

COMPRENSIÓN DEL ENFOQUE FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD EN PRIMER GRADO DE SECUNDARIA: CONDICIONES FINALES

Saúl Elizarrarás Baena; Ana María Ojeda Salazar
Escuela Normal Superior de México, México; Cinvestav del IPN México
elizarrarasaul@yahoo.com.mx; amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con Nivel: Medio
probabilidad, estadística

Resumen. Con la finalidad de identificar variaciones en el desempeño de los estudiantes, el desarrollo de esta investigación consistió en aplicar un mismo cuestionario, antes y después de la implementación de estrategias de enseñanza. Los resultados obtenidos con la primera aplicación del cuestionario, evidenciaron el desconocimiento de ideas fundamentales; mientras que con la aplicación final, se mostraron mejorías para la adquisición y comprensión de algunas ideas fundamentales; por ejemplo, para el problema 1: variable aleatoria, muestra y ley de los grandes números y para el problema 8: medida de probabilidad, espacio muestra y combinatoria. De este modo, la enseñanza mediada por un libro de texto (Arriaga y Benítez y Cortes; 2008) logró desarrollar nociones de probabilidad en alumnos de nivel medio en condiciones de aula alterna —espacio para la conjugación de investigación y docencia—; a pesar de que en el libro de texto, por ejemplo, se presenta indistintamente tanto al enfoque clásico como al frecuencial de la probabilidad.

Palabras clave: Enseñanza, probabilidad, enfoque frecuencial

Introducción

Con este estudio se pretendió indagar sobre los posibles respuestas acerca de las dificultades de comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975), implicadas en el enfoque frecuencial de la probabilidad, en estudiantes de primer grado de secundaria pública ubicada en una Delegación Política del Distrito Federal (México) y, paralelamente, las dificultades en su enseñanza, de acuerdo con el libro de texto utilizado como medio para implementar la estrategia respectiva (Arriaga, Benítez y Cortes; 2008). Respecto a este último punto, de modo específico se pretendió caracterizar los elementos que se requieren para la enseñanza de estocásticos durante la formación docente.

Elementos teóricos

El estudio se fundamenta en tres aspectos: epistemológico (Heitele, 1975), cognitivo (Fischbein, 1975; Frawley, 1999) y social (Steinbring, 2005). El orden epistemológico consiste en identificar lo que es realmente fundamental para la enseñanza de estocásticos.

Los dos últimos atañen al desarrollo de la idea de azar y su estrecha relación con la noción de frecuencia relativa, así como al papel de los recursos semióticos para su prefiguración.

Epistemológico

Heitele (1975) señala que la enseñanza de estocásticos se debe iniciar tan pronto como sea posible, mediante el desarrollo de conexiones significantes de la experiencia del alumno con la realidad. Plantea una lista de diez ideas fundamentales que proporcionan lo fundamental en la educación en estocásticos: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de adición, regla del producto e independencia, modelo de urna y simulación, equidistribución y simetría, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. Su carácter de fundamentales radica en que proporciona al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que se diferencian en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración, pero no en su estructura.

Cognitivo

Frawley (1999) caracteriza tres tipos de subjetividad: el procesamiento no consciente, la conciencia y la metaciencia; lo anterior se debe a que considera al ser humano como máquina y como persona, pues la parte interna (mente computacional) y la externa (mente social) confluyen simultáneamente. Por su parte, Fischbein (1975) enfatiza que la adquisición temprana de intuiciones equivocadas sobre estocásticos se debe prevenir con la enseñanza, pues a falta de ésta esas intuiciones se tornan de más en más difíciles de erradicar y obstaculizan el pensamiento analítico y reflexivo. En este sentido, Gigerenzer y Hoffrage (1995) plantean que el formato de frecuencias activa naturalmente el razonamiento probabilístico de los sujetos.

Social

Según Steinbring (2005), la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se caracterizan por una gran variedad de construcciones e interpretaciones matemáticas, concibiendo el aprendizaje de los estudiantes como un objetivo a largo plazo.

