GRÁFICAS DE VARIACIÓN: REFLEXIONES SOBRE LA VISUALICACIÓN DE LA CURVA

Gabriela Buendía Abalos, Eduardo A. Carrasco Henríquez
CICATA-IPN México
Universidad de Valparaíso Chile
gbuendia@ipn.mx, ecarrascr17@yahoo.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio y Superior

Resumen. *Presentamos una discusión a partir de resultados alrededor del uso de las gráficas sobre qué es lo que un alumno ve al trabajar con una gráfica tiempo-distancia y las implicaciones de dicha visualización en la construcción del conocimiento matemático.*

Palabras clave: gráficas, visualización, curva

Introducción

Al seno de la investigación socioepistemológica, se desarrolla una línea de investigación referida al uso de las gráficas en la construcción del conocimiento matemático. En ella, las gráficas no son la representación de una función, sino que se presentan como un conocimiento en sí mismo con un desarrollo y argumentación propios. Se está proponiendo así un marco de referencia epistemológico que incorpora los elementos del funcionamiento y forma de uso de las gráficas de tal manera que, como consecuencia, se resignifique la variación asociada a los fenómenos de cambio (Suárez, 2008).

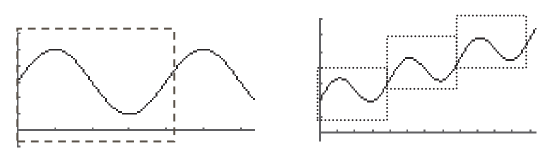
Las gráficas como elementos centrales en el desarrollo del Cálculo, surgen como un "dibujo de lo que varía" y se han ido tecnificando hasta ser hoy en día un código complejo de representación de objetos matemáticos. En ellas podemos reconocer metáforas que las constituyen (Carrasco, 2006); en particular, una que vive en las explicaciones de nuestras aulas es la gráfica como la traza de un punto que se mueve, referida en explicaciones del tipo "la función es continua si la puedo dibujar sin levantar el lápiz". Al entender las gráficas en un contexto de variación como una traza, suele confundirse con la trayectoria dibujada por el móvil que se desplaza provocando con ello ciertas problemáticas al seno del aula: que una línea recta con pendiente no cero sea interpretada como un objeto moviéndose con algún ángulo, que no se asocie una gráfica horizontal con un objeto estacionario, entre otros (Dolores, Alarcón y Albarrán, 2002; Leinhardt, Stein y Zaslavsky, l990).

Así pues, la gráfica no ha perdido su calidad de dibujo y en este sentido se presenta al estudiante como una imagen. Al ser analizada, no sólo sus características y componentes de herramienta matemática están presentes, sino que su forma, color y regularidades parecieran imponerse a las características propias de elementos matemáticos.

El interés de este escrito, desarrollado a luz del trabajo de investigación del Grupo de Trabajo Relme "Aproximaciones socioculturales" está en presentar una discusión a partir de resultados alrededor del uso de las gráficas sobre qué es lo que un alumno *ve* al trabajar con una gráfica tiempo-distancia y las implicaciones en la construcción del conocimiento matemático. Consideramos que el "ver" no se reduce a observar la representación gráfica o a las diferentes formas de análisis que de ello pudieran derivarse, de ahí que hablaremos de visualización como un proceso fuertemente vinculado a la noción matemática, a sus significados y sus representaciones y al escenario escolar o extraescolar donde se le analice (Arcavi, 2003; Cantoral y Montiel, 2001).

Reconociendo propiedades a partir de las imágenes gráficas

Buendía (2007) muestra la siguiente respuesta de un profesor ante la pregunta sobre la periodicidad de las siguientes funciones.



"Es como si hiciéramos un cuadrito en la primera para ver el periodo de repetición. Podemos hacer también un cuadrito para la segunda gráfica y veríamos, igual que en la primera, que el cuadrito se va repitiendo todo el tiempo igual...aunque también sube".

Fig. 1 ¿Son gráficas de funciones periódicas?

En la respuesta podemos notar que el argumento gira alrededor de la unidad de análisis como "algo" sobre la forma de la grafica que se repite constantemente, y no sobre los valores que tienen las ordenadas. Entonces tenemos algo como "segmentos" de la curva, sin considerar los ejes y/o valores de las imágenes y dominios.

