APRENDIZAJE DE FUNCIONES REALES EN CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES EN UN AMBIENTE DE INNOVACIÓN

Jhonattan Medina Orellan[1], José Ortiz Buitrago[1] y Arnaldo Mendible Sánchez[2]
Universidad de Carabobo[1], Campus La Morita Venezuela
Universidad Nacional Experimental de la Fuerza Armada[2]
jhonattan772@hotmail.com, ortizjo@cantv.net, arnmen2005@yahoo.com
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Superior

Resumen. *La incorporación de nuevos organizadores del currículo en la planificación y gestión de unidades didácticas, junto a una adecuada implementación en el aula, conlleva una mayor comprensión y aplicación de los conceptos y propiedades matemáticas por parte de los estudiantes. En ese sentido en la presente investigación se incorporó la modelización y la calculadora gráfica (CG) en un contexto matemático de funciones reales y se indagó respecto a las competencias matemáticas que muestran los estudiantes cuando usan la CG en el aprendizaje de funciones reales, así como los niveles de aplicación en el proceso de modelización matemática. El estudio se abordó como una investigación de campo con carácter evaluativo a través de la metodología de evaluación de programas. Los estudiantes lograron explorar, analizar, conjeturar y validar conocimientos matemáticos relativos a las funciones y que son necesarios para el estudio posterior de conceptos propios del cálculo. Además, los participantes adquirieron competencias matemáticas vinculadas al concepto de función, al uso y manejo de la calculadora gráfica y competencias de modelización matemática.*
Palabras clave: Calculadora gráfica, modelización matemática, funciones

Introducción

El foco de interés de la presente investigación está centrado en las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo de habilidades y destrezas para aplicar los conocimientos matemáticos, específicamente lo relacionado con las funciones reales. Los estudiantes, participantes en el estudio, eran cursantes de la asignatura introducción a la matemática, en el primer semestre del ciclo básico de las carreras de Administración Comercial, Contaduría Publica y Economía, en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo Campus La Morita, Estado Aragua, Venezuela. Se diseñó y llevó a cabo una investigación de campo centrada en analizar las producciones escritas de los estudiantes cuando estos resuelven problemas de aplicación de funciones haciendo uso de la CG. Los datos se obtuvieron a través de la aplicación de un curso-taller de dieciocho horas en los cuales los estudiantes resolvieron problemas previamente establecidos sobre la aplicación de funciones en el ámbito de las ciencias económicas y sociales; además, estos estudiantes no habían aprobado la asignatura en periodos anteriores.

El Problema

En el ámbito de las Ciencias Económicas y Sociales se enseñan algunas nociones de cálculo, tales como: límites, derivadas e integrales, con un marcado énfasis en las aplicaciones sobre esta área. Aprender estos temas requiere conocer acerca de funciones reales; es por ello que los estudiantes deben alcanzar competencias relacionadas con el concepto de función (variables dependientes e independientes, dominio y rango, regla de formación, etc.); competencias relativas a los diversos sistemas de representación de funciones: expresiones algebraicas, tablas de valores numéricos y gráficas; además, competencias útiles para el estudio del comportamiento de una función tales como: crecimiento, decrecimiento, simetría, restricción de dominio, etc. Y finalmente las competencias de aplicación de funciones al mundo real; entre otras.

Sin embargo los estudiantes muestran dificultades; por ejemplo, en cuanto a la noción de variable, como "una letra que representa un número" o "el valor desconocido en una ecuación" (Fey y Steen, 2003, p. 77). Esto evidencia debilidades en la determinación de una variable dependiente e independiente, cuando se estudian funciones en contextos aplicados. Respecto a las nociones de crecimiento y de valores óptimos de una función, "algunos alumnos tienden a definir los intervalos de crecimiento en el eje *y*" (Alson, 1996, p. 53), dificultando así la comprensión de estas nociones matemáticas. Además, en el tratamiento de las representaciones, los estudiantes y las personas en general "leen con dificultad las curvas e interpretan deficientemente las gráficas y las propiedades comunes que de ellas se derivan" (Lacasta y Pascual, 1998, p. 12).

