

## LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA. APORTACIONES PARA UN DISEÑO ESCOLAR

Rosa Araceli Rotaache, Gisela Montiel

Colegio Baden Powell, CICATA-IPN, Legaria

arotaache@badenpowell.edu.mx, gmontiel@ipn.mx

Campo de investigación: Teoría de situaciones didácticas

México

Nivel: Básico

**Resumen.** *El presente documento presenta los elementos teóricos que fundamentan una secuencia didáctica orientada a la construcción de la noción de ángulo, particularmente sus significados como parte de vuelta y giro, y algunos resultados de la puesta en escena en un contexto escolarizado. En el marco de la teoría de situaciones didácticas, contemplamos en la componente cognitiva el modelo de abstracción y del conocimiento situado de Mitchelmore y White (2000) y en la componente epistemológica la naturaleza cualitativa (por su forma), cuantitativa (por su medida) y como relación (por cómo se define) de la noción de ángulo que se maneja en el nivel básico-secundaria del sistema educativo mexicano. La componente didáctica rescata algunos posibles efectos del discurso escolar en los significados relacionados con la medición angular, pero básicamente el diseño rompe con la programación escolar para trabajar con esta noción.*

**Palabras clave:** noción escolar de ángulo, ingeniería didáctica

### Introducción

La Noción escolar de ángulo ha jugado un papel ambiguo en la escuela, sus definiciones, caracterizaciones y aplicaciones pueden encontrarse en asignaturas como matemáticas, física y dibujo técnico. La tradición escolar asume que cuando se define, se caracteriza, se expone su tipología y se manipula el concepto en la clase de matemáticas, su uso, aplicación o interpretación en otras asignaturas no debiera representar una dificultad para los estudiantes. Contrario a lo que se asume, es en las otras asignaturas donde se pueden localizar los conflictos más comunes en el manejo de esta noción.

La naturaleza del concepto de ángulo ha sido tema de debate por más de 2000 años y la discusión aún no termina (Matos, 1990). Quizá por ello no hay una única definición aceptada por la comunidad matemática y su transposición didáctica de ninguna manera se convierte en un proceso trivial.

Como tema, el ángulo se aborda por primera vez en el salón de clases en el 4º Grado de la Educación Primaria. Es un concepto en cuyo aprendizaje se han detectado diversas dificultades por parte del estudiante y éstas han sido de interés en diversas investigaciones. Algunas dificultades,

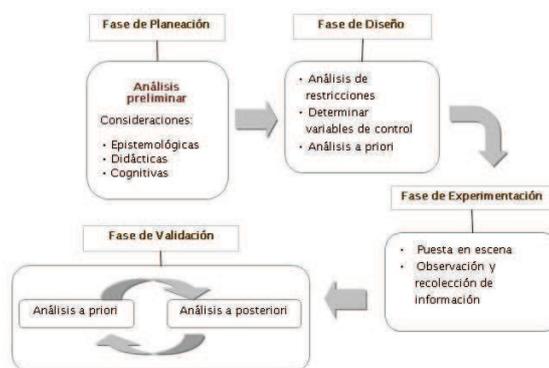
denominadas malentendidos, fueron reportados por Bosch, Ferrari, Marván y Rodríguez (2003). Los autores hacen un análisis de la presentación escolar y el tipo de actividades que pudieran detonar tales malentendidos y señalan el desequilibrio que existe entre los 2 temas que pertenecen a la medición de ángulo y los 81 relacionados con otro tipo de mediciones, como indicador de la poca importancia que se le da al tema.

La experiencia de aula nos mostró además, conflictos al usar la noción de ángulo en otras asignaturas, particularmente en la materia de Dibujo Técnico donde el alumno debe manejar el juego de geometría para la construcción y trazo de diferentes figuras. La manipulación incorrecta de la noción escolar de ángulo es visible en el manejo de las escuadras y el transportador.

### Fundamentos teóricos y metodología

Son muchas las explicaciones que existen alrededor de los fenómenos relacionados a la enseñanza-aprendizaje del ángulo. Particularmente profundizaremos en aquellas que reflexionan sobre los actores del sistema didáctico, pues nos interesa intervenir en el aula en un contexto escolarizado considerando las variables o elementos que puedan ser controlados para el diseño de una primera secuencia didáctica.

Una Teoría que considera elementos epistemológicos (el saber), cognitivos (el alumno) y didácticos (el profesor) tanto para la explicación del fenómeno como la intervención didáctica a través de su metodología de diseño, es la Teoría de situaciones didácticas. Por tal motivo la metodología utilizada, fue la Ingeniería didáctica.



Fases de la Ingeniería Didáctica, tomadas de (Lezama, 2003)

Dada la extensión del presente documento expondremos la fase de planeación a detalle, la integración sistémica de las consideraciones teóricas, algunos elementos del diseño y la experimentación, y finalmente expondremos la validación como parte de las conclusiones generales. Más detalles pueden consultarse en Rotaache (2008).