Elementos de método y organización

En este estudio de corte cualitativo (Eisner, 1998), participaron una docente en formación y un grupo de 35 estudiantes (11-13 años, aproximadamente) de primer grado de secundaria pública; la investigación se llevó a cabo en tres fases. En la *primera y tercera fases* de este estudio, se identificaron condiciones iniciales y finales para la enseñanza, mediante la aplicación de un mismo cuestionario de opción múltiple, impreso en papel, para contestar individualmente con pluma. En la *segunda etapa* principalmente y, previa examinación (por parte de los investigadores) del libro de texto utilizado por la docente en formación (Arriaga, Benítez y Cortés; 2008), se implementaron algunas actividades propuestas para desarrollar nociones de probabilidad.

Criterios de análisis

De los elementos teóricos devinieron criterios de análisis, tanto para el libro de texto como para los datos recogidos. Se consideraron: *ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos para presentar la información, términos utilizados, situación y contextos planteados.*

Instrumentos y participantes

La investigación se dirigió al *libro de texto* utilizado como medio para desarrollar una estrategia de enseñanza —el cual se relaciona con el Plan y Programas de Estudio de Secundaria para los cursos de Matemáticas (SEP, 2006)—; posteriormente, correspondió al *aula* y al desempeño de los *alumnos*.

Libro de texto

Se analizó un libro de texto propuesto para el curso de Matemáticas 1 (Arriaga, Benítez y Cortés; 2008). Su presentación concuerda con los apartados que se sugieren en el Plan y Programas de Estudio (SEP, 2006).

Aula

La docente en formación implementó, aproximadamente, veinte sesiones de enseñanza (cada una de 50 minutos); cuyas temáticas tratadas, respectivamente, fueron: técnicas de conteo, frecuencias absolutas y relativas, trazado de gráficas, fenómenos aleatorios y deterministas y eventos equiprobables.

Sólo dos sesiones fueron videograbadas y transcritas para su análisis, las cuales correspondieron al tratamiento del enfoque frecuencial; de forma predominante, en bitácora escrita se anotaron datos relevantes fuera de cinta. La *estrategia de enseñanza* consistió en implementar, principalmente, actividades propuestas en los apartados del libro de texto; en este sentido, los estudiantes leían en forma alternada y respondían preguntas planteadas en el texto y, posteriormente, se confrontaban sus respuestas.

Desempeño de los alumnos

Previamente a las sesiones de enseñanza se administró un cuestionario y, al cabo de aproximadamente cinco meses, se aplicó tal cual el mismo cuestionario, con el propósito de identificar variaciones en el desempeño de los estudiantes.

El cuestionario constó de cinco reactivos para el enfoque frecuencial de probabilidad y otros cinco para el clásico, los cuales fueron presentados en forma alternada; cada reactivo planteó cuatro opciones, correcta sólo una de ellas y la elección debió justificarse por escrito; además, en algunos casos se tenían que completar los datos contenidos en tablas de doble entrada, diagramas de árbol, gráficas de barras y diagramas circulares. La contestación, individual, requirió de dos sesiones de 50 minutos cada una, tanto en la primera como en la segunda aplicación.

Resultados del análisis de la propuesta institucional para probabilidad

La Tabla 1 presenta resultados del análisis del apartado 9 (Nociones de probabilidad I) del libro de texto citado como ejemplo del examen al que se sometió la propuesta institucional. De manera particular, el libro de texto está organizado en cinco bloques, en concordancia con el *Plan y Programas de Estudio* (SEP, 2006); el contenido relaciona y se organiza en tres ejes temáticos: Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico (SN y PA); Forma, Espacio y Medida (FE y M) y Manejo de la Información (MI) relacionados entre sí.

