SENTIDOS DE USO DEL CERO Y LA NEGATIVIDAD EN LA RECTA NUMÉRICA

Abraham Hernández, Aurora Gallardo
Cinvestav, IPN. México
ahernandez@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Básico

Resumen. *En este artículo se reporta un estudio realizado con 40 estudiantes, donde se manifiestan diferentes sentidos de uso del cero como origen, vía tres situaciones: primera, un punto fijo arbitrario localizado sobre la recta numérica; segunda, un punto móvil arbitrario que cambia de ubicación; tercera, un punto fijo inamovible, esto es el punto medio de la recta numérica. Así mismo, surgió el evitamiento del cero origen cuando: fue simbolizado pero ignorado al llevar a cabo las operaciones y cuando no fue simbolizado. Además, se da la aparición de los números negativos en el modelo de la recta numérica y en la resolución de tareas aritméticas. Sorprendentemente la aceptación de números signados no condujo necesariamente a la identificación del cero como número.*

Palabras clave: sentidos de uso, negatividad, cero, recta, números signados

Introducción

Actualmente el cero y los números negativos son temas del currículo escolar, generalmente tratados sin considerar la importancia que tienen para lograr la extensión numérica de los naturales a los enteros y alcanzar una competencia en el manejo del lenguaje algebraico.

Este trabajo es parte de un proyecto más amplio que actualmente se encuentra en proceso. Nuestro tema apunta hacia la "aparición simultánea" de los números negativos y el cero, en los ámbitos histórico y didáctico, enfatizando el problema en la solución de tareas aritméticas, aritmético – algebraicas y algebraicas.

Éste se basa en los trabajos de Gallardo (1994, 2002), donde se identificaron niveles de conceptualización de la negatividad, evidenciados y abstraídos de un análisis histórico – epistemológico y a la vez de un estudio empírico con 35 alumnos de 12-13 años de edad, que en Rubio, Del Valle, Del Castillo y Gallardo (2007) se convirtieron en sentidos de uso de los números negativos en la construcción de número, variable y función en la resolución de problemas verbales.

Estos sentidos de usos individuales o colectivos se convierten en los significados socialmente aceptados de los conceptos matemáticos si la interpretación del estudiante es adecuada (Filloy, 1999), a saber: *sustraendo*, donde la noción de número se subordina a la magnitud (en a-b, a siempre es mayor que b, donde a y b son números naturales); *número signado*, donde un signo menos es asociado a una cantidad y no tiene significado adicional a otras condiciones; el *número relativo*, dónde la idea de cantidades opuestas está en el dominio discreto y la idea de simetría se pone evidente en el dominio continuo; el *número aislado*, es el resultado de una operación o la solución a un problema o ecuación; el *parámetro negativo*, surge en problemas de variación continua representados por: y= mx+ b, al reconocer que m y b pueden tomar valores negativos; y el *número negativo formal*, noción matemática de número negativo, dentro del cual hay concepto general de número que contempla los números positivos y negativos (los enteros de hoy).

La metodología

El fundamento teórico del estudio general está basado en las ideas rectoras de los siguientes autores: Filloy (1999), introdujo los modelos teóricos locales (MTL) para la observación empírica. Estos modelos constan de componentes sobre los procesos cognitivos y de comunicación, sobre la competencia y sobre modelos de enseñanza. La metodología general de nuestro estudio aborda estos componentes en dos planos de análisis, el plano histórico – epistemológico (evolución de los significados en el devenir de la historia) y el plano didáctico (enseñanza – aprendizaje – cognición). Con respecto al componente de los procesos cognitivos, Filloy menciona que desde 1933, Piaget descubrió en el niño un sistema de tendencias de las cuales el infante no es consciente y por ende, no puede manifestarlas en forma explícita. En esta misma dirección, Filloy (1999) explicó que hay tendencias debidas a las estructuras cognitivas del sujeto que aparecen en cada estadio del desarrollo individual, que dan preferencia a distintos mecanismos de proceder, diferentes maneras de codificar y descodificar mensajes matemáticos. Estas "tendencias cognitivas", pueden observarse en el aula y durante las entrevistas clínicas.

En la pieza de investigación presentada en este artículo, nos abocamos solamente, al componente sobre un modelo de enseñanza con estudiantes de secundaria acerca de la interrelación entre el cero y la negatividad.

