CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE SERIE INFINITA EN ALUMNOS DE BACHILLERATO QUE NO HAN CURSADO CÁLCULO

Alejandro Miguel Rosas Mendoza, Norma Gutiérrez Rodríguez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada - IPN   México
alerosas@ipn.mx
Campo de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado   Nivel: Medio

Resumen. *En este trabajo nos interesa el saber si el alumno es capaz de construir el concepto de convergencia de una serie infinita, sin usar cálculo diferencial e integral. Para lo cual se diseñó una actividad didáctica que nos permitiera determinar la forma en que los estudiantes trabajan con los elementos de una serie infinita, tanto gráfica como numéricamente. Durante la aplicación de la actividad los alumnos tuvieron total libertad para trabajar y argumentar sus acciones. Los resultados que surgen de los primeros análisis nos indican que las respuestas obtenidas son semejantes a las que proporcionan alumnos de nivel superior.*
Palabras clave: serie infinita, convergencia, expansión de funciones en serie

Introducción

Como resultado de investigaciones previas realizadas por (Pérez, 1991), (Moreno, 1999) y Rosas (2007) surgió la pregunta ¿por qué el cálculo es un precedente para entender las series infinitas? Una vez formulada esta pregunta era natural que surgiera otra ¿el concepto de serie se puede abordar con alumnos que no hayan cursado Cálculo Diferencia e Integral?

Al observar los avances matemáticos alcanzados por civilizaciones no europeas y que lograron obtener expansiones de funciones en forma de serie basándose en la geometría, la aritmética y el álgebra (Rosas, 2007), surgió la hipótesis de que es posible comprender algunos conceptos relacionados con las sucesiones y series infinitas.

Para evitar que alumnos con conocimientos de cálculo pudieran influenciar los posibles resultados que obtuviéramos se decidió trabajar con alumnos de nivel medio superior que no han cursado las materias de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. Tan sólo fue necesario enseñarles a usar el programa graficador GRAPHMATICA con la intención de que pudieran realizar todas las gráficas de forma rápida y fácil de modo que se concentraran en la interpretación de dichas gráficas.

Analizando la tesis de Pérez (1991), se tomo la idea del tema de cómo se aborda la noción de convergencia en los polinomios de Taylor en estudiantes de bachillerato, se tomaron algunas consideraciones de ésta a mencionar. Se cambio la secuencia didáctica, pero la finalidad es la misma se tomo el ámbito gráfico y numérico; a modo de que los alumnos sin ninguna intervención del profesor pueden hacer comparaciones entre la función exponencial y los polinomios de grado finito que proporciona la expansión en serie de Taylor de la función exponencial y por medio de cálculos numéricos puedan experimentar la convergencia respectivamente.

De la tesis de Moreno (1999), se tomará en cuenta el marco teórico que desarrolló en su tesis y su conclusión; construcción de una ingeniería didáctica donde solicita a los estudiantes encontrar más términos de la serie y graficar sumas parciales de esta serie.

La diferencia de las tesis antes mencionadas con este nuestro proyecto, es que las anteriores, se analizan con alumnos que son de nivel medio superior que ya cursaron Cálculo Diferencial e Integral y con estudiantes de nivel superior que ya tienen conocimiento de cálculo.

Marco Teórico

Como marco teórico escogimos la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau:

> *Una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, sólo si es una solución de un problema. Tales problemas, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción*.... (Brousseau, 1983, pp. 169-171).

De acuerdo a lo anterior, el trabajo del profesor no debe reducirse a presentarle al alumno los conceptos, significados y nociones a aprender, su tarea es darle la oportunidad de construirlo a partir de un conjunto de problemas donde dicho significado funcione. La Teoría de las Situaciones Didáctica es un marco dentro del cual las relaciones y procesos de enseñanza y aprendizaje se encuentran representadas, por lo que es un instrumento de gran valor para la enseñanza de las matemáticas y la formación de profesores –quienes también deben conocer esta teoría para aplicar y desarrollar sus propias situaciones didácticas en ambientes favorables al alumno.

Dichas situaciones deben lograr que el alumno proporcione un significado que le sea útil y significativo de modo que pueda aplicarlo en la resolución de problemas diferentes. El alumno debe tener la posibilidad de hacer pruebas, de generar modelos y de formular respuestas y teorías.

Citando a Brousseau:

> *el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas que son la prueba de aprendizaje (Brousseau, 1983, p. 48).*

De los diferentes tipos de situaciones didácticas nuestro trabajo se centra en aquellas situaciones que están centradas sobre la acción, pues nuestros alumnos intentarán resolver problemas que nunca antes han enfrentado; recordemos que las series infinitas no se estudian hasta la universidad.