Por su parte, Ávila (2006) relata el uso de la gráfica que hace un estudiante cuando trata ideas sobre razón de cambio en funciones. La estudiante (fig. 2) al mirar la razón de cambio necesita particionar la función en ocho intervalos; al hacerlo no trabaja con los ejes, sino solamente con la curva. La gráfica es por tanto, trabajada como el dibujo que ha de ser analizado y entonces la metáfora vigente del discurso matemático para trabajarla, como pares de números, instanciados en los ejes, no es activada.

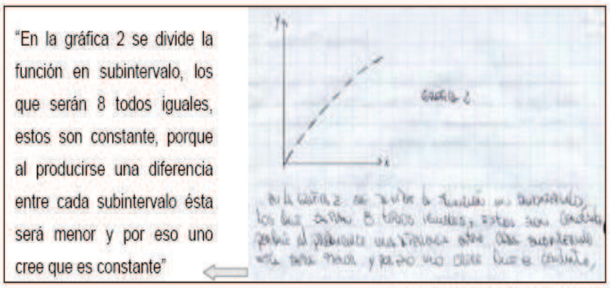
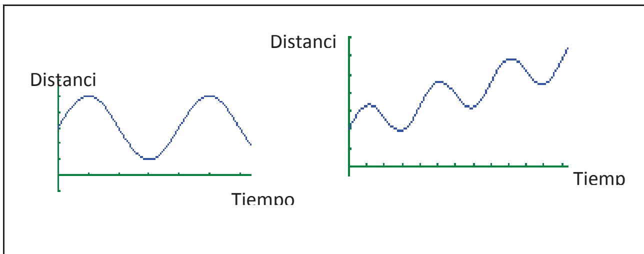


Fig. 2

[Ana, Episodio de Bitácora 9, 2002]

Retomando las respuestas de profesores ante lo periódico mostrada por Buendía, se señala que lo periódico se asocia a funciones que no lo son, sin embargo en las gráficas es posible establecer un patrón que se repite. En particular al observar la fig. 3 y la argumentación dada, se reconoce una noción sobre periodicidad que no es propia de la matemática sino que pertenece a nuestra cultura general como aquello que se repite con frecuencia a intervalos determinados y esa variación es la que las gráficas presentan a intervalos claramente definidos.

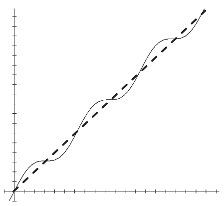


"La segunda gráfica es periódica porque se repite igual todo el tiempo, lo mismo que la primera"

Figura 3. ¿Son periódicas estas funciones?

Es un patrón visual de comportamiento el que finalmente permitirá predecir comportamientos. En ello se reconocen prácticas asociadas con la construcción significativa de lo periódico a partir de la visualización de la gráfica, y por tanto ella actúa como un soporte que permite construir argumentos para predecir.

En los siguientes ejemplos, vemos cómo prima la curva para realizar los análisis solicitados, los ejes no son referenciados y hay una mirada a la gráfica global, como objeto o traza que es posible separar de los ejes. Estos sólo proporcionan un marco.



…no es periódica si tomo como sistema de referencia los ejes de coordenadas propuestos, pero si yo tomo uno distinto (rotando el eje x para que coincida con la gráfica), entonces sí lo es

Fig 4.1 Ordoñez (2008)

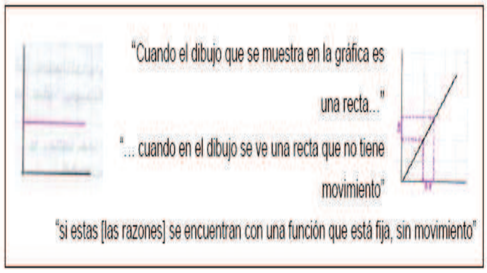


Fig 4.2 Avila (2006)

Respecto de la figura 4.1, la argumentación no refiere a una unidad de análisis, sino a la forma de la curva que sólo se diferencia de una senoidal en que ésta es creciente o, en términos de una imagen, está "ladeada". La argumentación surge posiblemente de reconocer que si el eje *x* estuviera con la misma inclinación que da el incremento en la gráfica, pues sí sería periódica (sería prácticamente una senoidal). La ausencia en la rotación del eje *y*, evidencia una mirada a la imagen más que a los valores de dominio y recorrido de la función; no hay problema en no rotar el eje *y* pues no estamos hablando de los valores de las variables involucradas en la relación funcional, sino simplemente en los marcos de referencia para mirar la imagen. Entonces podemos encontrar en estas producciones una valoración de la gráfica como un dibujo, una imagen constituida por la curva y entonces los valores de las ordenadas y abscisas no están presentes al momento de analizar sus comportamientos.