Tabla 1. Ejemplo de análisis del libro de texto (Arriaga, Benítez y Cortés; 2008),

Criterio	Ideas fundamentales	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos utilizados
Apartado				
Nociones de probabilidad I	Medida de la probabilidad. Espacio muestra. Regla de la adición. Regla del producto e independencia. Equidistribución y simetría. Combinatoria. Modelo de urna y simulación. Variable aleatoria.	Números naturales y su orden. Operaciones con números naturales. Operaciones con números irracionales en su expresión decimal. Porcentajes fracciones propias	Lengua natural. Tablas de una y de doble entrada. Expresiones numéricas. Figuras. Expresiones simbólicas en forma numérica. Se excluye el uso de gráficas.	Fenómenos, eventos, ocurrir, aleatorios, lanzamos, deterministas, sorteo, resultados posibles, suceder, probabilidades, seleccionar, experimentos, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, rifa, asegurar, probabilidad clásica.

Las situaciones y contextos planteados en el apartado anterior del libro de texto son las siguientes: lanzamiento de sólo un dado, lanzamiento de monedas (1, 2 y 3 volados), extracción al azar de barajas, extracción de cubos, rifa de una grabadora y otro sin especificar. En el planteamiento de todas estas actividades existe un predominio del enfoque clásico de la probabilidad, lo cual podría deberse a la correspondencia que se tiene con el Plan y Programas de Estudio de Secundaria de Matemáticas (SEP, 2006).

En general, la propuesta de estocásticos se desarrolla en el bloque 3 (apartado 5) y en el bloque 5 (apartado 4) con antecedentes de conteo (bloque 1, apartado 8) y de nociones de frecuencia absoluta y frecuencia relativa (bloque 3, apartados 7, 8 y 9). En el bloque 3 se incluyen los conceptos de frecuencia absoluta y relativa, lo cual implica la simbolización respectiva, pero se descarta una interacción estrecha con el objeto (Steinbring, 2005); se continúa con el trazado de

gráficas y se finaliza con nociones de probabilidad (fenómenos aleatorios y deterministas). Este último punto se concluye en el bloque 5, mediante la referencia a eventos equiprobables con predominio del enfoque clásico de la probabilidad.

En síntesis, el uso de notaciones simbólicas es escaso o implícito; se excluye la formalización matemática. Las situaciones planteadas son susceptibles de tratarlas mediante el enfoque frecuencial y la única actividad que propone la realización de ensayos independientes mediante lanzamientos de monedas no contribuye a una comprensión suficiente del enfoque frecuencial, debido a que no se proponen gráficas ni se conjuntan los resultados obtenidos de los ensayos en forma grupal. Por la presentación se podría confundir el enfoque frecuencial con el enfoque clásico, ya que sólo se formaliza este último y, además, se denotan simbólicamente de forma indistinta:

$$P(\text{águila}) = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \quad P(\text{sol}) = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

(Arriaga, Benítez y Cortés; 2008, p. 192)

Aunado a lo anterior, el uso de términos es indistinto o determinista. Por ejemplo,

- *Fenómenos o eventos.* (Arriaga, Benitez y Cortes; 2008; p. 185)
- *Probabilidad: Razón del grado de certeza de que ocurra un evento. Su valor va desde cero hasta 1. (0 % a 100%).*
- *Entonces tienes 1 de 2 probabilidades de ganar,...*(Ibíd., p. 186).
- *En una cajón hay 40 calcetines: 20 negros y 20 azules. Sin ver, ¿cuántos calcetines tienes que sacar para **asegurar** que tienes un par del mismo color?* (Ibíd., p. 193).

Resultados de la enseñanza en aula

De un total de cinco actividades que requirieron de doce sesiones de 50 minutos cada una, sólo en dos sesiones, la docente en formación solicitó a los estudiantes la realización de repeticiones independientes para el lanzamiento de una moneda; al respecto, organizó a los alumnos en equipos de cuatro personas y, así, realizarían los ensayos correspondientes al fenómeno aleatorio

en cuestión; cuyas frecuencias absolutas y relativas fueron conjuntadas de manera grupal bajo un análisis y reflexión que se derivó de los resultados obtenidos. Bajo estas condiciones, la docente en formación puso de manifiesto la poca importancia que otorgó al tratamiento del enfoque frecuencial de la probabilidad a lo largo de su secuencia de actividades (López, 2009); descartando el enfoque frecuencial como un acercamiento natural a la idea de azar (Gigerenzer y Hoffrage, 1995).