Nuestras preguntas de investigación son las siguientes:

a) ¿Cómo contribuye el cero a la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros?

b) ¿Cómo consideran los estudiantes al número cero?

c) ¿Cómo se relaciona el cero con los niveles de conceptualización de los números negativos?

d) ¿Ellos entiende la adición, la sustracción, la multiplicación y la división por cero?

e) ¿Contribuirá el análisis histórico – epistemológico del cero como número a la comprensión de las dificultades presentadas por los estudiantes de hoy?

Los pasos iniciales de nuestro tema de investigación fueron reportados en Gallardo y Hernández (2005), donde se concluyó que el reconocimiento de las dualidades del signo igual como equivalencia – operador en ecuaciones; el signo de los números enteros como unario – binario y el cero como totalidad – nulidad, contribuyen como una posible ruta para lograr la extensión del dominio numérico de los naturales a los números enteros. Además, hemos reportado en Gallardo y Hernández (2006), cinco sentidos de uso del cero, que fueron identificados cuando los estudiantes resolvían tareas aritmético – algebraicas.

Los diferentes sentidos de uso del cero que fueron identificados en los diálogos de la entrevista fueron llamados e interpretados como sigue:

Cero nulo: “no tiene valor”, y convive con el número negativo como sustraendo.

Cero implícito: es aquel que no aparece escrito, pero que es utilizado durante el proceso de resolución de la tarea. El cero implícito convive con el número relativo.

Cero total: es aquel que está formado por números opuestos ($+n$, $-n$ con $n \in N$). El cero total convive con el número relativo.

Cero aritmético: es aquel que surge como el resultado de una operación aritmética y se relaciona con el número negativo como sustraendo.

Cero algebraico: es aquel que surge como resultado de una operación algebraica o bien es solución de una ecuación, surge espontáneamente como número signado, número relativo y número negativo aislado.

Los resultados de estas dos investigaciones ya reportadas, contestan parcialmente las cuestiones mencionadas anteriormente: a), b) y c).

El estudio

Aquí solamente nos abocamos a los componentes sobre los procesos cognitivos y sobre modelos de enseñanza del MTL, que fundamentaron los estudios de caso aquí presentado. En la resolución de las tareas propuestas, surgieron otros sentidos de uso del cero asociados a la recta numérica, modelo de enseñanza muy sustentado desde hace décadas, por autores como Janvier (1985), Resnick (1983), Peled (1991), Bruno (1994) entre otros. En consecuencia, responderemos más ampliamente y con mayor fundamentación a la pregunta de investigación c). Para ello, 40 estudiantes 13 – 15 años de edad respondieron cuestionarios, que fueron videograbados con el propósito de seguir el orden de las acciones de los alumnos realizadas sobre la recta numérica. Se presentan lo resultados de los 7 alumnos que mostraron el desempeño típico de la mayoría de la población. Éstos son ordenados del mayor al menor número de aciertos en dos de los 15 ítems contestados. No fue necesario incluir el análisis de un mayor número de ítems, porque cada estudiante resolvió todas las operaciones con el mismo procedimiento utilizado en el primer ítem.

Hallazgos:

En esta investigación, se encontraron diferentes sentidos de uso del cero como origen, vía tres situaciones:

1° Un punto fijo arbitrario localizado sobre la recta numérica; convive con los sentidos de uso del negativo como sustraendo, relativo, aislado y ordenado.

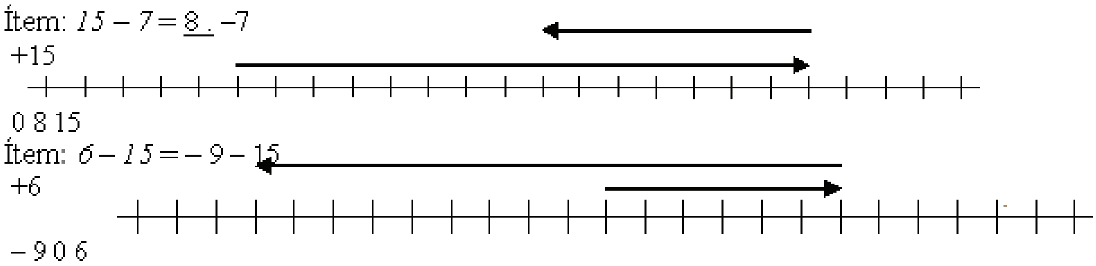
2° Un punto móvil arbitrario que cambia de ubicación; convive con los sentidos de uso del negativo como sustraendo, aislado y ordenado.