Estas situaciones hacen pensar en la necesidad de diseñar estrategias adecuadas para enseñar el tema de funciones, con el propósito de ofrecer una enseñanza que contemple no solo la "presentación de los conceptos y resultados con las correspondientes técnicas de calculo, sino también un entrenamiento de la intuición y el desarrollo del sentido crítico, que permita al alumno descubrir propiedades y características de los objetos de estudio a partir del análisis de diversas situaciones" (García, Martínez y Miñano, 1995, p.20). Por este motivo se incorporan la calculadora gráfica y la modelización matemática, ya que permiten al estudiante construir, analizar y conjeturar propiedades matemáticas en forma interactiva y además visualizar situaciones referidas a los objetos matemáticos estudiados y sus relaciones con el contexto que le sirve de referencia a la situación problemática, lo cual favorece que los estudiantes vean utilidades de la matemática para la comprensión del mundo real; con posibles repercusiones en un cambio de actitud favorable hacia las matemáticas.

En este sentido se plantean las siguientes interrogantes de investigación: ¿Cuáles son las competencias matemáticas que muestran los estudiantes cuando usan CG en el aprendizaje de funciones reales? ¿Cuáles son los niveles de aplicación en el proceso de modelización matemática que muestran los estudiantes cuando resuelven problemas de funciones reales con calculadora gráfica? En consecuencia, se persiguieron los siguientes objetivos:

1. Diseñar e implementar un programa para la enseñanza y aprendizaje de funciones reales que integre el uso de la CG y la modelización matemática.

2. Analizar las competencias matemáticas mostradas por los estudiantes cuando estudian funciones reales con CG.

3. Analizar los niveles de aplicación del proceso de modelización matemática por parte de los estudiantes en el aprendizaje de funciones reales con CG.

Marco teórico

La potencialidad de la CG y la modelización en la enseñanza de las matemáticas ha sido un tema de interés en las últimas décadas. Los trabajos de Ortiz (2002), Planchart (2001), Fey y Steen (2003), Cross y Moscardini (1985), Blum y Niss (1991), Stewart y Pountney (1995), Ríos (1995), entre otros, proponen que el proceso de modelización matemática debe llevarse en cuatro fases abiertas ejecutadas como un proceso cíclico:

Fase 1: Análisis: El estudiante en esta etapa analiza los elementos involucrados en el problema, define patrones de comportamiento, visualiza las hipótesis planteadas, identifica conceptos inherentes al problema, representa el problema en forma diferente, relaciona el problema con problemas ya conocidos resueltos anteriormente.

Fase 2: Traducción: El estudiante es capaz de llevar un problema de un contexto no matemático al contexto matemático y viceversa. Por lo general, en esta etapa el estudiante logra hallar la función real que funge como modelo matemático en el problema planteado; para esto es necesario que el estudiante tenga conocimientos previos sobre funciones.

Fase 3: Resolución: En este nivel el estudiante hace uso de aquellos conceptos matemáticos conocidos para resolver el modelo matemático obtenido en el nivel anterior; por ejemplo: utiliza la función lineal en la resolución de cuestiones del contexto, modela el equilibrio entre funciones demanda y oferta haciendo uso de la intersección de gráficas de funciones, utiliza la función cuadrática en la resolución de cuestiones del contexto, integra la calculadora gráfica en la resolución de problemas contextualizados, utiliza diferentes representaciones, usa el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones, ajusta el modelo matemático, combina e integra con otros modelos.

Fase 4: Devolución: En este nivel el estudiante reflexiona sobre los argumentos matemáticos usados para interpretar las soluciones encontradas en la resolución del problema y constata que efectivamente la solución encontrada es confiable.

