

## LA ASIMILACION DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO COMO UNA ACTIVIDAD DEL SUJETO

Darly Kú, Solange Roa

CINVESTAV-IPN

darlyku@cinvestav.mx, roafuentes@gmail.com

Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado

México

Nivel: Superior

**Resumen.** En este documento intentamos hacer una reinterpretación a la teoría APOE tomando en cuenta el papel que juega el sujeto como constructor de su aprendizaje. Consideramos que es necesario hacer adecuaciones que se adapten al nuevo entorno en el que nos encontramos. Kuhn (1970) menciona que un paradigma (marco teórico) cambia o se modifica, porque satisface las necesidades de los tiempos más que el paradigma existente. Aclaramos que no pretendemos forzar ningún paradigma para dar explicaciones de los fenómenos inexplicados. Simplemente intentamos hacer una reinterpretación de las ideas hechas por Dubinsky acerca del papel que juega el sujeto en la construcción de su conocimiento, considerando que es necesario para el desarrollo de nuevas investigaciones que se desarrollen bajo esta perspectiva.

**Palabras clave:** Teoría APOE, asimilación, conocimiento matemático

### La teoría APOE

En este apartado intentaremos resaltar cuáles son las ideas principales que se desarrollan en la teoría APOE.

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) fue iniciada por Dubinsky, y desarrollada por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Esta se apoya en las ideas de Piaget sobre el aprendizaje y educación para aplicarlas al nivel universitario, es decir, fueron adaptadas para ser utilizadas en el estudio del pensamiento matemático avanzado. La idea principal en que se basa esta teoría es “la abstracción reflexiva” como la clave de la construcción de los conceptos lógico matemáticos (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996).

Acerca del conocimiento matemático, Dubinsky menciona que:

*El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996).*

Esta afirmación menciona que las estructuras mentales por las cuales un estudiante comprende un concepto matemático son las acciones, procesos, objetos y esquemas. Éstas constituyen la parte fundamental de la teoría APOE.

El marco teórico APOE consiste de tres componentes: *análisis teórico, diseño e instrucción y recolección de datos* (Asiala, et al., 1996).

Un *análisis teórico*, de la investigación comienza con un análisis teórico que modela la epistemología del concepto de estudio ¿qué significa entender el concepto y cómo este entendimiento puede ser construido por un sujeto? Se basa primeramente en la comprensión que tiene el investigador del concepto en estudio y sobre su experiencia como aprendiz y maestro del concepto. Con base a ello se propone un modelo de cognición que describe las construcciones mentales específicas que un sujeto podría seguir para desarrollar su o sus entendimientos del concepto, es decir, describe cómo el concepto se puede desarrollar en la mente de un estudiante. A este modelo se le conoce como una *descomposición genética*.

Desde el punto de vista de la teoría APOE, las estructuras básicas por las cuales se construye un conocimiento matemático son acción, proceso y objeto.

**Acción.** Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Un individuo que tiene una profunda comprensión sobre un cambio dado puede ejecutar una acción cuando sea necesario, pero no se limita a operar en el nivel de acciones.

Si la comprensión de un concepto por parte del individuo se limita a realizar acciones, entonces decimos que posee una concepción acción de tal idea. Aunque una concepción acción sea muy limitada, la construcción de acciones viene a ser crucial al inicio de la comprensión de un concepto.

**Proceso.** Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre, describir, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos.

**Objeto.** Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto (Glosario RUMEC).

El mecanismo para transitar de una estructura a otra es la *abstracción reflexiva* que se refiere a la reflexión sobre las acciones que se hacen sobre un objeto de conocimiento. Trigueros (2005) menciona que este mecanismo se activa a través de las acciones físicas o mentales que el individuo hace sobre el objeto de conocimiento. Cabe mencionar que esas concepciones no siguen necesariamente una secuencia lineal. Es decir, un individuo puede tener durante mucho tiempo concepciones intermedias o incluso tener una concepción de un tipo para algunos aspectos de un concepto y de otro para otros aspectos del concepto.