### *Análisis preliminar, consideraciones epistemológicas*

A partir del análisis de Matos (1990 y 1991), se reconocen 3 etapas en la evolución histórica del concepto: un momento de *uso*, otro de *definición-clasificación* y finalmente el de *discusión de su naturaleza*.

Cuando hablamos de uso del ángulo entendemos que juega un papel importante en ciertas actividades al nivel de noción, es decir, que aún no se define o no se identifica como concepto. Definir el concepto, clasificarlo y debatir sobre su naturaleza son acciones que se desarrollan en un contexto matemático-filosófico, no necesariamente asociado a situaciones prácticas.

A partir de aquí se extraen elementos para usar el ángulo en situaciones prácticas donde se favorezca su significado como forma, como giro, como partes de vuelta, como inclinación o como porción, que puedan asociarse con los diferentes conceptos escolares que el estudiante enfrentará desde el nivel primario hasta el nivel universitario.

Sin embargo, sin importar el significado que se favorezca se debe considerar la naturaleza estática/dinámica del ángulo como cualidad (relacionado con las formas de representarse), como cantidad (por ser susceptible de medirse) y como relación (al definirse con otros elementos geométricos).

### *Análisis preliminar, consideraciones cognitivas*

La teoría cognitiva de Mitchelmore y White (2000) considera la formación del ángulo a partir de las experiencias físicas que viven los estudiantes, es decir, parte de la génesis de las abstracciones necesarias para entender los significados asociados al concepto de ángulo. Además, interpretan e integran otras investigaciones a las etapas que proponen en su teoría. Esta teoría toma las nociones de clasificación, similitud, abstracción y concepto; planteadas ya por Skemp (1986, citado por Mitchelmore y White, 2000).

Se describen tres etapas de abstracción que representan una clasificación, progresivamente más refinada de la experiencia de los estudiantes. La primera etapa se denomina *conceptos del ángulo situado* y se limita a las situaciones físicas asociadas con el ángulo, de forma implícita. Los

conceptos formados en esta etapa se generalizarán en el tiempo conforme se ponga atención en la situación física y las acciones ejecutadas y menos en las circunstancias sociales.

La segunda etapa se denomina *conceptos contextuales del ángulo*. En ella el alumno clasifica las situaciones físicas en contextos físicos, es decir, tiene cierto estado de reconocimiento de las similitudes que hay entre las situaciones diversas que ha enfrentado. Estos contextos físicos se forman sobre la base de configuraciones geométricas comunes y de acciones físicas similares.

Finalmente, en la tercera etapa denominada *conceptos abstractos del ángulo*, se da el reconocimiento de las similitudes que existen entre los contextos del ángulo. Esto constituye el principio del concepto matemático elemental de ángulo.

Las similitudes entre contextos no son del todo obvias, por lo que reconocerlas requiere regularmente de acciones físicas o mentales por parte del aprendiz, es un proceso constructivo que requiere de abstracción reflexiva.

Una clase de contextos físicos del ángulo que el niño reconoce como similares recibe el nombre de dominio abstracto del ángulo. Cuando la similitud se abstrae para formar un concepto entonces se habla del concepto abstracto de ángulo. Dentro de estos conceptos Mitchelmore y White (2000) reconocen un concepto estándar que se relaciona con todos los contextos físicos del ángulo y es el más común entre las construcciones del estudiante: aquel de las dos líneas inclinadas que se encuentran en un punto. Asumen que el concepto tiene un desarrollo lento, apto para estudiantes de secundaria y que aún se requeriría de una cuarta etapa para llegar al concepto matemático formal.

#### *Análisis preliminar, consideraciones didácticas*

Las investigaciones de Casas (2002) y Mitchelmore y White (2000) reportan la relación que guardan la naturaleza multifacética (refiriéndose más a los diferentes tipos de definiciones escolares que existen) del concepto con las diferentes dificultades que el alumno presenta en las experiencias cotidianas y en el aula.

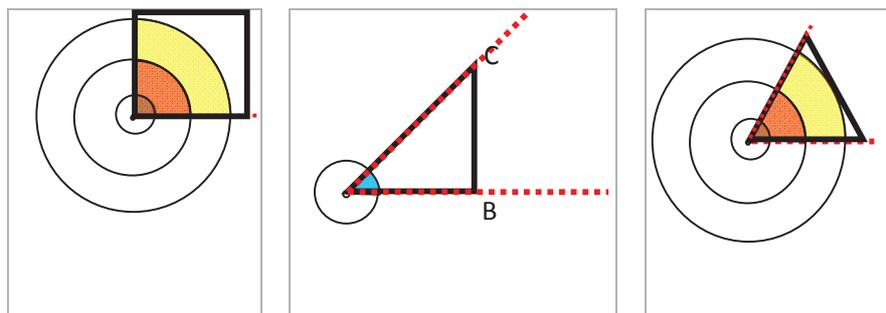
Se consideran entonces los antecedentes escolares del ángulo mismo y de las nociones escolares de fracción, porción, área, triángulo equilátero, cuadrado, triángulo isósceles, circunferencia,

