ENSEÑANZA Y COMPRENSIÓN RESULTANTE DE IDEAS FUNDAMENTALES DE ESTOCÁSTICOS EN TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

María Patricia Flores Marroquín, Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN México
pflores@cinvestav.mx, amojeda @cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística Nivel: Básico

Resumen. *La enseñanza de medida de probabilidad, principio fundamental del conteo y espacio muestra, a 39 alumnos de sexto grado de educación primaria (11-12 años), y su comprensión resultante, se investigó mediante la aplicación de un cuestionario. En la propuesta institucional y en el aula se privilegian los contenidos aritméticos sobre los de estocásticos. Los alumnos reproducen gráficas, tablas y diagramas como se les presentan en la enseñanza, sin la referencia conceptual respectiva; usan indistintamente los términos probabilidad y posibilidad en las clases de probabilidad; se desatienden los datos o las instrucciones dadas; y las justificaciones se reducen a la intervención del azar. Fue exitosa (79.4 % correctas) la contestación a preguntas sobre razonamiento bayesiano, sin un trazo correcto del diagrama de árbol respectivo.*

Palabras clave: enseñanza, comprensión, estocásticos, primaria

La investigación y sus ejes

Esta investigación planteó la pregunta: ¿Cuál es la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria resultante de su enseñanza con los medios institucionales? Sus objetivos son: caracterizar el uso de medios en la enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria, e identificar la comprensión de los alumnos de las ideas fundamentales de estocásticos luego de su enseñanza.

La investigación se orienta bajo tres ejes: el primero, *epistemológico*, considera las ideas fundamentales de estocásticos señaladas por Heitele (1975, pág. 3) como las “que proporcionen al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que sean tan eficientes como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración”. El eje *cognitivo* considera una enseñanza basada en el desarrollo de los fundamentos intuitivos de los alumnos para el pensamiento probabilístico (Fischbein, 1975). El eje *social* considera las dimensiones de la educación (Eisner, 1998): la *intencional* en los propósitos de la práctica educativa; la *estructural*, con la organización institucional de contenidos temáticos, su jerarquización y temporalidad; la *curricular*, que corresponde a contenidos y actividades a realizar por los alumnos; la *pedagógica*, que compete a lo que se pretende enseñar y los medios y estrategias que el docente pone en práctica para ello; y la *evaluativa*, como un juicio de valor que se otorga a los resultados de la enseñanza obtenidos (pág. 93).

Método

La investigación, de orden cualitativo (Eisner, 1998), se *enfoca* en la enseñanza y sus resultados. El investigador asume al *yo como instrumento* y su estudio tiene un *carácter interpretativo* que justifica lo informado y lo relaciona con la experiencia obtenida de la situación estudiada. Además, usa el *lenguaje expresivo* y atiende a *lo concreto.*

Los escenarios de investigación son la propuesta institucional, la enseñanza en el aula en condiciones reales y el alumno frente a los estocásticos. Aquí interesan los dos últimos, ante la presencia del investigador.

La enseñanza en el aula. La práctica docente, según estrategia propia del titular del grupo, se sustentó en el uso de medios (libro de texto y programa de cómputo *Enciclomedia*) y consistió en el desarrollo de tres lecciones de probabilidad y una de estadística. La primera de ellas, “Un juego con dados” (lección 30, SEP, 2003), propuso el interactivo *Dados*; la segunda, “Un candado seguro” (lección 35, SEP, 2003), incluyó el interactivo *Diagrama de árbol*; la tercera, “A los conejos les gustan las lechugas” (lección 48, SEP, 2003), propuso el interactivo *Diagrama de árbol* y, finalmente, la lección 52 de estadística, “Información engañosa” (SEP, 2003), sin interactivo, utilizó *Encarta 2005.*

Instrumentos para recopilar información. Se diseñó y aplicó un guión de observación de la enseñanza de estocásticos y un cuestionario a discentes, después de la enseñanza, que planteó seis situaciones aleatorias específicas y preguntas abiertas sobre las ideas fundamentales de estocásticos implicadas en ellas. Aquí citamos sólo tres situaciones.

Técnicas de Registro de Datos. Las sesiones de aula se videograbaron, digitalizaron y se transcribieron los pasajes de interés para el análisis respectivo. El cuestionario se presentó al alumno en hojas impresas, para su contestación individual, con lápiz y colores, en hora de clase, con tiempo aproximado para su resolución de dos horas.

