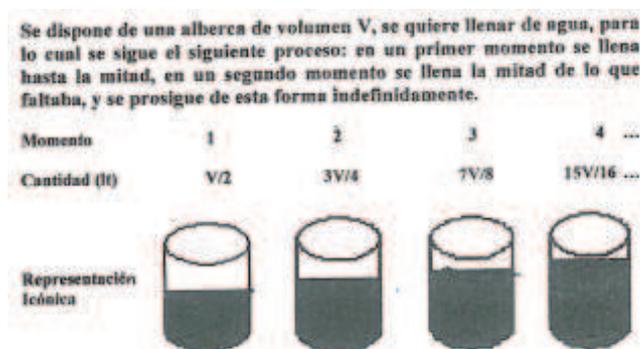
Se buscó observar y analizar el desarrollo de pensamiento variacional en estudiantes de la media académica a través de la mediación, fomentando el aprendizaje cooperativo, la importancia del dialogo y la apertura a la discusión, donde cada uno pudiera expresar su punto de vista en relación

con sus propuestas de solución y la de los demás. Se tomaron dos grupos, un grupo control (31 estudiantes) y uno experimental (29 estudiantes), lo cuales se escogieron por aplicación del método coordinado negativo. Se aplicó una prueba de reconocimiento a ambos grupos, con el propósito de verificar el desarrollo de pensamiento variacional al inicio del trabajo. Con el grupo experimental se comenzó un proceso de intervención aplicándoles unos talleres con situaciones funcionales, en contra jornada, enfatizando su aplicabilidad en diversos contextos, dándoles la posibilidad de asignarle significado y sentido a los contenidos trabajados al relacionarlos con elementos del medio sociocultural, esto con el propósito de vencer las dificultades evidenciadas en los estudiantes en la prueba de reconocimiento. Estos talleres fueron asistidos por los autores y un grupo de tres estudiantes del programa Licenciatura en matemática de la Universidad de Sucre, quienes utilizaron parte de esta investigación como trabajo de grado. Con los estudiantes del grupo control se siguieron desarrollando los temas ordinariamente, los mismos que también se desarrollan con los del grupo experimental, solo que a los del grupo control no se les realizaba el trabajo con los talleres en contra jornada. Luego se aplicó una prueba de contraste con el fin de verificar los avances luego del proceso de intervención en el aula. Ambas pruebas indagaban por los mismos tópicos, de tal forma que fueran comparables y consistieron en un test con preguntas abiertas, con situaciones que involucran el concepto de función; se indagaba por concepto como intervalos de variación, máximos y mínimos, ecuación, identificación de cantidades que intervienen en las situaciones y descripción de las relaciones entre ellas y por algunos procesos matemáticos como argumentar acerca de un procedimiento realizado para obtener una respuesta, modelación matemática de las situaciones planteadas, la consecución de patrones de regularidad y por la capacidad de los estudiantes para transitar entre sistemas de representación de la misma situación. Finalmente se hace un análisis descriptivo cualitativo de los resultados de los test, y de acuerdo a la variedad, la calidad de las estrategias utilizadas por los estudiantes de cada grupo en sus intentos de solución a las situaciones planteadas y los porcentajes de acierto, permitían inferir a cuál de los dos grupos le había asentado mejor su respectivo proceso.

## Resultados

En la prueba de reconocimiento las dificultades encontradas en ambos grupos fueron muy similares tanto cuantitativa como cualitativamente. Se encontraron dificultades para pasar del

lenguaje ordinario al algebraico, para identificar las cantidades que intervienen en una situación, cuales cambian y cuales permanecen fijas, y para establecer una relación de dependencia entre dos variables, entre otras. Se les facilitaba trabajar con información presentada en una tabla o llenar éstas con información presentada en el lenguaje materno. A partir del análisis de esta prueba, se realizó el proceso de intervención en el aula a los estudiantes del grupo experimental, con talleres y los mismos temas que se desarrollaban en el aula por ambo grupos; en este proceso fueron apareciendo nuevas dificultades para las que se implementaron nuevas estrategias materializadas en los talleres. A continuación se muestra la situación que se planteó en la prueba de contraste y el análisis correspondiente a las soluciones dadas por los estudiantes:



### Tipos de estrategias de solución

Para observar y analizar las alternativas de solución dadas por los estudiantes a la situación, se les pidió encontrar el volumen del líquido al final del momento 6 y 16 respectivamente.