polígonos regulares, triángulo rectángulo; tanto al nivel de concepciones como de posibles dificultades en su manejo. Se rescataron algunos posibles efectos del discurso escolar en los significados relacionados con la medición angular versus medición de longitudes, pero básicamente el diseño rompe con la programación escolar para trabajar con esta noción, de tal suerte que lo didáctico lo concentramos en la organización de clase: a partir del diseño, el alumno debe transitar por las fases escolares de acción, formulación y validación, mientras que la fase de institucionalización recae por completo en la exposición del docente.

### **Integración sistémica y fase diseño**

Contemplando que nuestro marco teórico presupone una visión sistémica, las consideraciones teóricas del análisis preliminar fueron modificadas, especialmente en la Teoría Cognitiva de Mitchelmore y White (2000). Así, a diferencia de las *situaciones físicas* que ellos trabajaron, nosotros consideramos como experiencia cotidiana el escenario de la escuela y lo que ello implica. Las restricciones de tiempo y espacio, los conocimientos previos de los alumnos, las herramientas de medición, etc. Estas situaciones físicas se establecieron con el principio de la manipulación a través de materiales concretos y actividades para iluminar, recortar, superponer figuras, al mismo tiempo que se respondía el cuestionario que guiaba la actividad. Las situaciones se relacionaron con el uso de objetos escolares en los cuales el ángulo está presente y en los que el alumno trabaja cotidianamente, como son el cuadrado, el triángulo equilátero, el triángulo escaleno y el triángulo isósceles.

La secuencia consiste en superponer micas circulares, de diferentes tamaños, sobre las figuras geométricas cuadrado y triángulo equilátero, de tal manera que el centro del círculo coincida con un vértice de la figura. Al sombrear la porción que se superpone, el alumno identifica las fracciones  $1/4$  y  $1/6$  del círculo, respectivamente. Al recortar, a la mitad, el cuadrado y el triángulo equilátero el alumno identifica las fracciones  $1/8$  y  $1/12$  del círculo, respectivamente.



Los *contextos* se establecieron por figura geométrica trabajada, es decir, cuando el alumno logra generalizar la relación entre la parte de vuelta o giro con la parte del círculo por figura geométrica sin importar el tamaño de la figura geométrica o el círculo sobre el que gira.

El diseño consideró trabajar los dominios abstractos estático (al sombreado las porciones superpuestas) y dinámico (al girar para validar la parte de vuelta) en todos los contextos, pues se reconocen como intrínsecos en la naturaleza del ángulo.

La etapa de abstracción se dividió en una generalización por parte del estudiante y una fase de institucionalización por parte del docente. La generalización buscó que el alumno visualizara la división de la circunferencia en 360 partes y le asociara un objeto cotidiano, el reloj. Además de construir, un elemento de medición escolar, que ahora tendrá significado para él: el transportador.

Con la institucionalización, el docente introduce el término ángulo, lo define y le asocia su medida en grados, con base en las divisiones construidas en el círculo.

### Experimentación

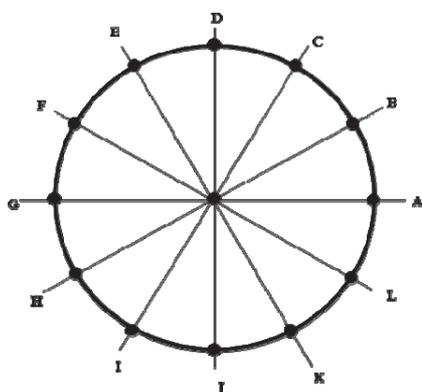
La secuencia se aplicó a 34 alumnos de 1° de secundaria (13 años aproximadamente) de un colegio privado en el Estado de México. Se trabajó en horarios de clase, dentro del calendario escolar 2007-2008, en un total de 4 sesiones de 45 minutos cada una.

Cada alumno recibió la secuencia impresa y los materiales necesarios para resolver las actividades en forma individual, sin embargo, el diseño y la organización de clase generaron más actividad como grupo.

La secuencia inició sin que el alumno tuviera idea del tema a manejar, pero la secuencia le hizo pensar que estaba trabajando con *fracciones*. Para él fue un descubrimiento paulatino del concepto a tratar, *usó* el ángulo sin saberlo.

En las etapas de “ángulo situado” y “conceptos contextuales” las *acciones* del alumno consistieron en superponer las figuras, delimitar y sombrear zonas; para los distintos tamaños de las figuras; sus *formulaciones* consistieron relacionar la parte de vuelta que le correspondía a la zona sombreada y lo *validaron* con los giros de la figura sobre el círculo.