Un *diseño e instrucción* de la investigación está basado en el análisis teórico. En esta segunda componente, los estudiantes son impulsados intencionalmente a un desequilibrio en las actividades propuestas. La idea es que todas las cosas se esparzan en una manera holística como opuesta a comenzar una organización secuencial. En este marco teórico *el contexto social* se utiliza en la aproximación pedagógica, que se refiere al ciclo de enseñanza ACE, a través del uso de grupos de aprendizaje cooperativo.

Una *recolección de datos* de la investigación se basa en realizar una colección y análisis de datos. La información debe ser acerca de los estudiantes y los cursos que toman. En algunos casos se recolecta información acerca de los estudiantes quienes previamente han estudiado las matemáticas concernientes a la enseñanza tradicional o bien a la enseñanza que propone esta perspectiva teórica (Ciclo ACE).

En el siguiente apartado nos centraremos en lo que respecta al análisis teórico.

### **La asimilación en la teoría APOE**

La teoría APOE como bien se conoce es una teoría de orden cognitivo diseñada para el estudio del pensamiento matemático avanzado. Ésta intenta comprender cómo aprende matemáticas un sujeto y cómo podemos ayudarlo a desarrollar este aprendizaje. Pero cuál es el papel que juega un

sujeto en la construcción de los conceptos matemáticos, y qué hace (por oposición a lo que piensa que se hace) para adquirir y utilizar un conocimiento matemático, para considerarlo como bien razonado. Estas son algunas preguntas que nos hemos planteado, para intentar hacer una reinterpretación de la teoría APOE acerca del papel que juega el sujeto en la construcción de su conocimiento.

Revisando la literatura acerca de los trabajos realizados actualmente (Manzanero, 2007; Vargas, 2007; Kú, Trigueros y Oktac, 2008; Parraguez, 2009) bajo esta perspectiva teórica, nos hemos percatado que el papel del sujeto como aprendiz de las matemáticas es el de constructor de objetos matemáticos. Sin embargo en ocasiones no se toman en cuenta qué elementos son comunes en los estudiantes, para dicha construcción. Es por ello que en esta investigación, consideramos necesario analizar por qué es importante considerar las características de los sujetos como constructores de su conocimiento matemático y no verlos solo como receptores de información. Para construir un concepto matemático, un estudiante tiene que tener ciertas estructuras cognitivas existentes relacionadas, con el concepto matemático a conocer. Sin embargo en ocasiones no se toma en cuenta que estas estructuras cognitivas existentes en ocasiones están relacionadas con su realidad y que además interviene la necesidad de quererlas aprender por parte del sujeto. Es decir, pensamos que hay otros factores diferentes al cognitivo que sin duda determinan la manera como un individuo construye su conocimiento, estos de alguna forma intervienen en el desarrollo de nuevas estructuras cognitivas insertándose en las ya existentes.

Dentro de la teoría APOE existe un mecanismo principal llamado “abstracción reflexiva”, que consiste en extraer de un sistema de acciones o de operaciones del nivel inferior, ciertos caracteres cuya reflexión (en el sentido casi físico del término) se reflejan en las acciones u operaciones que se realizan a nivel superior. Pues sólo es posible adquirir conciencia de los procesos de una construcción anterior por medio de una reconstrucción en un nuevo plano. Cabe mencionar que éste es producto de la abstracción empírica puesto que obedece al tipo de acciones mentales sobre los elementos que él o ella puede considerar en su mente. Consideramos que la abstracción reflexiva juega un papel importante en la construcción de nuevos objetos. Sin embargo, hemos observado que la *asimilación* también es crucial en la reconstrucción de las estructuras cognitivas precedentes a la construcción de un nuevo objeto, y que en ocasiones es