Metodología

Se parte de una investigación de campo de carácter evaluativo. Para obtener la información se llevó a cabo un curso-taller con diecisiete estudiantes repitientes de la asignatura introducción a la matemática. Los instrumentos fueron los siguientes:

1) Hoja de Notas Diarias: para conocer la opinión de los estudiantes día a día sobre los componentes fundamentales del programa.
2) Cuaderno de Notas: los cuales mostraban las producciones escritas de los estudiantes
3) Hoja de evaluación final: para conocer la opinión final de los estudiantes sobre el programa.
4) Guía de observación participante: fue utilizado por docentes investigadores del área que asistieron a la implementación del taller.

Se analizaron las producciones de los estudiantes cuando participaron en un programa para el estudio de funciones reales con CG.

Resultados

A continuación se presenta el desarrollo de algunas actividades propuestas a los estudiantes en el taller, las cuales fueron obtenidas del cuaderno de notas:

<u>Actividad 12</u>: Grafique la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $-2x+y+3=0$, $x+y=-3$, $-x+y+3=0$. Además, pasa por el punto mínimo de la parábola $y=x^2-4x+3$. Determine la ecuación general de dicha recta. Nótese que el problema sugiere determinar la intersección entre las rectas, calcular el mínimo de la parábola, y requiere determinar la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos, y finalmente graficarla. Es una actividad que combina muy bien el uso de la CG y el lápiz y papel. Por ejemplo, uno de los estudiantes resolvió la actividad como sigue:

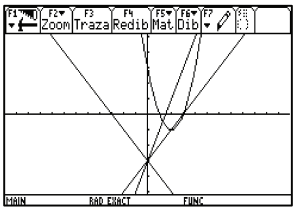

Figura 1. Representación Figura gráfica de las 4 funciones en una sola pantalla

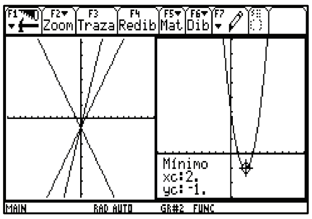

Figura 2. Representación Figura gráfica de las 4 funciones en pantalla dividida

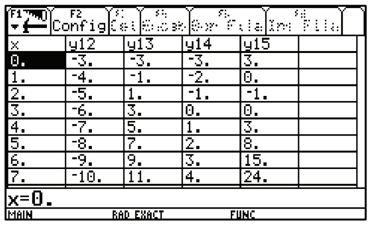

Figura 3. Representación tabular de las 4 funciones en una sola pantalla

Observando las figuras 1, 2 y 3, se puede destacar que el estudiante grafica las cuatro funciones en una misma pantalla para visualizar la situación completa; luego trabaja en pantallas divididas para calcular el mínimo de la parábola y a través de la representación tabular determina el punto de intersección entre las tres rectas. Nótese que la recta solución fue suministrada como un dato y que se constata gráficamente; sin embargo, el alumno no la identificó así.

Posteriormente, el mismo alumno resuelve con lápiz y papel, como se muestra en la figura 4:

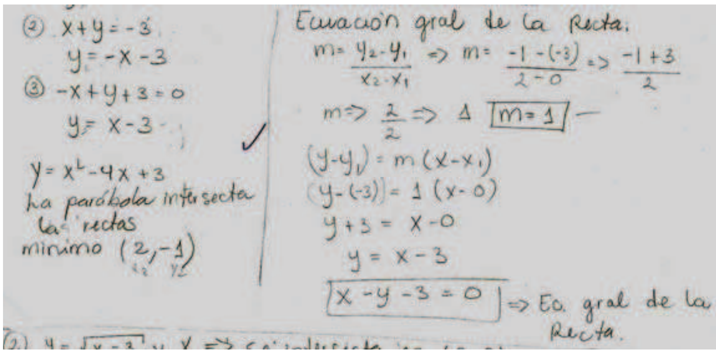

Figura 4. Solución escrita de un estudiante para la actividad 12

Finalmente, de acuerdo con lo mostrado por el alumno se ha evidenciado que el mismo ha sido capaz de desarrollar competencias como pensar y razonar, representar, usar herramientas, hacer cálculos, resolver problemas y comunicar en forma escrita; en virtud de que ha entendido y utilizado la interrelación entre la rectas y una parábola para hallar la ecuación de la recta buscada; ha trabajado con operaciones entre números reales; ha llevado a cabo un proceso en general de resolución de problemas y ha usado la CG como herramienta para desarrollar dicho problema.