López (2009) también reconoció que otra dificultad que presentó se debió al poco tiempo que le fue permitido para concluir con las actividades propuestas. En bitácora escrita, se registraron las dificultades que tenía la enseñanza para diferenciar entre el enfoque clásico y el frecuencial de la probabilidad, lo cual era el producto de la interpretación de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) en el libro de texto (Arriaga, Benítez y Cortés; 2008) utilizado como medio para la enseñanza (ver aquí resultados de su análisis).

Resultados generales del cuestionario

Los resultados iniciales con el cuestionario podrían indicar que los estudiantes carecían de antecedentes previos de los temas de probabilidad (ver Figura 1); además, la interpretación y análisis de recursos semióticos son muy escasos. En la segunda aplicación, los alumnos pudieron interpretar la información contenida en tablas y gráficas, cuya aportación pudo deberse a que incluyeron estos recursos como parte de las actividades de enseñanza.

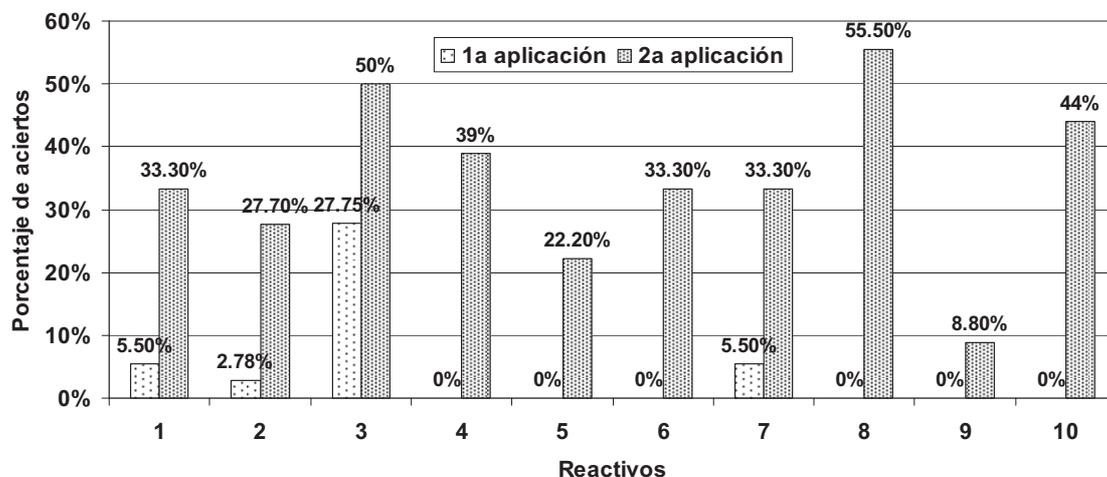
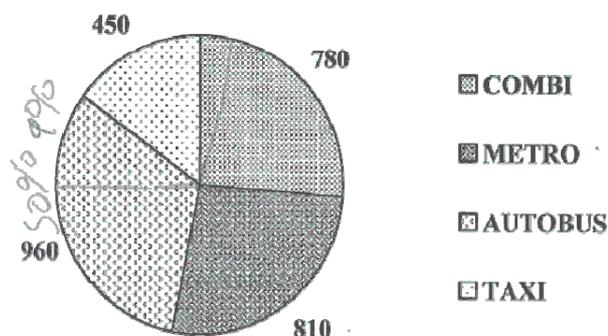


Figura 1. Resultados obtenidos antes y después de la enseñanza

Primera aplicación

A modo de ejemplo, en el problema 3 (ver Figura 2), los 10 alumnos (27.7%), que seleccionaron y justificaron correctamente, se ubicaban en la frontera del procesamiento no consciente y la conciencia; la mayoría de los alumnos respondió mediante una estimación a partir de los datos proporcionados en la gráfica y enfocándose a su cardinalidad; por tal motivo, evidenciaron desconocimiento de las ideas fundamentales de: *medida de la probabilidad, espacio muestra* y la *regla de la adición*.

