

## LA PROBABILIDAD Y LA MÚSICA A TRAVÉS DEL DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA

Elena Fabiola Ruiz Ledesma, Ángel Salvador Montiel Sánchez  
Escuela Superior de Cómputo. Instituto Politécnico Nacional  
efruiz@ipn.mx, chavamontiel@hotmail.com

México

Campo de investigación: Pensamiento relacionado con  
probabilidad, estadística

Nivel: Superior

**Resumen.** *El presente trabajo tiene la finalidad de relacionar a la probabilidad con la música, a través del diseño de una secuencia didáctica para hacer que el alumno sea reflexivo, desarrolle habilidades que son señaladas en el modelo educativo del Instituto Politécnico Nacional (2004), como la observación, percepción, operatorias, entre otras. Para la construcción de la unidad didáctica nos basamos en los estudios realizados por Diennes, (1970). Se trabajó la teoría de la probabilidad a través de lo que denominamos como El Juego de dados Musical de Mozart (1777). Se presentan resultados preliminares después de haberla puesto en práctica con estudiantes de nivel superior de la carrera de Ingeniería en Sistemas. Fueron 35 estudiantes de un grupo de tercer semestre que llevaban la materia de Probabilidad en una Escuela Superior de la Ciudad de México.*

**Palabras clave.** Didáctica, probabilidad, juego de dados de Mozart

### Introducción

El modelo educativo del Instituto Politécnico nacional, (IPN, 2004), busca en el docente lograr un aprendizaje significativo, ello implica realizar acciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Consideramos que lo fundamental es que el estudiante se encuentre motivado cuando se aborden los distintos temas de matemática. Una de las acciones a la que hacemos referencia en el presente trabajo es la de aplicar la teoría en nuestra práctica cotidiana. Recordemos que el alumno puede construir su propio conocimiento cuando más sentidos participan en su aprendizaje, cuando más activo está y existe un ambiente social oportuno, además de recuperar su experiencia personal y académica. Una opción para lograr tal propósito, en el caso particular de las matemáticas, específicamente en Teoría de la Probabilidad, puede ser la aplicación de los bloques lógicos de (Diennes, 1970), con orientación hacia el diseño de una unidad o secuencia didáctica para el caso particular arriba mencionado.

## Aspectos Teóricos

### En relación al aspecto matemático

Debido a que en el presente artículo se trabajan dos conceptos, uno es el de espacio muestral y otro el de distribución de probabilidad.

Walpole y Myers (2006), señalan que los elementos del espacio muestral  $S$  de un experimento aleatorio  $E$  pueden ser de distintos géneros. Sin embargo, para establecer un modelo matemático es necesario recurrir al sistema de los números reales y utilizar algunas características numéricas asociadas a los elementos del espacio muestral  $S$ .

Respecto al espacio muestral que se trabaja en este artículo es el obtenido al lanzar dos dados y determinar su suma, de esta forma el espacio muestral está formado por los siguientes números.

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

En el juego de dados musical de Mozart, se asocia un compás a cada suma obtenida al lanzar dos dados. Hay 8 números del espacio muestral que se asocian a los primeros 8 compases y 8 números del mismo espacio muestral que se asocian a los 8 compases restantes. (De acuerdo a dos tablas que serán descritas más adelante).

En relación al empleo de una distribución de probabilidad, ésta consiste en relacionar un valor con la probabilidad de obtener dicho valor. En el caso de los valores o números que corresponden a la suma de dos dados, las probabilidades asociadas a cada uno de ellos se muestra a continuación.

La nomenclatura empleada es:  $f(x) = P(X = x)$ . En donde X es la probabilidad asignada al valor de x.

De esta forma

$$\begin{aligned} f(2) &= P\left(\frac{1}{36} = 2\right), f(3) = P\left(\frac{2}{36} = 3\right), f(4) = P\left(\frac{3}{36} = 4\right), f(5) = P\left(\frac{4}{36} = 5\right), \\ f(6) &= P\left(\frac{5}{36} = 6\right), f(7) = P\left(\frac{6}{36} = 7\right), f(8) = P\left(\frac{5}{36} = 8\right), f(9) = P\left(\frac{4}{36} = 9\right), \\ f(10) &= P\left(\frac{3}{36} = 10\right), f(11) = P\left(\frac{2}{36} = 11\right), f(12) = P\left(\frac{1}{36} = 12\right) \end{aligned}$$

### El aspecto didáctico de la matemática

Hacemos nuestro soporte didáctico de la matemática en (Poincaré, 1953), debido a que nos hace llegar a la reflexión sobre la forma de llevar una sesión en matemáticas, cuando aborda la relación entre las matemáticas, las definiciones y la educación.