En la producción estudiantil de la figura 4.2, la estudiante explica cómo entiende la razón de cambio y en las frases refiere dos palabras que encuentra necesarias: gráfica y dibujo, por tanto no las entiende iguales. La palabra *gráfica* aparece sólo si hay puntos en los ejes, y en la que no hay puntos en los ejes sólo habla de *dibujo*.

En el análisis de las gráficas mostradas, los ejes coordenados son evocados o incorporados a las argumentaciones para poder justificar las conclusiones que la imagen de la curva produce. Se hace presente un análisis de la gráfica de modo global de tal manera que el análisis de la gráfica como “pares ordenados de puntos en el plano”, metáfora subyacente al cálculo moderno, está ausente.

Las construcciones argumentativas en el uso de la gráfica incorpora concepciones culturales respecto de los elementos que en ella se detectan: el segmento como un trozo de algo o lo periódico como repetición de algo. De modo que al portar la gráfica una doble calidad, como producto institucionalizado de la matemática y por otro lado como dibujo, en las prácticas de uso la gráfica ambas significaciones se mezclan y de ella surgen diferentes mixturas de ideas y conceptos.

Revisando el uso de las gráficas en un contexto de variación

Carrasco (2006) menciona que Oresme incorpora la potencialidad del dibujo geométrico al estudio del devenir de las cualidades. Desde entonces, la evolución temporal comienza a ser representada mediante un segmento geométrico y entendido como tal.

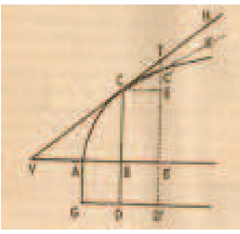


Figura 5

Posteriormente, los trabajos de Fermat y Descartes en el siglo XVII, respecto de la Geometría Analítica permiten el estudio de ecuaciones a través del significado de las curvas y el estudio de curvas definidas por ecuaciones. De este modo, Newton tiene a su disposición una amplia gama de marcos conceptuales para su trabajo con el movimiento, permitiéndole conformar su paradigma geométrico en cual *gráfica* es el resultado de la traza de un punto que se mueve y está constituida por segmentos geométricos (VB como abscisa y diversas ordenadas proporcionales en la figura 4).

Por su parte, Newton (1736) entiende el tiempo como “eterno e infinito, omnipotente y omnisciente; esto es, su duración se extiende desde la eternidad a la eternidad y su presencia del infinito al infinito…”; es un tiempo externo a las cosas. Sin embargo, para el estudio de las curvas o más bien los problemas relativos a un espacio que es atravesado por “algún movimiento local”, considera a las “cantidades [que conforman la curva, es decir las coordenadas *x* e *y*] como si fueran generadas por incrementos continuos, a la manera de un espacio descrito por el recorrido de un objeto que se mueve” [pag. 81]. El tiempo ha de ser entonces representado en la curva por una cantidad que se incrementa de modo continuo. Así logra trabajar con un tiempo más manejable que el ya descrito o "formal", y entonces recurre a la noción de duración. De igual modo ya se cuenta con la noción de número real, como un cociente de magnitudes lo que le permite dejar los elementos centrales alrededor de la gráfica para que la comunidad matemática logre una representación del tiempo a partir de una metáfora de flujo continuo, coherente con la representación como línea continua de los números reales. El tiempo es ahora distancia (Lakoff y Nuñez,2000) y desde ahí surge el tiempo isotópico e irreversible, dando un contexto para el trabajo con el tiempo formalmente entendido y alejado de aquél que construimos en nuestra cotidianidad (Carrasco y Díaz, 2008).