3° Un punto fijo inamovible, esto es el punto medio de la recta numérica; convive con los sentidos de uso del negativo como sustraendo, aislado, relativo y ordenado.

Síntomas de evitamiento del cero: a) Cuando no fue simbolizado. b) Cuando fue simbolizado pero ignorado al llevar a cabo las operaciones. c) Cuando los estudiantes interrumpían su conteo uno a uno al aproximarse al cero por la izquierda. d) Cuando consideraban al 1 y al – 1 como origen en la recta numérica.

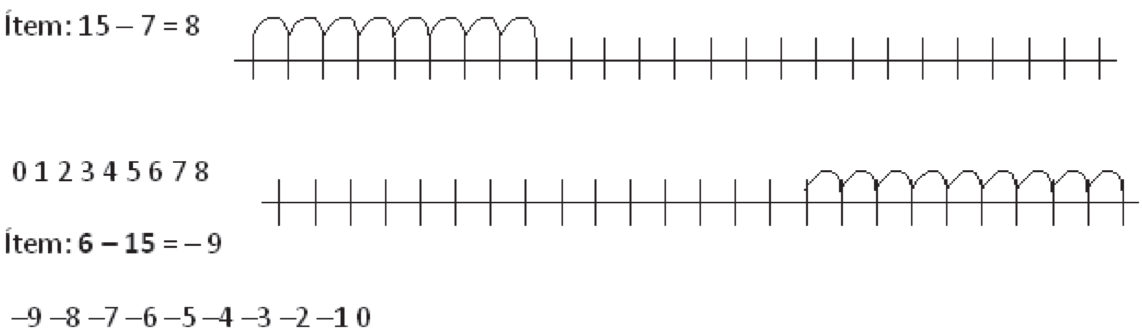
A continuación se muestran los ítems más representativos de lo señalado anteriormente:

RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_1



El estudiante, en primer término recurre a la recta numérica y hace uso de números signados para operar sobre la misma, aunque las sustracciones estén expresadas con números naturales. Los números signados + 15, –7, –15, +6, son representados con segmentos orientados vía flechas con sentido, hacia la derecha números positivos y hacia la izquierda números negativos. En la recta solamente numera el origen, los minuendos, y los resultados obtenidos. Considera al cero un punto arbitrario en la recta y punto de partida de las acciones realizadas para resolver los ítems planteados.

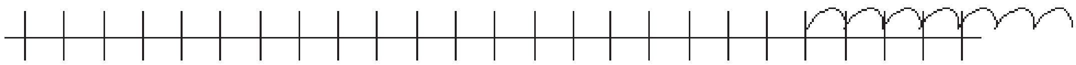
RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_2



Se pudo observar siempre que el estudiante, dio respuesta a las operaciones planteadas sin recurrir a la recta numérica. Esta la utiliza para representar el resultado y realiza conteo de uno en uno, numerando solamente los números que necesita para dicho conteo. Considera al cero como el principio u origen de la recta, colocado a la izquierda cuando el resultado es positivo y a la derecha cuando el resultado es negativo.

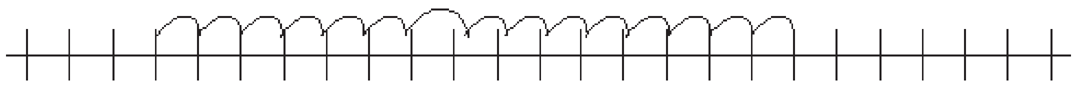
RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_3

Ítem: 15 – 7 = 8



–12 –11–10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Ítem: 6 – 15 = – 9

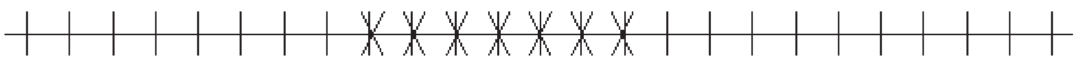


–12 –11 –10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Recurre a la recta numérica, ubica al cero en la mitad de ésta, numerando en forma simétrica hasta terminar los puntos marcados. En el ítem (15 – 7), no coloca en la recta el número 15, sólo agrega 3 arcos para representar el minuendo 15, y se regresa hacia la izquierda contando 7 arcos, llega al número 8 de la recta que es el resultado buscado. En el segundo ítem, a partir del 6 sobre la recta, realiza un conteo uno a uno, de los 15 arcos hacia la izquierda y llega al resultado – 9.

