

ESTOCÁSTICOS EN EL SEGUNDO CICLO DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA: DETERMINISMO Y AZAR

María Teresa Carballo Riva Palacio, Ana María Ojeda Salazar
DME, Cinvestav, IPN.

México

carivpa@yahoo.com.mx, amojeda@cinvestav.mx

Campo de investigación: Pensamiento relacionado con
probabilidad y estadística

Nivel: Básico

Resumen. *El objetivo de esta investigación, de naturaleza epistemológica y con métodos en el orden cualitativo, fue comprender la enseñanza de probabilidad y de azar en el segundo ciclo escolar primario (con niños entre 8 y 10 años). Para ello se consideró: la propuesta institucional, con el eje La predicción y el azar en el Plan y programas de estudio (Secretaría de Educación Pública [SEP], 1993), sus contenidos programáticos, guías y libros de texto y el planteamiento en éstos de las lecciones respectivas; la práctica de la enseñanza en el aula, según elementos formativos que sobre probabilidad y azar tiene la docencia para ejercerla en la escuela regular y de educación especial; la interacción con la docencia en sesiones de estudio dirigido, para la identificación de elementos que pueden incidir en la formación docente en estocásticos.*

Palabras clave: estocásticos, epistemología, docencia, primaria

Antecedentes

Una primera incursión de la investigación se realizó mediante la aplicación de un cuestionario y un acercamiento con docentes de primaria pública. Ésta proporcionó información como: desconocimiento de los docentes del eje temático “La predicción y el azar” de la asignatura de matemáticas para este ciclo escolar (3° y 4° grados) y de las lecciones del libro de texto correspondientes; sesgos del pensamiento de docentes sobre azar y probabilidad; su indiferenciación entre lo aleatorio y lo determinista; su enjuiciamiento de las actividades propuestas en este eje temático como de “pasatiempo y recreación” y del alumno como incapaz de estudiar estos contenidos programáticos. La información sugirió la necesidad de indagar sobre la experiencia directa del docente y su interpretación de la *propuesta institucional* en su *enseñanza* del azar y la probabilidad en el *aula*, y sobre los elementos de que dispone para ella en sesiones de *estudio dirigido* conducidas por investigadoras, en diferentes escuelas del Distrito Federal, en sus modalidades de regular pública y de educación especial privada. La indagación en estos espacios docentes permitió reflexionar y analizar la práctica de *enseñanza* sobre azar y probabilidad, de acuerdo a referentes teóricos de carácter epistemológico y cognitivo.

Acerca de la constitución de la idea de azar

De acuerdo al estudio epistemológico *La génesis de la idea de azar en el niño* (Piaget & Inhelder, 1951), el proceso intelectual del individuo parte de la diferenciación entre lo imprevisto y lo imprevisible; lo imprevisto proviene de la incertidumbre, como incompreensión de lo *posible* a falta de un sistema operatorio que dé cuenta de él. Lo imprevisible resulta de la distinción entre lo observado y lo *necesario*, por medio de operaciones de *clasificación* y *seriación* que permiten describir y ordenar las cualidades y propiedades de lo indeterminado, al advertir las disyunciones concretas que implican lo *posible* de un cierto resultado, en relación a otros. Dado que las situaciones aleatorias se hacen evidentes en el terreno de lo *real*, la predicción de algún posible resultado requiere la advertencia de la irreversibilidad de lo aleatorio y del desarrollo de estructuras deductivas que den cuenta de lo *posible*: gracias a la constitución del *azar lógico aritmético*, el sujeto puede comprender el *azar físico* (Piaget & Inhelder, 1951, p. 205) y establecer un juicio de probabilidad. La falta de estructuras lógicas, de conjunciones y disyunciones, primero concretas y luego abstractas, para ordenar las posibilidades en la relación *parte–parte* y *parte–todo*, impide estructurar operaciones de *combinatoria* (segundo orden), pues la ausencia de operaciones lógicas *trae como consecuencia la falta de una síntesis entre el azar y los mecanismos operatorios en forma de un sistema de composición probabilística* (Piaget & Inhelder, 1951, p. 209). Este ordenamiento, primero del enlistado de los posibles resultados, luego de sus relaciones *parte–todo*, en eventos equiprobables e inequiprobables y, posteriormente, del desarrollo de operaciones de proporcionalidad para identificar esas relaciones con grandes números, es un proceso que puede darse de manera simple en niños pequeños, incluso de edades a 6–12 años. Para ello, según Fischbein (1975), se parte de un pensamiento intuitivo primario que se puede ver asistido por una *enseñanza* de estocásticos desde los 4 ó 5 años de edad. Esta asistencia toma el papel de andamiaje que tiene la intuición para la constitución de nuevas adquisiciones cognitivas; y asume el papel que juega la *enseñanza* en el desarrollo de intuiciones secundarias correctas, que apunten hacia un desarrollo del pensamiento de lo probable, *bajo un currículum apropiado al aprendizaje de la probabilidad que considere un sustrato intuitivo primario en la formación de nuevas intuiciones* (Fischbein; 1975, p. 131). El andamiaje intuitivo secundario deberá constituirse con base en *ideas fundamentales*, según Heitele (1975), que: orienten su formación bajo un currículum en espiral para desarrollarlas y superar, progresivamente, intuiciones primarias basadas