La mayoría de las personas presentan dificultad para aprender definiciones matemáticas, porque se tienen problemas con el entendimiento de una definición. Para Poincaré (1953), entender una definición consiste en reconocer que el significado de todos los términos empleados es coherente y no tiene contradicciones, por ello, para lograr una comprensión de una definición, un entendimiento de la misma, se requiere de la intervención del instructor, (actualmente el docente), quien debe tener la capacidad de conectar las percepciones del estudiante con su esquema mental a formarse.

Una buena forma de lograrlo es a través de la intuición, de guiar a los estudiantes en las sesiones de clase para que tengan suposiciones que las validen o que las refuten, a través del manejo de ejemplos bien intencionados, pero sobre todo motivando la curiosidad y la sorpresa, situaciones fundamentales para generar un pensamiento inductivo. De esta forma el alumno llegará a una generalización.

Para Poincaré, el propósito más importante de la educación matemática es el desarrollo de ciertas habilidades de la mente, y entre éstas, la intuición es fundamental. Debe haber una estricta conciencia en los docentes de que el mundo matemático tiene que estar fuertemente vinculado con el mundo real, aun si las matemáticas puras no lo estén, se debe intentar en todos los aspectos de aula de evitar separar el símbolo de la realidad.

**Metodología:** Para la construcción de la unidad o secuencia didáctica nos basamos en los estudios realizados por (Diennes, 1970).

Ahora ofrecemos los puntos básicos para una secuencia o unidad (utilizar siempre lo mismo) didáctica, luego del diagnóstico y observación del grupo, esto sin dejar de considerar las condiciones del grupo, los avances del periodo escolar y la cantidad de estudiantes, entre otros factores. Veamos en qué consiste:

- 1) Iniciar con una actividad lúdica, por ejemplo, que permita la participación del sentido del tacto. Recordemos que no por trabajar con estudiantes ya adultos, está prohibido el término “juego”, puesto que toda persona está, por costumbre social actual, predispuesta al juego como reto; asimismo, el juego permite aplicar diversos tipos de reglas conforme a un problema que se resuelve con base en un modelo. Este es el punto que más trabajo cuesta planificar.
- 2) Después de motivar el reto a través de un juego, se recomienda presentar un problema que, precisamente, surja del juego y el alumno deba resolver con cualquier estrategia, que haya en otro momento empleado o que surja de su creatividad. El estudiante puede trabajar de forma individual o por parejas, o en equipos, propiciando la habilidad de comunicación y redescubrimiento en el alumno, ya que se le solicitará mostrar la forma en que resolvió o resolvieron el problema para que se dé una retroalimentación en el grupo.
- 3) Un breve espacio dedicado a formular preguntas informales surgidas del problema y que busquen llegar al contenido estudiado, además de provocar respuestas informales para propiciar el “redescubrimiento” de un concepto, modelo, teoría, etcétera, pero dicho con sus propias palabras, conforme a su propio contexto, motivando esa habilidad comunicativa en los alumnos. Es recomendable hacer las preguntas en forma ordenada, alumno por alumno y cuando alguien no responda, simplemente pasar a otro estudiante. (Esto realmente es difícil pero funciona, no al principio, sino cuando el grupo se acostumbra a trabajar de esta forma). Después de anotar las respuestas informales de los alumnos, damos paso a la formalización, es decir, al dictado de los conceptos, modelos o teorías que abordamos informalmente, con respuestas propias de los alumnos. Nótese que si es necesario dictar, exponer, clarificar y dirigir con base en nuestra autoridad de docentes, el conocimiento, pero sólo es una pequeña parte de la secuencia didáctica. Aquí, los escritos deben llevar al estudiante a la reflexión interna, al razonamiento deductivo y apropiación de un lenguaje científico.
- 4) Realización de ejercicios, con pluma y papel, o con la computadora, también son necesarios, no los podemos dejar de lado, pero sólo son parte de nuestra secuencia, ya que propician el desarrollo de habilidades operatorias necesarias en todo proceso de aprendizaje en matemáticas.

- 5) Finalmente, cerrar con más problemas, para que el alumno enfoque todo el desarrollo de habilidades, conocimientos y actitudes hacia la construcción de una solución. Estos son los elementos de una sugerencia flexible, cuyo orden puede cambiar y no constituye una panacea ni la última palabra. Es una propuesta basada en una teoría, en la experiencia y en el enorme gusto por enseñar.

### Propuesta didáctica: El Juego de dados Musical de Mozart

Mozart a sus 21 años utilizó el lanzamiento de dados para generar una composición de 16 compases que tituló “Juego de Dados musical para escribir vales con ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición”.