Actividad 21: La Fosforera Maracay C.A. vende sus paquetes de fósforos a 2 BF cada paquete. Si x (en miles) es el número de paquetes producidos por semana , entonces el administrador sabe (según el mercado) que los costos de producción están dados, en BF, por: $y = 1000 + 1300x + 100x^2$. Determine el nivel de producción en que la compañía no obtiene ni utilidades ni pérdidas. ¿Hasta cuántas cajas semanales puede producir de manera que obtenga siempre ganancias? Explique.

Para resolver esta actividad los estudiantes necesitaron determinar la función ingresos $f(x) = 2000x$; para luego, con la función costos $g(x) = 1000 + 1300x + 100x^2$, buscar la intersección entre ambas y así encontrar el nivel de producción de paquetes de fósforos donde no se producen ni ganancias ni pérdidas, es decir, el punto de equilibrio.

Véase el desarrollo de la actividad de algunos estudiantes:

Se muestra a continuación la solución que dejó por escrito un estudiante y la imagen de la CG donde desarrolló en forma analítica la resolución del problema, destacándose que el estudiante usó correctamente las escalas en los ejes de coordenadas cartesianas e interpretó y argumentó basado en el análisis gráfico.

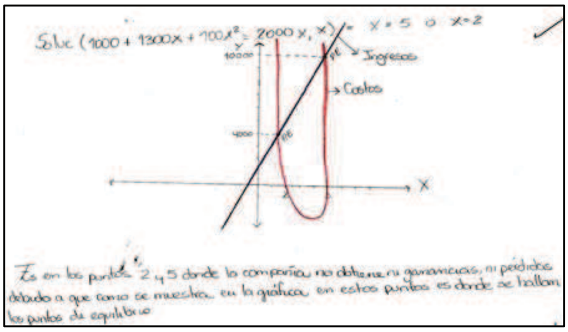

Figura 5. Uso de la representación gráfica analítica de la situación problemática.

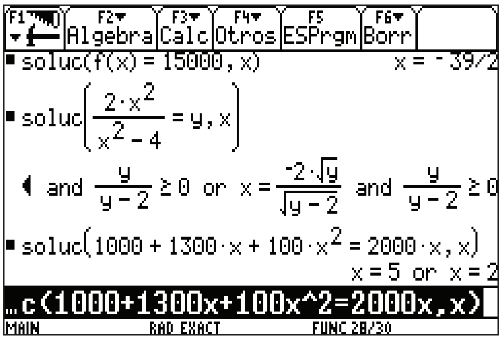

Figura 6. Solución del modelo matemático con la CG

Por ejemplo, en el desarrollo del problema de otro estudiante pueden señalarse las fases del proceso de modelización matemática:

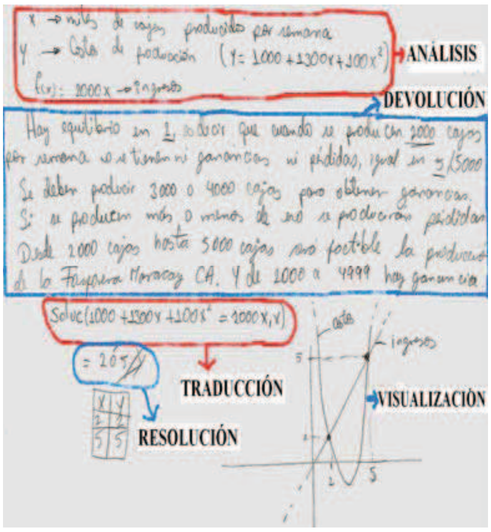

Figura 7. Proceso de modelización de un estudiante en la resolución de la actividad 21

Se evidencia que el estudiante ha sido capaz de llevar a cabo un proceso de modelización matemática, pasando por las distintas fases pero interrelacionadas entre sí. Se observa además, que existen algunos problemas para argumentar la respuesta. Esta debilidad fue detectada en el grupo en general. El estudiante encontró la intersección entre las funciones de manera analítica con la CG a diferencia de otros estudiantes que lo hicieron de manera gráfica o tabular. Por último, el estudiante mostró competencias para determinar variable dependiente e independiente, usar la proporcionalidad “x en miles”, encontrar el modelo matemático, asociar gráficamente los modelos costos e ingresos y argumentar sus respuestas.