Por otra parte, Buendía (2007) menciona que Euler usa lo periódico como una propiedad que califica un cierto tipo de comportamiento repetitivo; así, si bien las funciones trigonométricas quedan formalmente establecidas como *periódicas* en su obra y gracias a su trabajo en contextos de variación, resulta relevante que él construye funciones periódicas a través de usar el comportamiento de las gráficas como se muestra en la figura 6. Así, dice la autora, cuando Euler propone una solución al problema de la cuerda vibrante, éste toma como función que da la forma inicial de la cuerda a una parábola sólo en el intervalo correspondiente a la longitud de la misma (es decir [0,a]); a continuación, refleja sucesivamente el arco de curva correspondiente respecto a las rectas $x = \pm na$ y finalmente refleja los arcos así obtenido uno sí y otro no, respecto al eje de la abscisas. Se obtiene así una curva que se extiende a lo largo de dicho eje y que cumple con la condición de periodicidad que sus contemporáneos exigían a la forma inicial de la cuerda.

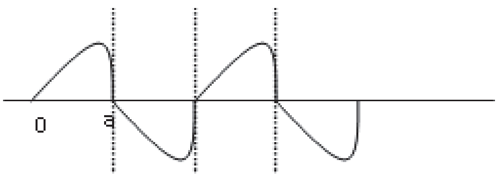


Figura 6. Haciendo periódica una función

De este modo el trabajo con gráficas, consideramos que no sólo es un acto de interpretación, sino que incluye la construcción de significados a partir de las prácticas que se ejercen en el trabajo con ellas. Es decir no sólo es lo que se ve, sino un *ver* dinámico, un construir la representación en una práctica de interpretación o construcción de la gráfica en que su dualidad dibujo/objeto matemático permite incorporar significados, nociones y herramientas que no son sólo de la matemática, sino que de los diversos mundos que portan quienes trabajan con ellas.

Comentarios finales

Las gráficas, constituidas a partir de querer hacer un dibujo de lo que varía ha evolucionado en un azaroso camino desde un dibujo, principalmente geométrico, a un producto institucionalizado un cierto conjunto de normas y principios propios de la estructura matemática (Roth, 2004). Sin embargo al enfrentar prácticas tanto para la construcción de gráficas como para su interpretación se involucran en ella su dualidad, dibujo-gráfica y ello permite incorporar ideas y nociones paramatemáticas o construir pseudo-conceptos, entendidos éstos como rodear un ejemplo con objetos guiados por una similitud concreta y visible formando un complejo asociativo limitado a un tipo de enlace perceptual (Díaz, 1999).

Al reconocer que la persona que interpreta y construye graficas ejerce prácticas relativas al uso de las gráficas, cuya intencionalidad surge de querer describir elementos matemáticos, comportamientos gráficos, y/o modelar fenómenos de variación, se revela la complejidad de una visualización que no es sólo la simple decodificación de los significados escolares y/o matemáticos que tiene la gráfica matemática. Por el contrario, esas prácticas involucran la dualidad de dibujo/gráfica; es la imagen gráfica que se presenta a la cognición y que se estructura como espacio heurístico de construcción de argumentos. Un espacio que según la intencionalidad puesta en la práctica, enacta -hacer emerger un mundo cognitivo mediante el acoplamiento estructural con el entorno durante una historia ininterrumpida- diversos esquemas conceptuales para hacer emerger significados, argumentos y prácticas.

Entonces las metáforas subyacentes al trabajo con gráficas deberán ser un puente entre las interpretaciones globales, sobre el dibujo, sobre la proyección, y aquellos análisis sobre los valores de las coordenadas, que entienden a la grafica como conjunto de puntos/pares de números. Se deberán articular, pues, en las prácticas de aula, la potencia de los análisis globales sobre la gráfica y los puntuales, que permitan significar propiedades matemáticas de las funciones y la variación y coherencia con aquellos significados socioculturales que viven en el dibujo.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003) The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52*, 215-241

Ordoñez, A. (2008). *Un estudio de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas.

Suárez, L. (2008) *Modelación – Graficación, una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Cinvestav-IPN.

Este proyecto recibió apoyo del Conacyt 90398.
De la investigación al aula diseño de secuencias fundamentadas en socioepistemologías del saber matemático