Criterios de análisis. Los datos recolectados del aula y con el cuestionario se sometieron a la *célula de análisis* (Ojeda, 2006): ideas fundamentales de estocásticos (aquí, en particular, medida de probabilidad, espacio muestra, regla del producto y combinatoria), otros conceptos matemáticos requeridos, recursos semióticos y términos empleados.

Resultados

Los resultados revelan la repercusión —en la comprensión de los alumnos de ideas de estocásticos— de la comisión en la enseñanza de errores sintácticos y de la imprecisión de instrucciones, tanto en los medios como en su uso en el aula por los docentes.

Enseñanza en el aula y medios

En términos generales, la enseñanza en el aula con lecciones de probabilidad careció de los elementos conceptuales respectivos. En la transcripción de pasajes ejemplares que aquí incluimos, "M" denota al docente y "A" o "As" a los alumnos.

Ideas fundamentales

La lección 30, "Un juego con dados", plantea un juego en el que se usa una tira de papel con doce casillas numeradas del 1 al 12,para distribuir 36 fichas entre ellas e irlas retirando según el resultado de la suma de puntos de dos dados lanzados; gana quien retire primero todas sus fichas. Sin su análisis previo, el docente indicó que cada quien distribuyera las fichas como deseara en las casillas de la tira, y si se obtenía la suma correspondiente a una casilla ocupada, se retirarían todas las fichas de ella. Así, los alumnos que colocaron todas sus 36 fichas en la casilla del número seis, cuando resultó esta suma retiraron sus fichas y ganaron. El docente hizo hincapié en los valores posibles de la variable aleatoria (suma de los números de los dados), e indicó que todos tenían las mismas probabilidades de ocurrir (sesgo de equiprobabilidad): no discriminó entre el evento del espacio muestra y el valor respectivo asignado por la variable aleatoria:

> *M: ¿Cuál fue la mejor estrategia de las que ensayaste?*
>
> *A: (Repite la pregunta) Juntar todas en una sola casilla.*

M: ¿Crees que puedas encontrar una estrategia con la que siempre ganes?

A: ¡No!

Con la lección 35, el docente pidió una estrategia para calcular el número de combinaciones posibles de un candado con tres cilindros, cada uno con números 0, 1, 2 y 3, sin referirse, ni antes ni después, al principio fundamental del conteo:

M: ¡No es adivinanza! [Lee en el libro]: "Ahora trata de enunciar una regla para calcular el número de combinaciones del candado de Javier", pongan ahí [en el libro]… "multiplicar el número de cilindros por el número"… Hace rato nos salieron menos, pero son muchísimos más,… "multiplicar el número de combinaciones por el número de … el número de combinaciones", que es del cero al nueve, ¿por el número de qué…? ¡De cilindros! ¿Qué tan grande es el número resultante? Serán entre diez y cien; entre cien y doscientos; más de mil, ¿más de mil?

A: Entre más de mil.

M: ¿Más de mil?

A: ¡No!, ¡más de mil! Entre doscientos, ¿no? Más de doscientos … entre cien y doscientos.

M: Más de doscientos.

Otros conceptos matemáticos. El número careció de sentido respecto a la situación aleatoria en estudio, por la falta de análisis de ésta en cada caso y por el desconocimiento de técnicas como la del diagrama de árbol o de enumeración de posibilidades para organizar datos. Por ejemplo, con la lección 30 relativa a la suma de los puntos al lanzar dos dados, ocurrió el siguiente diálogo:

M: ¡Claro! ... ¿Con una sola vez ganas y puedes retirar todas las fichas? … ¿Con una sola vez ganas? ¡No! ¿Alguien me dice …? ¿Cuántas veces se necesitan para que salga un ganador?

A: Doce.

M: ¡Por los menos doce!

As: Doce.

M: Vamos a llenar aquí en el libro, rapidito, doce tiros.