afectada por otros factores. Según Piaget y García (2004), la asimilación consiste en considerar el conocimiento como una relación indisoluble entre el sujeto y el objeto, es el sujeto quien extrae el contenido del objeto determinado por sus estructuras anteriores, y quien establece el esquema (o estructura previa) que le llevará a asimilar un nuevo objeto. Ya que cuando el nuevo objeto es asimilado, éste genera una reestructuración en el esquema asimilador y en aquellos que se relacionan con él, produciendo una evolución de las estructuras precedentes y aquellas que establecen de manera paralela a él. Por tanto consideramos que la asimilación juega un papel importante, ya que cuando un estudiante aprende o construye un concepto u objeto matemático, este es incorporado tal vez no como es en realidad si no a la manera de quien lo asimila. Cabe mencionar que la asimilación en su funcionamiento pone en marcha una serie de ciclos motores tendientes a satisfacer una necesidad (Ives – Lys, Agrelo, Barbieri, Brugo, Llanos, Gonzalez, Grilo y Spakapan, 1973). Con base a ello surge la siguiente pregunta cómo los elementos previos, determinan las variantes de una descomposición genética en la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Eschema). Como parte de la metodología para esta investigación se realizó: una recopilación de los trabajos de investigación en álgebra lineal, realizados bajo la perspectiva teoría APOE; posteriormente se realizó un análisis de las descomposiciones genéticas de dichos trabajos de investigación (Manzanero, 2007; Vargas, 2007; Kú, et al, 2008; Roa, 2008; Parraguez, 2009) y de cómo estas eran aplicadas a los estudiantes. En el análisis se intentaba observar, si el trabajo lo permitía, el fenómeno de la *asimilación* como se ha mencionado en este documento y cómo esta puede determinar las variantes en una descomposición genética. Entonces consideramos que sin duda una descomposición genética sobre la construcción de un concepto en particular, puede ser desarrollada con diferentes grupos de individuos siempre y cuando las estructuras previas consideradas en la descripción de dicho camino hagan parte de las estructuras de dichos individuos. Para aclarar esto último daremos evidencia de un caso particular que fue analizado, el concepto de transformación lineal.

En la construcción del concepto de transformación lineal Roa (2008), determina una descomposición genética refinada donde se describe específicamente el mecanismo de asimilación. En este camino la construcción del concepto está determinada por las estructuras previas de función y espacio vectorial; donde el esquema asimilador es el de función y el objeto asimilado es el espacio vectorial. Según muestra la autora, el objeto espacio vectorial es asimilado

por el esquema de función, cuando un individuo define en su universo de funciones aquellas cuyo dominio y recorrido son espacios vectoriales. Posteriormente, una vez que esta relación se establece, es fácil determinar este tipo de funciones (llamadas transformaciones) y resaltar la importancia de los vectores del espacio, el campo en el que éste se define y las operaciones definidas en ellos para finalmente determinar o no su preservación. En los resultados de la investigación de Roa (2008), se puede apreciar que la construcción del concepto Transformación Lineal está totalmente determinada por la preexistencia de estas estructuras que pueden integrarse mediante la asimilación. En este caso sería importante considerar qué es un esquema completo de función y que relaciones específicas deben establecerse para determinar la asimilación del nuevo objeto.

### Conclusión

La relación inicial entre elementos previos y un nuevo concepto determina la construcción del conocimiento matemático, por las relaciones que pueden establecerse. Cuando estas relaciones no se dan por la ausencia de los mecanismos de asimilación y reacomodación, los conceptos son simplemente mecanizados por los individuos sin que haya una verdadera comprensión de los mismos. Por tanto la estructuración del conocimiento lógico matemático se ve afectada por dichos factores, ya que lo que aprendemos lo vamos incorporando a las nuevas construcciones o reconstrucciones de un cierto conocimiento.

Consideramos que ningún conocimiento es una copia de lo real, porque incluye, forzosamente, un proceso de asimilación a estructuras anteriores; es decir, una integración de estructuras previas. De esta forma, la asimilación maneja dos elementos: lo que se acaba de conocer y lo que significa dentro del contexto del ser humano que lo aprendió. Por esta razón, conocer no es copiar lo real, sino actuar en la realidad y transformarla.

### Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in collegiate mathematics education* 2(3), 1-32.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8 (3), 24-41.

Ives-Lys Danna, Agrelo, G., Barbieri, N., Brugo, L., Llanos, E., Gonzalez, D., Grilo, C. y Spakapan, A. (1973). *El nacimiento de la inteligencia*. Buenos Aires: Ediciones Paidós.

Kuhn, T. (1970). *The Structure of Scientific Revolutions* (2nd ed.). Chicago: University of Chicago Press.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 66– 89.

Manzanero, L. (2007). *Sistemas de ecuaciones: una perspectiva desde la teoría APOE*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI Editores.

Roa, S. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto de transformación lineal*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.

Vargas, X. N. (2007). *El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.