Hay dos tablas, (ver figuras 1 y 2), una se utiliza para obtener los primeros ocho compases de la composición musical y la otra para construir los restantes ocho compases. Cada tabla consiste de ocho columnas y once filas. Las columnas corresponden a los compases y las filas corresponden al resultado de la suma del lanzamiento de los dados

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Fig. 2 Tabla generadora de los primeros 8 compases en una composición musical basada en el tiro de dos dados . Tomada de (Mozart, 1777).

2. Walzerteil

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Fig. 3 Tabla generadora de los segundos 8 compases, tomada de (Mozart,1777).

Mozart diseñó los compases por columna siguiendo un sencillo patrón armónico de acuerdo a su época. En ella utiliza una escala o colección de sonidos denominada escala de Do mayor, donde los sonidos o notas musicales que más usa son el do, el fa y el sol, junto con los acordes que se construyen sobre ellas, teniendo una composición armonizada que se genera al ejecutar los compases hechos de acuerdo a las reglas anteriores y que se puede escuchar inmediatamente.

### Experiencia realizada con los alumnos

#### *Sujetos*

Se trabajó con un grupo de 35 alumnos que cursaban el tercer semestre de la ingeniería en sistemas de computación, debido a que en el tercer semestre está ubicada la asignatura de Probabilidad. Como antecedente, ellos habían visto el tema de espacio muestral y el ejemplo del lanzamiento de uno y dos dados. Este grupo de estudiantes pertenece a una Escuela de Educación superior de la Ciudad de México.

De acuerdo a lo sugerido por (Poincaré, 1953) y Diennes, (1970), se inició la sesión con el lanzamiento de un par de dados y se les preguntó a los estudiantes cuál es la probabilidad más alta que se puede obtener al sumar dos de los valores obtenidos en los dados. Después de hacer varios lanzamientos y de entablar una discusión al respecto se llegó a que cuando la suma es 7 se obtiene la mayor probabilidad. Se determinaron las probabilidades de cada valor del espacio muestral de lanzar un par de dados y determinar su suma. Se continuó con una segunda pregunta que fue sobre alguna aplicación ya sea en matemáticas o en otra área del conocimiento, que tiene el empleo del espacio muestral mencionado. Algunos alumnos comentaron que podría ser en otros temas de la misma probabilidad o en algún juego cuyas reglas fueran las señaladas por la obtención de las probabilidades de los valores del espacio muestral.

Se formularon otras preguntas sobre la relación que podría existir entre la música y las matemáticas. Al respecto, algunos estudiantes, comentaron sobre lo que habían visto en la película en donde salía el Pato Donald y mostraba como las matemáticas están presentes en todo.

Posteriormente se les dijo que existía un juego llamado el juego de dados musical de Mozart y se les explicó en qué consistía:

Se emplearon las dos tablas descritas con anterioridad, la tabla 1 contienen los primeros 8 compases que empleó Mozart en sus composiciones musicales y la tabla 2 contiene los 8 restantes compases. Para obtener cada uno de los primeros 8 compases (numerados del I al VIII) se pidió al grupo lanzar un par de dados y anotar la suma de puntos que muestran sus caras obteniéndose 8 parejas de números o sumas, al lado del compás correspondiente, que en este caso lo denotamos como  $n_1, n_2$ , etc. ( $n_1, I$ ), ( $n_2, II$ ), ( $n_3, III$ ), ( $n_4, IV$ ), ( $n_5, V$ ), ( $n_6, VI$ ), ( $n_7, VII$ ) y ( $n_8, VIII$ ). Es decir, cada suma se asocia a un número de la tabla 1 (ver tabla 1) , generándose ocho compases: N1, N2, N3, N4, N5, N6, N7, y N8.

Los 8 compases siguientes numerados de la segunda composición (numerados del I al VIII), se obtienen al lanzar un par de dados y anotar la suma de puntos que muestran sus caras obteniéndose otras 8 parejas de números: ( $m_1, I$ ), ( $m_2, II$ ), ( $m_3, III$ ), ( $m_4, IV$ ), ( $m_5, V$ ), ( $m_6, VI$ ), ( $m_7, VII$ ) y ( $m_8, VIII$ ). Cada número se asocia con la tabla 2 (ver tabla 2) es la tabla 2 generándose los siguientes ocho compases: M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, y M8. Si la composición musical requiere de más de 16 compases se repite el experimento cuantas veces sea necesario.