Conclusiones

1. En cuanto a funciones reales: Se ha hecho énfasis en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas. En este sentido los sujetos participantes fueron capaces de comprender y utilizar los conceptos matemáticos relacionados con funciones, crear y expresar argumentos matemáticos, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de funciones, expresarse sobre temas de contenido matemático de forma oral, expresar la realidad a través de funciones reales, resolver diferentes tipos de problemas matemáticos, manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos, además usar herramientas como la CG.

2. En cuanto a la modelización matemática: Se ha hecho énfasis en aproximar a los estudiantes de las ciencias económicas y sociales a su futura realidad como profesionales. Los sujetos participantes estudiaron situaciones problemáticas en un contexto no matemático**,** estructurar matemáticamente situaciones susceptibles de ser modelizadas**,** usar aspectos de las funciones reales para entender y resolver un modelo matemático**,** dar respuesta a una situación del contexto, relacionada con funciones reales**,** dirigir y controlar su proceso de modelización

3. En cuanto al uso de la calculadora gráfica: se evidenció que los sujetos utilizaron la CG como un medio para aprender funciones, mas no como un fin; además los estudiantes bajo esta modalidad de aprendizaje suelen ser mas independientes en sus razonamientos que en clases tradicionales, por lo que la mediación e intervención del docente solo se ha limitado a recordar el uso de algunos comandos de la CG (sobre todo en las primeras tres sesiones del taller) y a ayudar en los razonamientos iniciales de un problema planteado. Los estudiantes mostraron capacidades para realizar operaciones básicas con números reales, resolver ecuaciones de grado mayor que dos y ecuaciones racionales con soluciones en los números reales y en los números complejos, pasar de un sistema de representación de funciones a otro, calcular el máximo y mínimo, analizar gráficas, encontrar puntos de intersección entre gráficas. Sin embargo, las opiniones de los estudiantes alertaron que no se puede dejar de trabajar con lápiz y papel ciertas operaciones;

además, que la calculadora por sí misma no resuelve los problemas matemáticos de funciones en contextos reales sino que ayuda en cálculos elementales para resolver los problemas.

Referencias bibliográficas

Alson, P. (1996). *Métodos de Graficación*. (Tercera Edición). Caracas: Ediciones ERRO.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Cross, M. y Moscardini, A. (1985). *Learning the Art of Mathematical Modelling*. Chichester, UK: Ellis Horwood Limited

Fey, J. y Steen, L. (2003). Cantidad. En L. Steen, (Comp.), *La Enseñanza agradable de las Matemáticas.* (pp. 67-101). México: Limusa.

García, A. Martínez, A. y Miñano, R. (1995). *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Lacasta, E. y Pascual, J. (1998). *Las Funciones en los Gráficos Cartesianos*. Madrid: Síntesis.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del Álgebra. Estudio Evaluativo de un Programa de Formación*. (Tesis Doctoral). Granada, España: Universidad de Granada.

Planchart, O. (2001) *La Visualización y la Modelación en la Adquisición del Concepto de Función*. (Tesis Doctoral). México: Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Rico, L. (2005a). La competencia matemática en PISA*.* En Fundación Santillana (Ed.), *La Enseñanza de las matemáticas y el Informe PISA* (pp. 21-40). Madrid: Santillana

Ríos, S. (1995). *Modelización*. Madrid: Alianza

Stewart, M. y Pountney, D. (1995). *Learning Modelling with Derive*. Londres: Prentice Hall