En la fase de generalización de la etapa de “conceptos abstractos” las *acciones* se realizaban sobre la circunferencia dividida en partes, ya no sobre los materiales concretos, y las *formulaciones* fueron las respuestas a preguntas como:



- ¿Qué pasaría si cada doceavo lo dividimos en 30 partes?, ¿Cuántas habría en  $1/12$ ?
- ¿Cuántas partes habría en una vuelta completa?
- Si desde A, giro la flecha hasta E, ¿a cuánto equivale el giro?
- ¿El giro cambia si se modifica la longitud de la flecha?

Sólo el giro se conserva como la forma de *validar* tales formulaciones.

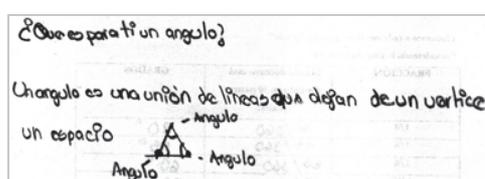
La dirección del profesor en toda la secuencia fue de suma importancia, pues la dinámica de trabajo difería del tipo de actividades acostumbradas por los estudiantes. Sin embargo, se cuidó no hablar de “ángulo” hasta la fase de institucionalización, donde se hizo explícito el término y la unidad de medida.

### Fase de validación y conclusiones

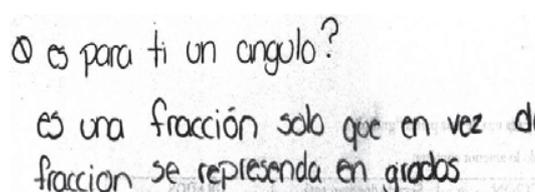
A partir de las consideraciones teóricas asumidas, los estudiantes a quienes fue dirigida la secuencia y las condiciones escolares que contextualizaron la experiencia, la validación de nuestro

trabajo debe valorar la construcción del significado como parte de vuelta y como giro, de la noción escolar de ángulo, más no el concepto como tal. Para lograrlo, apoyando a Mitchelmore y White (2000), haría falta una etapa más o quizá más de una donde la noción construida evolucione con nuevos significados.

Al preguntar ¿Qué es para ti un ángulo? es posible observar la fuerza de los contratos pedagógicos y escolares en algunas respuestas (ver R1), pues se relacionan más a las definiciones escolares más clásicas; sin embargo, también es posible reconocer la construcción de nuevos significados (ver R2).



R1



R2

En consecuencia, no podemos hablar de aprendizaje del concepto de ángulo, pues no es un concepto que se aprende de una vez y por todas, sino que se contextualiza según el uso que se le da. La secuencia se guió por la metodología, pero es evidente que hace falta mucha más experimentación e investigación para considerarla una situación didáctica.

Las consideraciones cognitivas y/o didácticas de otras investigaciones dieron luz de las dificultades que enfrentan los estudiantes con el manejo de la noción escolar de ángulo. Sin embargo, ambas perspectivas quedan condicionadas por el saber. Solo considerando su naturaleza, sus usos y representaciones; y los vínculos entre estos, es que se puede hablar de la *construcción de la noción de ángulo*.

### Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathematiques, 1970-1990*. (Traducido al inglés y editado por Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield, V.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bosch, C., Ferrari, V., Marván, L. y Rodríguez, P. (2003). Diplomado de la Ciencia en tu Escuela. Módulo de Matemática. *Correo del Maestro*, 88. Obtenido el 17 de abril de 2009 de <http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2003/septiembre/1anteaula88.htm>

Casas, L. (2002). *Estudio de la estructura cognitiva de alumnos a través de las redes asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en Geometría*. Tesis doctoral no publicada. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Extremadura, Badajoz.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado no publicada. DME, Cinvestav-IPN.

Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The mathematics Educator* 1(1), 4 – 11.

Matos, J. (1991). The historical development of the concept of angle (2). *The mathematics Educator* 2 (1), 18 – 24.

Micheltmore, M. y White, P. (1995). Development of the angle concept by abstraction from situated knowledge. Paper presentado en la *Annual Meeting of the American Educational Research Association*.

Mitcheltmore, M. y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstractions and generalization. *Educational Studies in Mathematics* 41, 209-238.

Mitcheltmore M. y White P. (2003) Teaching angles by abstraction from physical activities with concrete materials. *Proceedings of the Conference of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 4, (pp. 403-410). Hawaii.

Rotaeché, A. (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, Legaria.

**Nota.** Este trabajo de investigación se lleva a cabo bajo el apoyo del proyecto de investigación SIP **2008-2650** *Didáctica de la razón trigonométrica: su incorporación al discurso matemático escolar*.