3. Los gobernantes de una ciudad ordenada, aplicaron una encuesta a una muestra de 3,000 de sus habitantes acerca del medio que prefieren para trasladarse de sus casas al trabajo.



Según los resultados obtenidos; al seleccionar al azar a un ciudadano, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera viajar en metro o en autobús?

- A) 59% B) 27% C) 32% D) 41%

¿Por qué?

por que si parto a la mitad y otra vez a la mitad más o menos base el porcentaje por que si la mitad es un 50% más o menos el resto que sobra es un 49%.

Figura 2. Ejemplo de reactivo propuesto en el cuestionario

Segunda aplicación

De los 18 alumnos (50%) que contestaron correctamente, 5 alumnos se ubicaron en la frontera del procesamiento no consciente y la conciencia, quienes obtuvieron el resultado con sólo observar la gráfica; mientras que los otros 13 alumnos en la conciencia, ellos interpretaron correctamente la información proporcionada en la gráfica circular y utilizaron la *regla de la adición* a partir del uso de procedimientos formales (ver Figura 3), ya que consideraban el evento compuesto por metro o autobús.

A) 59 % B) 27 % C) 32 % D) 41 %

¿Por qué?

Al realizar las operaciones sale ese resultado
 Por q: la suma de los 2 eventos

$$\frac{3000}{1001} = \frac{960}{x}$$

$$32 + 27\%$$

$$\begin{array}{r} 960 \\ + 810 \\ \hline 1770 \end{array}$$

Figura 3. Ejemplo de respuesta que se ubica en la etapa de la conciencia

Comentarios generales

La presentación de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) en el libro de texto (Arriaga, Benítez y Cortés; 2008), resultó incompleta e inconsistente; lo cual fue reproducido por la enseñanza, debido a que basó su estrategia en este medio de manera predominante. A pesar de esto, conforme se iba avanzando en las sesiones de enseñanza, algunas dificultades de comprensión fueron remontadas por parte de los estudiantes que participaron en esta investigación; la ausencia de efectividad total se pudo haber debido a que como era de esperarse la enseñanza desarrolló su práctica alrededor del enfoque clásico. Elizarrarás (2004) enfatiza que la enseñanza de estocásticos debe privilegiar el enfoque frecuencial de la probabilidad, porque al contrastar las frecuencias obtenidas con las esperadas de un evento se exploran las condiciones a las que se sujeta la realización de eventos aleatorios (Steinbring, 2005).

Este estudio se enfocó no sólo a la importancia de la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos mediante el enfoque frecuencial de la probabilidad con estudiantes de primer grado de secundaria, sino también a los medios y a la formación de docentes, lo cual dejó en evidencia que falta proveer a estos últimos de más y mejores elementos de estocásticos que les permitan facilitar su práctica docente y más aún cuando se encuentren en ejercicio profesional como titulares de un grupo en secundaria. Es conveniente indagar, de un modo específico, el proceso de formación inicial para la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos.

Como señala Elizarrarás (2004), aun cuando se supone que los medios institucionales apoyan la labor del docente, la carencia de formación en estocásticos, define su praxis por la influencia del pensamiento determinista, lo cual impide la advertencia del pensamiento de lo posible en situaciones en las que interviene el azar.

Referencias bibliográficas

Arriaga, A.; Benítez, M. M. & Cortés, M. C. (2008). *Matemáticas 1. Introducción a las competencias*. D. F. México: Pearson Educación.

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Barcelona: Paidós.

Elizarrarás, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en segundo grado de secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, D. F., México.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive Sources of Probabilistic Thinking*. Netherlands: Reidel.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction. Frequency Formats. *Psychological Review*, 102, 684-704.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Stochastic Fundamental Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.

López, A. (2009). *Desarrollo de nociones de probabilidad en alumnos de primer grado de secundaria*. Documento recepcional de Licenciatura no publicado. México: Escuela Normal Superior de México.

SEP (2006). *Programas de Estudio 2006. Educación Secundaria. Matemáticas*. D. F., México: SEP.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. New York: Springer.