La actividad que se planteó a ser aplicada en nuestro estudio consta de dos etapas, la primera es una etapa gráfica que fue tomada de Pérez (1991) y la segunda etapa es numérica y fue tomada de Rosas (2007), ambas fueron desarrolladas originalmente bajo la metodología de la Ingeniería Didáctica.

La Actividad Didáctica

A continuación presentamos la actividad en su etapa gráfica:

A continuación aparecen unas funciones que deberás graficar por parejas de la siguiente manera:

Grafica $y = e^x$ *con la función 1.*

Grafica $y = e^x$ *con la función 2.*

De la misma manera con todas las funciones hasta la 6.

$$y_1 = 1 + \frac{x}{1}$$

$$y_2 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}$$

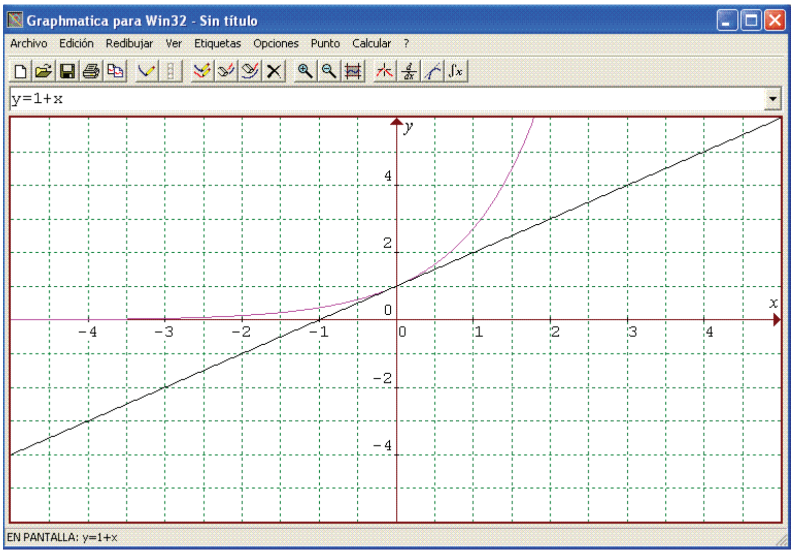
$$y_3 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$y_4 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$y_5 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$y_6 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

Por ejemplo, en la primera gráfica vas a comparar la gráfica de e^x con la función y=x+1 como se ve a continuación:



Aprovecha para observar las gráficas y su comportamiento.

Sigue observando lo que sucede con las gráficas de las funciones.

Continúa graficando las funciones de esta misma forma en parejas.

Responde:

¿Se parecen las gráficas de e^x y $y_2 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2}$ *o son diferentes? ¿Qué tanto?*

¿Se parecen las gráficas de e^x *y* $y_3 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ *o son diferentes? ¿Qué tanto?*

¿Se parecen las gráficas de e^x *y* $y_4 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ *o son diferentes? ¿Qué tanto?*

¿Se parecen las gráficas de e^x *y* $y_6 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ *o son diferentes? ¿Qué tanto?*

¿Qué crees que pase con las gráficas si sigues aumentando la potencia de x?

Si se necesita encontrar la función 7, ¿qué término agregas al último? ¿Cómo queda la función?

Si se necesita encontrar la función 8, ¿qué término agregas al último? ¿Cómo queda la función?

Si se te pide el último término de la función 20, ¿Cómo lo escribes?

Si se te pide una fórmula para el último término de cualquier función, ¿Cómo la escribes?

Dibuja las gráficas de e^x *y la función 10, ¿cómo son las gráficas? ¿Se parecen?¿Qué tanto?*

Si se te pide que inventes un nombre para lo que observaste con las gráficas, ¿Qué nombre le inventarías?

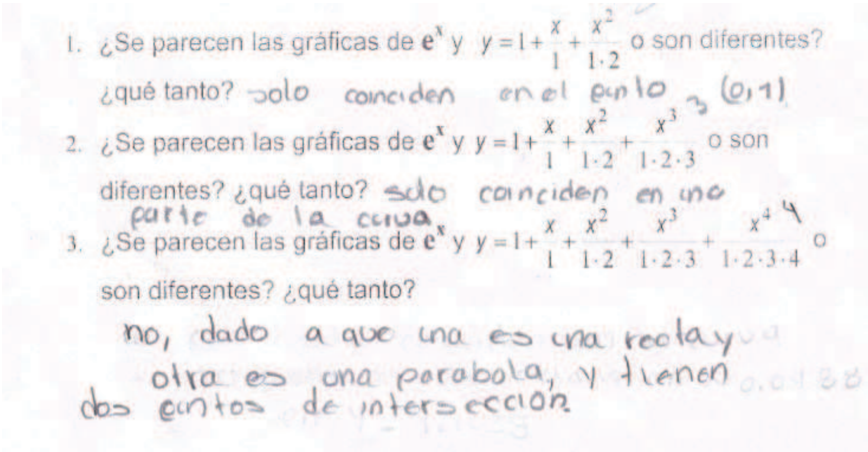
La actividad no será presentada en su etapa numérica por falta de espacio.