Al trabajarlo con el grupo se obtuvo lo siguiente:

Se pidió que lanzaran un par de dados 8 veces y de acuerdo a la suma obtenida es que se asociaron a los primeros 8 compases. Algunos ejemplos son los que se muestran enseguida. Primero salió un dos en un dado y un tres en el otro, sus suma nos da 5 por lo que lo asociamos con el número 40 de la tabla 1, y se anotó en el pizarrón (40, I), después la suma fue 7 anotándose (157, II), las sumas de los siguientes seis lanzamientos fueron; 7, 7, 9, 7 y 9. El 7 se asoció con el número 27 de la tabla 1, quedando (27, III); el siguiente 7 se asoció con el número 45 de la tabla 1, quedando (45, IV); el 9 se asoció con el 140 de la tabla 1, cuyo par quedó como (140, V); el 7 se asoció con el 68 de la tabla, por lo que la pareja obtenida fue (68, VI), la siguiente suma obtenida fue 7 el cuál se asoció con el 118 de la tabla 1, obteniéndose como pareja (118, VII) y la última suma obtenida fue 9, el cual se asoció con el 94, quedando (94, VIII).

Después de anotar los 8 pares o las 8 parejas de números se procedió a tocar la melodía utilizando el simulador que se llevó. Cabe señalar que este simulador de música ya está adaptado para ser tocado de acuerdo a las posibles parejas que se obtienen con base en las dos tablas descritas (tabla 1 y tabla 2).

Pasó al frente un estudiante y tocó los 8 compases obtenidos, la melodía que se produjo fue parte de la de un vals de Mozart.

Por otra parte, cabe señalar que los alumnos concluyeron lo que Mozart había señalado, respecto a que su algoritmo hace que los compases del resultado 7, de las dos tablas, sean los que más aparecen, debido a que la suma 7 tiene mayor probabilidad de caer, siguiendo los resultados de las sumas 6 y 8, luego las sumas 5 y 9, después los resultados 4 y 10 3 y 11 y finalmente la menor probabilidad de caer como suma es 2 y 12. En ese sentido los compases del resultado 5 al resultado 9 de las dos tablas genera una tendencia central o una distribución normal pues 10 resultados de 16 caen entre dichos números (63%). Los resultados 2, 3, 4, 10, 11 y 12 a pesar de ser el 55% de las posibilidades sólo caen 6 resultados de 16 (17%), lo que confirma la veracidad del modelo de la función de densidad de probabilidad.

### Resultados preliminares

Después de aplicar el juego de dados Musical de Mozart a un grupo de nivel superior, nos percatamos del gran interés y curiosidad mostrada por los alumnos, lo que coincide por lo dicho por Poincaré (1953), al relacionar las definiciones con la educación y Diennes (1970), al iniciar la clase con un juego que conduzca a un problema. Hubo reflexión en torno a la parte de la probabilidad. Debido a las preguntas formuladas por los estudiantes. Observamos que las habilidades básicas en matemáticas (la de descubrimiento y la operatoria), afloraron en el estudiante. El pensamiento inductivo fue desarrollado como una capacidad matemática, lo que se pudo observar cuando recordaron la utilidad que tienen las matemáticas en otras áreas del conocimiento o en el juego como lo expresaron ellos al mencionar la película de Donald en varios de sus episodios.

El estudiante pudo llevar a cabo una aplicación del lanzamiento de dados visto en clase Además comprobó que la probabilidad está presente en varios campos, en este caso en la música.



### Conclusiones

Es muy importante el dominio del contenido matemático, para evitar caer en una actividad puramente musical, sin embargo se requiere mostrar al estudiante las notas musicales lo que implica que tenga una noción básica de música.

Consideramos de gran interés para el estudiante el que se dé una interdisciplinariedad para que pueda establecer conexión entre las matemáticas y otras áreas. En este caso fue la música. También se estableció una relación con la historia al mostrar al estudiante que Mozart trabajó con las matemáticas ya desde el siglo XVIII.

Por otra parte la situación didáctica propició interés por parte de los estudiantes y la curiosidad por seguir investigando en otras áreas del conocimiento.

Como equipo de trabajo seguiremos aplicando esta propuesta en nuestros grupos y buscando otras alternativas que permitan establecer secuencias didácticas que contribuyan a que el estudiante logre relacionar y dar sentido a su aprendizaje.

### Referencias bibliográficas

- Diennes, Z. P. (1970). *Las seis etapas del aprendizaje en matemáticas*. Madrid: Teide.
- Meyer, P. (1970). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. México: Fondo Educativo Interamericano. S. A.
- Mozart, W. A. (1777). *El Juego de dados Musical*. Berlin: Schott.
- Poincaré, H. (1953). *Science et Méthode*. New York: Dover.
- Walpole, R. E., Myers, R. H. y Myers, S. L. (2006). *Probabilidad y estadística para Ingenieros*. México: Pearson Prentice Hall.
- IPN (2004). *Un Nuevo Modelo Educativo para el IPN*. México: IPN.