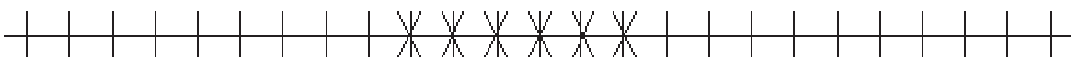
RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_4

Ítem: 15 – 7 = 9



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Ítem: 6 – 15 = 9



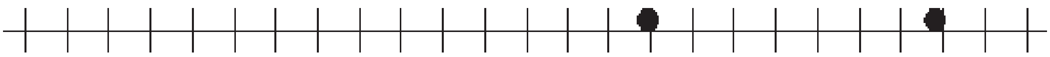
–15 –14 –13 –12 –11 –10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1

En el primer ítem, coloca el uno donde inicia la recta. Trabaja con números naturales, realiza la sustracción sin considerar los intervalos de un punto a otro, lo que condujo al resultado incorrecto

(15 – 7 = 9). El conteo uno a uno lo indicó tachando los números. En el segundo caso comienza con el negativo 15, al llegar al menos 1, se detuvo haciendo una pausa. Se observó que no pudo seguir numerando la recta. Surgió el "síntoma de evitamiento del cero". La expresión 6 – 15 =, la interpreta como 15 – 6 = 9, ya que el estudiante observó las marcas numeradas y a partir del punto denominado por él – 1, tachó 6 marcas sin importar si correspondía o no al resultado buscado.

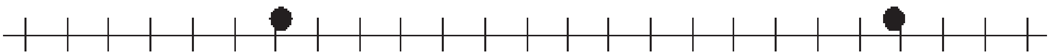
RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_5

Ítem: 15 – 7 = 8



–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Ítem: 6 – 15 = – 9

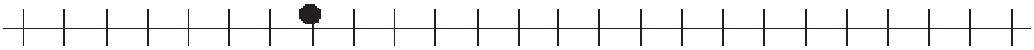


–15–14–13 –12–11 –10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6

En el primer término, recurre a la recta numérica. La extensión de la primera recta es de –7 a 15. La segunda recta recorre de –15 a 6. Nótese que el 7 es transferido a la recta como –7 y el 15 como –15. En la recta sólo representa el minuendo y el resultado con un punto sobre el número correspondiente. El cero es colocado sobre la recta y utilizado para realizar las operaciones vía el conteo.

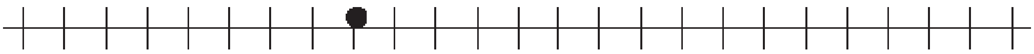
RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_6

Ítem: 15 – 7 = 8



(+)

Ítem: 6 – 15 = – 9

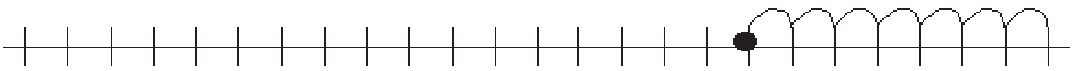


(–)

En primer término resuelve las operaciones indicadas. Al pasar a la recta numérica, solamente las signa con "+" ó "–" de acuerdo al resultado obtenido. Si éste es positivo la recta es positiva, si es negativo, la recta será negativa. En todos los casos propuestos el estudiante considera dos semirrectas por separado, una para los positivos y otra para los negativos. Solamente representa el resultado de la operación, recurriendo al conteo de uno en uno, desde la primera marca de la recta. El cero es ignorado, su conteo siempre empieza en el uno.

RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_7.