Las estrategias utilizadas y los aciertos en las respuestas fueron notorios, aunque mayor en los estudiantes del grupo experimental (86,21%) que en los del grupo control (45,16%). Aunque algunas fueron comunes a ambos grupos, hubo algunas diferencias marcadas: a) la cantidad de respuestas acertadas con estrategias comunes fueron mayor en el grupo experimental. La estrategia que en común utilizaron los estudiantes de los dos grupos fue la siguiente: “sumar el numerador con el denominador da el numerador, y el denominador más el denominador da el denominador”.

b) los estudiantes del grupo experimental encontraron expresiones matemáticas, las que utilizaron para dar respuestas a otras preguntas que se les plantearon. A continuación se muestra el proceso seguido por un estudiante del grupo experimental, como respuesta a la cuestión planteada.

$$\text{cantidad}(1) = \frac{(2^1) - 1}{2^1}$$

$$\text{cantidad}(2) = \frac{(2^2) - 1}{2^2}$$

$$\text{cantidad}(3) = \frac{(2^3) - 1}{2^3}$$

momento  
 sucesión en el momento 5 =  $\frac{314}{37}$   
 (momento 6) =  $\frac{634}{64}$   
 (momento 15) =  $\frac{32767}{32768}$

③ Mediante una fórmula que se va leyendo de observar la sucesión, la fórmula es: cantidad(i) =  $\frac{(2^i) - 1}{2^i}$

Otras estrategias que utilizaron los estudiantes del grupo experimental fueron consecución de un patrón, obtención de una fórmula matemática y llenado de tablas para obtener sus respuestas. Mientras los del grupo control, realizaron un proceso secuencial momento por momento hasta llegar a una respuesta, en la mayoría de los casos errada; y aunque algunos siguieron el patrón numérico de la situación y lo expresaron en la estrategia común expresada anteriormente, no evidenciaron su uso para dar otras respuestas, para las que siguieron un proceso similar, incluso, realizando momentos que ya habían realizado anteriormente.

### Descripción de los procesos

Para indagar por la capacidad de los estudiantes para argumentar acerca de los procesos realizados para obtener una respuesta, se les pidió: describir, ¿Cómo obtuvo la respuesta a la pregunta anterior? Entre los estudiantes del grupo experimental se presentaron algunas variantes en esta descripción: 1) los que describieron correctamente el proceso aunque las respuestas no fueran acertadas (17,24%). 2) los que lo describieron correctamente con respuestas acertadas

(58,62%) y 3) aquellos (24,14%) que dieron respuestas acertadas y no pudieron describir el proceso utilizado. Algo similar, con alguna variación sucedió con los estudiantes del grupo control: 1) los que describieron correctamente con respuestas incoherentes (58,06%), 2) los que describieron el proceso correctamente y este era coherente con su respuesta (22,58%). Y otros (19,35%) que en lugar de describir el proceso, lo que hacían era repetir los pasos del procedimiento utilizado.

### Encontrar una incógnita

Para indagar la forma cómo los estudiantes encontraban una incógnita, se les planteó lo siguiente:

Si se conoce que la cantidad de líquido al interior de la alberca es  $\frac{1023 V}{1024}$  ¿al final de qué

momento estamos? los estudiantes del grupo control se caracterizaron por obtener sus respuestas por tanteo; las soluciones fueron de tipo aritmético, y ninguno utilizó la letra como incógnita. Algunos del grupo experimental montaron las ecuaciones y las resolvieron, aunque la mayoría obtuvieron respuestas también por tanteo.

### Consecución de un patrón

Para indagar por la búsqueda de un patrón, se les pidió los estudiantes encontrar la cantidad de líquido en el recipiente al final del momento 50. Los estudiantes del grupo control siguieron el patrón propuesto en la situación, pero ninguno terminó el proceso. Algunos del grupo experimental también siguieron el patrón presentado en la situación con la diferencia que el 58,62% de éstos, lo suspendieron y lograron la respuesta, lo que lleva a pensar que reflexionaban sobre el uso de esta estrategia. Otros 8 estudiantes del grupo experimental, lograron la respuesta por utilización de la fórmula  $\frac{2^n - 1}{2^n}$ .

### Estado de avances

Al contrastar las dos pruebas, aplicadas a ambos grupos, se pueden destacar algunos avances y diferencias entre ellos: 1) fue mayor el número de estrategias utilizadas por ambos grupo al

resolver la prueba final, aunque en los estudiantes del grupo experimental fue mayor el porcentaje de respuestas acertadas con las mismas estrategias. 2) los estudiantes del grupo experimental utilizaron algunas respuestas que habían obtenido durante el proceso para resolver otras preguntas, mientras los del grupo control debieron repetir estos procesos para obtener sus respuestas. 3) los estudiantes del grupo experimental lograron modelar la situación, y con ello utilizaron la letra como variable, luego de seguir un patrón de regularidad, mientras los del grupo control aunque siguieron un patrón, no lograron modelar la situación y no utilizaron la letra como variable. 4) fue mayor el porcentaje de estudiantes del grupo experimental que lograron describir los procesos utilizados para dar sus respuestas.

### Referencias bibliográficas

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa* 7(3), 195-218.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Grupo de educación matemática.

Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2005) *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior. (2003). *¿Cómo es la evaluación en Matemáticas?*. Bogotá: Grupo de evaluación de la educación básica y media.

Instituto colombiano para el Fomento de la Educación Superior. (2007). *Fundamentación conceptual área de Matemáticas*. Bogotá: Acevedo, M., Montañés, R., Huertas, C., Pérez, M.