en explicaciones “mágicas” o relativas a la “suerte”; que consideren situaciones de análisis probabilístico en la enseñanza para *normar las expresiones de nuestra creencia*, mediante el inventario del *espacio muestral* Ω (formalmente, el σ -campo de subconjuntos del conjunto Ω) y la advertencia de las relaciones *aditivas* o *multiplicativas* entre sus elementos, así como el desarrollo de operaciones de *combinatoria* para posibilitar el ordenamiento cuantitativo de los posibles resultados en relaciones *parte–parte* y *parte–todo*; que advierta la *independencia* de eventos, la *equidistribución* y *simetría*, la idea de *muestra*, de *variable estocástica* y de *ley de los grandes números* (Heitele, 1975, pp. 198-199) y que recurra al modelo de *urnas* y a la *simulación*. Esta propuesta de ideas fundamentales consideró los resultados de Piaget & Inhelder (1951).

Steinbring (1991) analiza el papel de la enseñanza de estocásticos en cuanto a la relación entre la naturaleza epistemológica del conocimiento matemático y su significado socialmente constituido en la interacción en el aula; resalta el papel de la *enseñanza* en la constitución progresiva del conocimiento estocástico, el cual requiere de la observancia del *triángulo epistemológico* (ver Figura 1), es decir, la constitución del concepto resultaría de un balance en la relación entre todos los vértices, por ejemplo, al observar sistemáticamente la *frecuencia relativa* de una secuencia de eventos, como la manera natural del pensamiento de registrar los datos, luego, de organizar los resultados en una relación *parte–parte* y *parte–todo* al asignarle una probabilidad y tomar conciencia de la experiencia al diferenciar la *variable aleatoria* y las frecuencias relativas de sus valores posibles.



Figura 1. Forma relacional en la constitución del conocimiento, en particular, del concepto de probabilidad, según Steinbring (1991, p. 507).

Según el autor, la comprensión social común y el desarrollo del conocimiento requieren la estructura [de] *retroalimentación interactiva explícita para verificar, mejorar y modificar la comprensión que uno tiene de los conceptos matemáticos* (Steinbring, 1991, p. 519).

Proceso de investigación para el estudio

Con carácter cualitativo (Eisner, 1998), la investigación estuvo constituida en tres fases: la primera, documental, examinó la *propuesta institucional* (SEP, 1993); la segunda consistió en indagaciones en *estudio dirigido* a docentes sobre estrategias y experiencias de enseñanza de estocásticos en primaria, de educación regular y de educación especial. La tercera fase se enfocó en la *enseñanza en el aula* de contenidos de estocásticos, en condiciones reales. El objetivo de la investigación fue identificar los elementos de probabilidad y de azar que requiere la docencia para orientar su enseñanza hacia la formación de modelos explicativos sobre el pensamiento de lo *posible*.

Espacios metodológicos

Específicamente, el estudio se llevó a cabo con cuatro docentes, en cuatro aulas distintas de escuela regular, y con un docente en el *aula* de educación especial. Ellos reconocieron la relevancia que tiene la formación de la docencia para poder interpretar la propuesta institucional, dado que ésta determina su interacción con el alumno al interior del *aula*. La estrategia fue, primero, realizar una investigación documental de la *propuesta institucional*, que resultó en elementos para el análisis de la orientación de la docencia hacia estocásticos; y, segundo, realizar una *interacción indagatoria* en *estudio dirigido* y en el *aula*, al desarrollar la docencia los contenidos programáticos de este eje.