Recursos semióticos

El trazo del diagrama de árbol se plantea en algunas lecciones como el propósito por lograr. Para quinto grado, el libro de texto propone en sus lecciones de probabilidad y de estadística la copia de gráficas, tablas y diagramas. El de sexto grado sólo proporciona datos para que los alumnos elaboren tablas, gráficas o diagramas de árbol, pero sin exigir un análisis o revisión de lo producido. El docente manifestó dificultades en la lectura y trazo del diagrama de árbol; pretendió identificar las distintas posibilidades a partir de un diagrama de árbol trazado en el pizarrón, secuenciando todos los nodos de un mismo nivel y a continuación los del siguiente, esto es, en forma de zig, zag; el trazo del diagrama de árbol realizado en el pizarrón unió dos ramas de distinto orden con un mismo nodo (ver Figura 1). El uso del interactivo respectivo del programa de cómputo no contribuyó a resolver las dificultades, sino a profundizarlas; el diagrama, con orientación horizontal y sin raíz, se "crea" agregando los elementos y el número de niveles (ramificaciones) en el que los organiza. En particular, la dificultad para identificar el número de niveles correspondiente a la situación propuesta en la lección 48 se reveló con el despliegue sucesivo de ramificaciones para una sola rama (ver Figura 2).

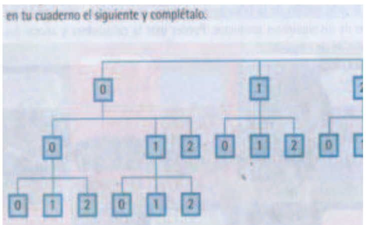


Figura 1. Trazo por el docente del diagrama de árbol del centro.

Figura 2. Interactivo "*diagrama de árbol*".

Términos empleados

El uso por alumnos y docentes de la frase "por azar", para justificar respuestas sobre ocurrencia de eventos es, por un lado, evidencia de la falta de identificación de las ideas fundamentales de estocásticos implicadas; por otro, es una conducta estandarizada por la enseñanza, a modo de cliché (Flores L., 2002), resultante de la introducción de la idea de azar desde el tercer grado mediante "juegos de azar":

M: ¿Crees que puedas encontrar una estrategia con la que siempre ganes?

A: ¡No!

M. ¿Por qué?

As: Porque es un juego de azar.

M: ¡Porque es un juego de azar!

El término "combinación" no se usó con el sentido de un arreglo o disposición particular de elementos, ni para alumnos ni para docentes. Por ejemplo, en la lección 48 no se determinó el número total de combinaciones de los elementos presentados (conejos, lechugas y perros), sino que fueron "muchísimas" (Flores M., 2008). "Posibilidad" y "probabilidad" se usaron indistintamente, fue lo mismo para los alumnos probabilidad que posibilidad:

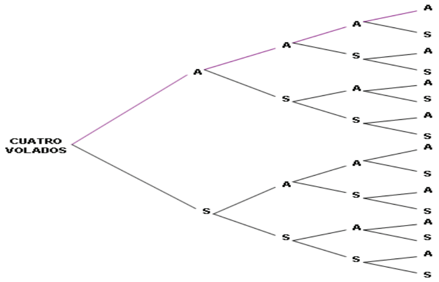
Comprensión de los alumnos de ideas de estocásticos

Se aplicó un cuestionario a 39 alumnos de 11 a 12 años de sexto grado, para obtener datos de su comprensión de ideas de estocásticos enseñadas en el aula.

Estructura del cuestionario

El instrumento incluyó seis situaciones, de las cuales citaremos tres para las que se plantearon preguntas sobre el principio fundamental del conteo, enfoque clásico de la probabilidad y espacio muestra:

Situación I. En un juego de cuatro volados Brayan gana si cae un águila, Ingrid gana si caen tres soles, Adriana gana si caen dos águilas y Jorge gana si cae un sol. Para revisar sus posibilidades trazaron este diagrama de árbol:



a) ¿Puede haber empate? ___________________ ¿Por qué? ________________________________

b) Sí dices sí, marca con rojo las ramas del árbol para este caso (empates).

c) ¿Quién es más probable que gane? ____________

¿Por qué?___________________________________

d) Marca con verde la(s) rama(s) del más probable ganador.

e) ¿Quién tiene más probabilidad de ganar? __________ ¿Por qué?__________________

f) Con el resultado de la rama morada, ¿quién gana? _______________________________

El inciso a) requiere identificar un mismo evento parafraseado de tres formas: Brayan gana si cae *un águila* y *tres soles*; Ingrid gana si caen *tres soles* y *un águila*; Brayan gana si cae *exactamente un águila* (no común en este nivel). Si gana Brayan, también gana Ingrid, esto es, empatan. Los incisos c) y e), formalmente iguales, informan sobre la consistencia de la respuesta: Adriana tiene más posibilidades de ganar. Las ramas que el alumno debió marcar para d) corresponden a (A, A, S, S); (A, S, A, S); (A, S, S, A); (S, A, S, A); (S, A, A, S); (S, S, A, A). Mientras que para el inciso f) la respuesta correcta es que no hay ganador.