Resultados y análisis

Después de aplicar nuestra actividad a tres equipos de alumnos se obtuvieron respuestas que tienen semejanza con las respuestas obtenidas en las investigaciones que antes hemos citado. Durante la aplicación de la actividad no se interfirió con el trabajo de los estudiantes, se permitió que conjeturaran libremente. Tampoco se les guió a que vieran el número de curvas de cada gráfica o a que si se "acercaban" las gráficas.

Si bien el lenguaje no es el utilizado en los cursos de cálculo, los términos empleados por los estudiantes de nivel medio pueden ser considerados como sinónimos de los empleados por estudiantes de nivel superior que ya cursaron cálculo.

Veamos a continuación algunas imágenes de las respuestas que obtuvimos



1. ¿Se parecen las gráficas de e^x y $y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}$ o son diferentes? ¿qué tanto? solo coinciden en el pnto (0,1)
2. ¿Se parecen las gráficas de e^x y $y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ o son diferentes? ¿qué tanto? solo coinciden en una parte de la curva.
3. ¿Se parecen las gráficas de e^x y $y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ o son diferentes? ¿qué tanto?

no, dado a que una es una recta y otra es una parabola, y tienen dos pntos de interseccion

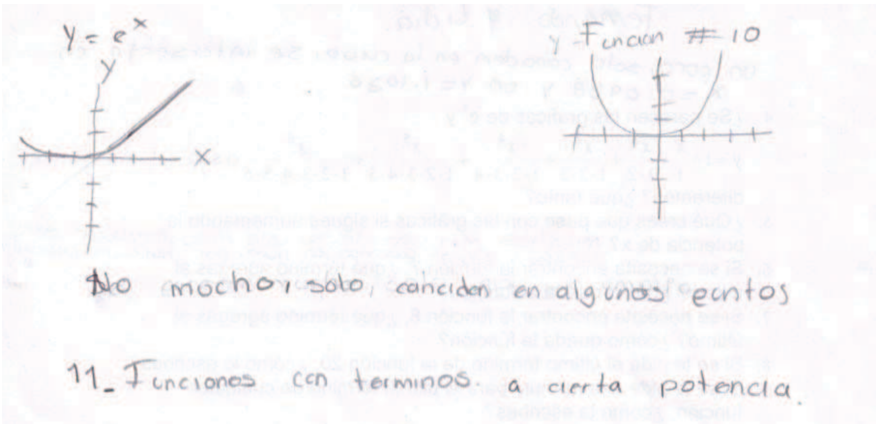


Imagen 1. Respuestas del Equipo 1.

Entre las respuestas obtenidas a la pregunta de *¿se parecen las gráficas?* tenemos:

- No, se parecen porque una es recta y otra es una parábola
- Sí, pero la primera está más abierta que la segunda
- No, son diferentes en forma pero pasan por los mismos puntos

Conclusiones

En este trabajo sólo hemos presentado una pequeña parte de las respuestas que obtuvimos de la aplicación de nuestra actividad, sin embargo podemos comentar que

1. Sin ser guiados los alumnos encuentran semejanzas entre las gráficas.
2. Aunque sólo dos equipos escribieron comentarios sobre las gráficas, los argumentos proporcionados por los estudiantes hacen alusión a las características de las gráficas que esperábamos que descubrieran.
3. En la etapa numérica los datos que obtuvieron los estudiantes les condujeron a pensar que los valores de la función exponencial y sus polinomios de Taylor se acercan.
4. En la pregunta correspondiente a la forma que tendría el término 20 de la serie, se obtuvieron respuestas correctas en el sentido heurístico; aunque expresadas en un lenguaje no formal.

Aunque es necesario continuar con la investigación hemos encontrado que el desenvolvimiento de los estudiantes que participaron en nuestra actividad y que no han cursado cálculo es semejante al reportado en los estudios anteriores, estudios en los que participaron alumnos que ya habían cursado al menos una vez cálculo.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemas en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4 (2)*, 165-198.

Moreno, J. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación*. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV.

Pérez, V. (1991). *Sobre la noción de convergencia en los polinomios de Taylor en estudiantes de bachillerato. Análisis de las estrategias que posibilitan la construcción del concepto. Estudio de Casos*. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV.

Rosas, A. (2007). *Transposición didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del discurso escolar actual en el nivel superior*. Tesis de doctorado no publicada, CICATA-IPN.