Criterios de análisis

La perspectiva teórica permitió examinar la *propuesta institucional* y la información recopilada en sesiones de *aula* y de *estudio dirigido* a docentes, bajo cinco criterios de análisis, a saber: ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975); la distinción de éstas de otros conceptos matemáticos, tales como el de número y el producto cartesiano; recursos semióticos gráficos para organizar y tratar los datos, como símbolos matemáticos, figuras, diagramas y gráficas, lengua natural escrita (Fischbein, 1975; Steinbring, 1991); términos empleados en referencia a estocásticos (Steinbring, 1991); y estrategia de presentación (en la propuesta institucional) o de *enseñanza* (estudio dirigido y aula) (Heitele, 1975).

Instrumentos utilizados

Debido al carácter cualitativo del estudio (Eisner, 1998), se acometió la tarea del acopio de datos mediante guiones de observación, que se completaron de escenario a escenario.

Instrumentos. La información recopilada en cada uno de los escenarios fue producto de guiones específicos, de acuerdo a lo indicado por los elementos teóricos en la sección 2:

- Guión, según los criterios de análisis (ver 3.2), para el examinar la *propuesta institucional*
- Guión para el planteamiento y desarrollo del *estudio dirigido* a docentes, regido por los resultados del análisis de la *propuesta institucional*.
- Guión para la indagación en el *aula*, dictado por los resultados de sesiones de *estudio dirigido* y del análisis del eje *La predicción y el azar* en los programas de estudio y en las lecciones correspondientes de los libros de texto.

Técnicas. La investigación documental resultó en la constitución de matrices según las categorías de análisis. En todas las sesiones de *interacción indagatoria en el aula* y de *estudio dirigido*, se recurrió a la video grabación para el registro de datos, ya que esta técnica permite sus revisiones recurrentes según los criterios indicados en el parágrafo 3.2.; y la transcripción de pasajes específicos videograbados proporcionó anclajes para el análisis de la información vertida en diálogos y sus referentes.

Resultados: La probabilidad y el azar en el segundo ciclo primario

La *enseñanza* de la probabilidad y el azar se orienta hacia el cálculo formal de probabilidad, ante la inadvertencia de que la constitución de estas nociones no puede ser dada *a priori* (Steinbring 1991a), que se requieren numerosas experiencias empíricas para que el niño pueda comparar y diferenciar los resultados de ellas. En la medida en que se estructuran estas diferencias y se asimilan, se conforma un sistema operatorio que permite comprender el azar. La diferenciación entre lo determinista y lo aleatorio, como la comprensión de las expresiones adverbiales *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable*, no se constituye únicamente con la identificación de la fracción correspondiente a la probabilidad o de su cálculo decimal, sino que se requiere del desarrollo de *ideas fundamentales* que orienten al pensamiento hacia la

identificación de las relaciones entre los casos favorables y el total de casos posibles, así como las de proporcionalidad para dar sentido a cada una de esas expresiones adverbiales (términos empleados).

Propuesta institucional

La propuesta institucional propone para este ciclo seis contenidos a desarrollar por medio de nueve lecciones, planteadas en los libros de texto. En estas lecciones se valora escasamente la acción empírica con material concreto; el foco es la interpretación del texto con apoyo de figuras para responder preguntas sobre creencias (u opiniones) y no sobre el establecimiento de relaciones lógicas para diferenciar lo *posible* de lo imprevisto.

El caso de tercer grado. Se proponen dos contenidos a desarrollar con cuatro lecciones, cuyo propósito es diferenciar entre situaciones deterministas y situaciones aleatorias, mediante la presentación de juegos de estrategia y juegos de azar, que resultaron insuficientes en contenido, estructura, secuencia y número, dado que las *ideas fundamentales* implicadas en los juegos de azar, como *espacio muestra*, no se explicitan.

La importancia otorgada a *otros conceptos matemáticos* desvía e la atención hacia el *número*, no para identificar la cardinalidad del espacio muestra y las relaciones entre los casos favorables y el total de *posibles*, sino como el objeto de *enseñanza* con el cual se satisface la necesidad de saber “cuántos” casos favorables, sin advertir los otros *posibles*, como los casos desfavorables y el total de casos posibles.