Situación II. Dos bolsas de tela contienen pelotas de igual forma y tamaño, una tiene dos pelotas rojas y la otra tiene una pelota roja y una pelota azul. Se toma una bolsa al azar y sin ver se saca una pelota: es *roja*.

a) ¿Cuál de las dos bolsas es más posible que haya sido la que se escogió? ________________________ ¿Por qué? ____

b) Traza un diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades.

La respuesta requerida para el inciso b) (ver Figura 3) ha sido reportada como empleada por alumnos de secundaria para dar respuesta al inciso a) (Ojeda, 1994).

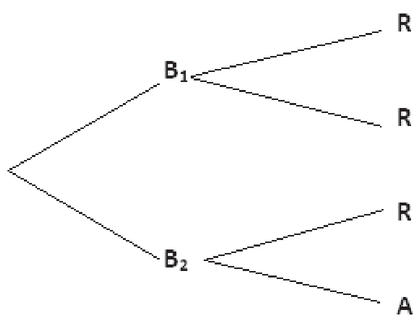


Figura 3. Diagrama de árbol para la situación propuesta en la Situación II.

El problema es conocido en la literatura por la dificultad que entraña el razonamiento bayesiano (Fischbein, 1975; Ojeda, 1994). Si B_1 denota la bolsa con las dos bolas rojas y B_2 la bolsa con una bola roja y otra azul, y si R denota bola roja, la justificación formal de que B_1 es la más probable de haber sido la seleccionada dado que se extrajo R es:

$$P(B_1 \mid R) = P(R \cap B_1)/P(R) = P(R \cap B_1) / [P(R \cap B_1) + P(R \cap B_2)] = (½) / (½ + ¼) = ⅔.$$

Situación III. Traza un diagrama de árbol para los posibles resultados de dos volados.
Para responder a esta instrucción, los alumnos ya tenían el antecedente de la situación I.

Resultados del Cuestionario

La Figura 4 presenta los resultados del cuestionario. En general, las preguntas fueron difíciles para los alumnos, con más del 50% en respuestas incorrectas o no contestadas.

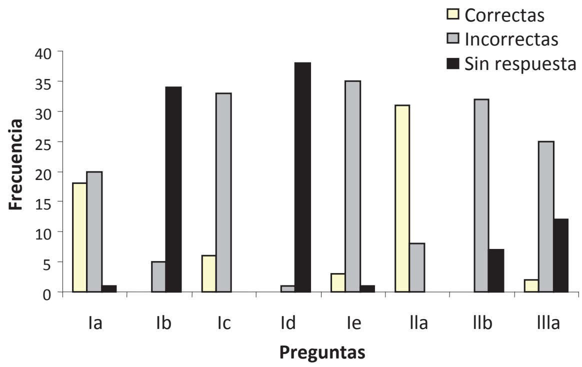


Figura 4. Distribución de tipos de respuestas al cuestionario

Ideas fundamentales

a) *Espacio muestra*. Los alumnos no adquirieron esta idea. Por ejemplo, para la pregunta Ia, 18 alumnos (46.1%) contestaron afirmativamente al empate, pero su justificación no fue congruente, sólo una respuesta reveló la noción: *Pueden caer 3 soles y 1 águila.* A la petición de remarcar las ramas del árbol de empate y ganador y de la identificación del evento correspondiente a la rama morada, el porcentaje de error fue mayor al 80%, lo cual evidencia que los alumnos no adquirieron esta idea. Igual sucedió con las situaciones II y III, porque el espacio muestra no fue relevante.

b) *Combinatoria.* Los alumnos no adquirieron la noción del principio fundamental del conteo: para la pregunta IIb, el 82. % de las respuestas fueron incorrectas y el 17.9% no respondió. Sólo 5% de los alumnos realizaron correctamente la instrucción III.

c) *Medida de probabilidad*. Los alumnos no adquirieron esta idea; sólo 8% de las respuestas fueron correctas para las preguntas Ic y Ie.

d) *Regla del producto.* El 20% de los alumnos contestaron correctamente la pregunta IIa con respuestas como: *Porque si hay dos rojas y metes la mano y sacas la pelota te va a salir roja; No hay otro color*, que sugieren un pensamiento intuitivo primario (Fischbein, 1975). Pero el resto de los alumnos no han adquirido esta idea.