Ítem: 15 – 7 = 8 22



0

Ítem: 6 – 15 = – 9 21

0

Las expresiones aritméticas planteadas son resueltas en primer término. En la recta coloca el cero en un punto arbitrario. Inventa adiciones con los números dados: 15 + 7 = 22 y 6 + 15= 2. Los resultados obtenidos los coloca arbitrariamente sobre la recta numérica, sin relacionarlos con la posición del cero. Realiza la operación planteada vía el conteo, haciendo sus señalamientos con 7 y 15 arcos respectivamente. Los resultados de las operaciones son señaladas por puntos remarcados. Nótese que el cero no está situado en correspondencia a la serie numérica correcta.

Discusión

Del análisis de los ítems de los estudiantes, se puede afirmar que el significado del cero como origen es reconocido vía tres situaciones: primera, un punto fijo arbitrario localizado sobre la recta numérica (E_1); segunda, un punto móvil arbitrario que cambia de ubicación dependiendo de los valores numéricos involucrados en las operaciones (Estudiante E_2); tercera, un punto fijo inamovible, esto es el punto medio de la recta numérica representada (E_3). Así mismo, surgió el evitamiento del cero origen cuando, primero, éste fue simbolizado pero ignorado al llevar a cabo las operaciones (E_5 y E_7); segundo, el cero no fue simbolizado y además el número uno fue considerado como el origen sobre la recta numérica (E_4 y E_6).

La vinculación establecida entre el cero y la negatividad se manifestó como sigue: tres estudiantes (E_1, E_2 y E_3) reconocen negativos signados y el cero origen. Dos estudiantes (E_4 y E_5) aceptan negativos signados pero evitan el cero como número. Otros dos estudiantes (E_6 y E_7) no representan números signados ni tampoco reconocen al cero. En consecuencia, podemos concluir que el reconocimiento de números signados no conlleva necesariamente a la identificación del cero como número. Observamos además, que todos los estudiantes utilizaron el modelo de la recta numérica para tratar de realizar las operaciones de la sustracción. Así, E_1 representó las acciones con segmentos dirigidos; E_2 y E_3 con arcos sobre la recta numérica; E_4 tachó los valores correspondientes; E_5 colocó puntos sobre los números; E_6 utilizó puntos y segmentos dirigidos, y por último, E_7 representó sus acciones mediante puntos y arcos sobre la recta numérica. Sin embargo, no todos utilizaron este modelo como tal, sólo E_1, E_3 y E_5 realizaron las sustracciones en forma correcta.

Un suceso de gran relevancia que se observó en el video grabaciones realizadas a los estudiantes, fue lo que hemos denominado "síntoma de evitamiento del cero" que se manifestó en el hecho de que los estudiantes no podían continuar numerando la recta al aproximarse a la marca correspondiente al cero. Las situaciones descritas y analizadas fueron reiterativas en todos los ítems resueltos por los sujetos del Estudio y han permitido la identificación de otro significado del cero, el cero origen. Hasta el momento, se han reconocido en nuestra investigación seis significados: el cero nulo, el cero total, el cero implícito, el cero aritmético, el cero algebraico y el cero origen. Es evidente que estos hallazgos tienen que ser validados por un estudio empírico a mayor profundidad que ya se esta realizando, así como también proseguir la indagación histórico-epistemológica que dará respuesta a las preguntas de investigación d), e), f).

Referencias bibliográficas

Bruno, A., Martinón, A. (1994). Straight lines in the learning negative numbers. *Suma 18*, 39 - 48.

Filloy, E. (1999). Theoretical aspects of educational algebra. *Research in Educational Mathematics.* Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gallardo, A. y Hernández, A. (2005). The Duality of Zero in the Transition from Arithmetic to Algebra. En H. Chick y J. Vincet (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. *3*, (pp. 17–24). Melbourne: University of Melbourne.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Estudies in Mathematics. 49*, 171-192.

Gallardo, A., Hernández, A. (2006). The Zero and Negativity Among Secondary School Students. En *Proceedings of the XXX PME 3*, (pp. 153 – 160). Prague: Charles University.

Janvier, C. (1985). Comparison of models aimed at teaching signed integers. En *Proceedings of the Nineth Meeting of the PME*, (pp. 135-140). The Netherlands: State University of Utrecht

Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: Effects of age and ability. En F.Furinghetti (Ed.). *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 3*, (pp. 145–152). Assisi, Italy: PME.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press.