Los *recursos para organizar y tratar la información* dispuestos en las lecciones del libro de texto son: lengua natural escrita, numerales, tablas, tableros de juegos, gráficas, figuras para ilustrar las situaciones propuestas, en algunas lecciones se propone el plano cartesiano.

Los *términos empleados* para cada situación propuesta desvían de las *ideas fundamentales* para establecer diferencias entre cada tipo de juego. Tal es el caso con “adivina” para referirse a la situación determinista y “suerte” para referirse a la situación aleatoria.

El caso del cuarto grado. Cuatro contenidos curriculares se plantean en cinco lecciones para lo *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable*, con situaciones inequprobables y

equiprobables, mediante la identificación de los casos favorables, pero sin relacionarlos con el total de casos posibles ni con los casos desfavorables.

Las *ideas fundamentales* implícitas en estas lecciones son: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, variable estocástica y muestra. Esta última se incluye en cuanto se plantea el enfoque frecuencial de la probabilidad, en tres de las cinco lecciones de este grado escolar.

En cuanto a *otros contenidos matemáticos* que se convocan para el estudio del azar están los números naturales en situaciones de conteo y su orden. El uso de los números fraccionarios no se plantea para expresar composiciones de urna o los casos favorables en relación a los casos posibles en el lanzamiento de una moneda o de un dado en situación inequivalente. Los *recursos para organizar y tratar la información* sugieren algunas maneras de organizar los datos en tablas y gráficas. Se utiliza la lengua natural escrita.

Los *términos* relevantes empleados en estas lecciones son: “adivina”, “suerte” y “crees” para demandar la anticipación de un posible resultado. Estos términos desvían de la descripción específica del *objeto*. La *estrategia de presentación* de contenidos está determinada por los recursos utilizados para organizar y tratar la información y éstos revelan el propósito de cada lección, el cual no considera la identificación del espacio muestra para advertir los casos favorables y el total de casos posibles. Las situaciones de estudio proponen como dispositivos de aleatoriedades lanzamientos de monedas, dados, extracciones de canicas de urnas, para casos equiprobables e inequivalentes y favorecen la observación concreta de ensayos sucesivos y de su comportamiento, para dar sentido a las expresiones adverbiales *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable*.

Estudio dirigido a la docencia para el segundo ciclo de primaria

Se constató una indiferenciación entre lo *posible*, lo *necesario* y lo *real* (Piaget & Inhelder, 1951), dado que no se distinguió entre la “preferencia” por algún posible resultado y su probabilidad de ocurrencia, resultante de un análisis e identificación de los posibles resultados de una situación aleatoria específica. Fueron recurrentes efectos de recencia (Fischbein, 1975) y argumentos referidos a “suerte”, “magia”, “adivinanza”, “lo que no se sabe”, “lo incierto”, “inseguro”, que

expresan la indiferenciación entre necesidad deductiva y posibilidad (Piaget & Inhelder, 1951). Esta indiferenciación orientó hacia una propensión al uso del número para cálculos, pero sin advertir la necesidad de describir ni enlistar el espacio muestra correspondiente; por ejemplo, para el lanzamiento de dos dados ordinarios se presentaron reiteradamente juicios de probabilidad basados únicamente en uniones aditivas, con la advertencia de doce posibles resultados y no de treinta y seis.

El aula de estocásticos de segundo ciclo de primaria

La *enseñanza* en el aula, si bien de compromiso, se circunscribió a la escasa formación docente en este campo del conocimiento. Al igual que ocurrió en *estudio dirigido*, el proceso que la rigió reveló ideas intuitivas equivocadas, como recencias (Fischbein, 1975) y la indiferenciación entre lo *posible*, lo *necesario* y lo *real* para advertir lo imprevisible (Piaget & Inhelder, 1951).

El aula regular del segundo ciclo de primaria. No hay diferenciación de los términos utilizados en las lecciones, incluso se les adoptó para referirse igualmente a las situaciones deterministas y a las aleatorias. Esto atañe a las relaciones entre el *signo*, el *objeto* y el *concepto* para constituir el conocimiento estocástico (Steinbring, 1991), las cuales resultan desvirtuadas.