Otros conceptos matemáticos

Los alumnos no dotaron de sentido a las cantidades numéricas por su implicación en la situación aleatoria, sino por sí mismas, en particular respecto a los números naturales y a su orden: (Ia) *son las mismas cantidades* (5.12%); (Ie) *son diferentes cifras* (2.5%). A falta del principio fundamental del conteo, algunos alumnos (12.82%) *contaron* la totalidad de nodos (águilas y soles) del diagrama.

Recursos semióticos

La principal dificultad de los alumnos (85.86%) fue la lectura del diagrama de árbol presentado y el trazo de los diagramas solicitados. Así, para la pregunta Ib (empate), 84.61% (33 alumnos) no efectuó el trazo solicitado; mientras que para la pregunta Id, 94.87% (37 alumnos) no marcó con verde la rama del ganador. Ningún alumno trazó correctamente el diagrama pedido en IIb. Para la situación III, la Figura 5 muestra el árbol trazado por un alumno para el caso de dos volados, con sólo la eliminación de las ramas centrales del árbol presentado en la situación I para cuatro volados.

Figura 5. Diagrama de árbol para la situación III.

Términos empleados. La pregunta Ic, "¿*Quién es* más probable que gane?", remitió a los alumnos a una persona y, al parecer, les sugirió enfocarse sólo en el resultado del volado *siguiente* (águila o sol). La pregunta Ie, "¿*Quién tiene* más probabilidad?", los remitió a la cantidad de caras especificadas para cada jugador en su condición para ganar: ocho alumnos contestaron que el jugador que ganaba con tres soles (Ingrid), y dieron justificaciones como: Ingrid, "porque *tiene tres* soles"; al parecer, el verbo "tener" dio relevancia al complemento *más probabilidad de ganar*. "Posibilidades", "probabilidades" y "oportunidades" se usan igual en las contestaciones de los alumnos; a "oportunidades" se asigna el sentido de "ganar": 7.69% lo atribuyeron a Ingrid (con tres soles). "Diagrama de árbol" sugirió a los alumnos líneas consecutivas presentadas en sus trazos (35%) incorrectos; "azar" lo utilizaron para lo que no tuvieron una justificación (35%); "casi nunca" lo relacionaron con "imposible".

Comentarios generales

Los medios no proporcionan lo necesario para la enseñanza en el aula de estocásticos y el propio docente carece de una formación en el tema. Esto repercute en la comprensión correspondiente de los alumnos. Un ejemplo es la dificultad que enfrentaron estudiantes y docente con el trazo del diagrama de árbol y su lectura, con la consecuente falta de identificación del espacio muestra y de asignación de probabilidades a eventos. Otorgar la importancia requerida a los contenidos de estocásticos en la enseñanza es una necesidad primordial, porque a partir de éstos se forman pensamientos dinámicos (Carballo, 2004).

Referencias bibliográficas

Balbuena, H., Block, D., Fuenlabrada, I., Waldegg, G. (2003). *Matemáticas, sexto grado.* México: SEP.

Carballo, T. (2004). *Estocásticos en el segundo ciclo de la educación primaria: determinismo y azar*. Tesis de Maestría no publicada. DME, Cinvestav.

Eisner, E. (1998). *El ojo Ilustrado.* Madrid: Paidós Educador.

Encarta 2005. Recuperado en octubre de 2008 de http://mx.encarta.msn.com/.

Enciclomedia. México, SEP. Recuperado en octubre de 2008 de http://www.enciclomedia.edu.mx/.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children.* Boston: Reidel Publishing Company.

Flores, L. (2002). *La predicción y el azar: praxis, creencias, saberes y conocimientos del docente de educación primaria.* Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav, IPN.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas*. Educational Studies in Mathematics 6*, 187-205.

Ojeda, A. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-University Levels*. Tesis de Doctorado no publicada. King´s College London.

Ojeda, A. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed) *Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*, (pp. 195-214). México: Santillana.