De las situaciones de inequprobabilidad y equiprobabilidad para introducir lo *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable*, no se describió el espacio muestral ni se advirtieron las relaciones entre los casos favorables y el total de casos posibles ni los valores de la variable estocástica en juego.

En cuanto a *otros contenidos matemáticos* implicados en la situación para tratar el azar, se distinguió el uso de los números naturales para conteo. Se usaron los números fraccionarios para obtener las fracciones resultantes de cada composición de urna y propiciar el reconocimiento de los casos de equiprobabilidad entre eventos. Las situaciones referidas al enfoque frecuencial de la probabilidad no se relacionaron con la idea de *equidistribución* y *simetría* ni con la idea de *muestra*. La única estrategia utilizada para la *enseñanza* fue lo dispuesto en cada lección del libro de texto, siguiendo al pie de la letra la secuencia, los términos utilizados para referirse al azar y a la probabilidad, y las experiencias empíricas propuestas ahí. Los patrones de explicación utilizados en la acción educativa sobre estocásticos carecen de elementos probabilísticos que orienten hacia la

advertencia de *ideas fundamentales*. La falta de elementos para su identificación en el libro de texto determinó la interacción al interior del *aula* y develó el privilegio al número para *determinar*.

El aula de educación especial. La *enseñanza* en este espacio, precedida por sesiones de *estudio dirigido*, implementó estrategias que permitieron al alumno con déficit de audición advertir, incipiente pero progresivamente, la advertencia de la relación entre las diferentes proporciones de elementos de los conjuntos en juego para distinguir la mayor o menor probabilidad de uno u otro evento. Sin embargo, no se obtuvo evidencia de que se relacionaran las proporciones de cada conjunto con las frecuencias relativas respectivas, obtenidas en cada ejercicio. Se observó que la formación docente determina las maneras en que el profesor acepta y se acerca a situaciones de actualización. Las necesidades surgidas de la atención a niños con déficit de audición dieron apertura a la indagación sobre su enfrentamiento al conocimiento, en particular al de estocásticos.

Conclusiones: Determinismo y azar

Los aspectos de diferenciación entre situaciones deterministas y aleatorias, de lo *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable* con situaciones inequprobables y equiprobables, según el eje temático *La predicción y el azar* (SEP, 1993), se tratan de manera insuficiente dadas las experiencias propuestas para avizorar la relación entre casos favorables y el total de casos posibles, con base en el enfoque frecuencial de la probabilidad como preludeo a la ley de los grandes números, prevista para el tercer ciclo. La *enseñanza* en el *aula* reveló inadvertencia de *ideas fundamentales* de probabilidad en el planteamiento de las lecciones del libro de texto. En sesiones de *estudio dirigido* a la docencia, ésta manifestó indiferenciación entre lo imprevisto y lo imprevisible (Piaget, 1951) y la consideración del *número* como único objetivo del eje, infiltrada en su práctica en el aula como énfasis en el determinismo. La diferenciación entre lo *posible*, lo *necesario* (Piaget, 1982) y lo *real*, requiere de una formación docente basada en el desarrollo de *ideas fundamentales* de estocásticos para el estudio del *azar* en situaciones de *enseñanza*.

Referencias bibliográficas

Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P. y Castrejón, J. (1997). *Matemáticas. Tercer grado*. México: SEP.

- Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P. y Castrejón, J. (2000). *Matemáticas. Tercer grado*. México: SEP.
- Ávila, A., Balbuena, H. y Bollas, P. (1994). *Matemáticas. Cuarto grado*. México. SEP.
- Ávila, A., Balbuena, H. y Bollas, P. (1997). *Matemáticas. Cuarto grado*. México. SEP.
- Carballo, M. (2004). *Estocásticos en el segundo ciclo de la educación primaria: Determinismo y azar*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, IPN.
- Eisner, E. (1998). *El ojo Ilustrado*. Barcelona: Paidós
- Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205.
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1951). *La Genèse de l'Idée de Hasard Chez l'Enfant*. Paris: PUF.
- Piaget, J. (1982). *Le possible et le nécessaire, 2*. Paris: PUF.
- SEP. (1993). *Materiales Educativos y Medios. Plan y Programas de Estudio, Educación Básica, Primaria*. México.
- Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 22, 503-522.