

## LA TÉCNICA SPLINE: UNA APROXIMACIÓN AL APRENDIZAJE, USANDO LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Rogelio Ramos, Frida María León, Armando Aguilar, Carlos Oropeza

Universidad Nacional Autónoma de México

(México)

egorrc@gmail.com, armandoa@servidor.unam.mx, egor131@servidor.unam.mx

**Resumen.** La técnica “spline” es una de las técnicas más usadas en aplicaciones científicas y tecnológicas. Presenta una mayor estabilidad numérica que la representación polinómica tradicional. Es un técnica poderosa y ampliamente usada, en derivación, integración, solución de ecuaciones diferenciales y graficación en dos y tres dimensiones (Madhumangal, 2007). El objeto matemático descrito, se enseña a estudiantes de ingeniería, utilizando el modelo de aprendizaje sociocultural de Lev S. Vygotsky (Vygotsky, 1979) en el que se sostiene, que ambos procesos, desarrollo y aprendizaje, interactúan entre sí, y considera al aprendizaje como un factor del desarrollo. Es esta estrecha relación entre desarrollo y aprendizaje que Vigotsky destaca y lo lleva a formular su famosa teoría de la “Zona de Desarrollo Próximo”. El experimento se realizó con un grupo experimental (64 alumnos) y un grupo de control (33 alumnos) y se utilizó el diseño experimental denominado prueba t independiente de comparación simple.

**Palabras clave:** técnica spline, aprendizaje, zona de desarrollo próximo

**Abstract.** The spline technique is one of the techniques used in scientific and technological applications. It has a higher numerical stability than the traditional polynomial representation. It is a powerful and widely used technique in derivation, integration, solution of differential equations and graphing in two and three dimensions (Madhumangal, 2007). The mathematical object described, is taught to engineering students using the learning sociocultural model of Lev S. Vygotsky (Vygotsky, 1979) which argues that both processes, development and learning, interacting, considering learning as a factor of development. It is this close relationship between development and learning, that, Vygotsky stresses and leads him to formulate his famous theory of the "Proximal Development Zone". The experiment was conducted with one experimental group (64 students) and a control group (33 students) and used the experimental design called independent t test of simple comparison.

**Key words:** technique spline, learning, proximal development zone

### Introducción

Denominamos spline a una curva definida por tramos (o segmentos) mediante polinomios de tercer grado. A partir de un conjunto de datos, como el de la *Figura 1*:

X	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	...	$x_n$
Y	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	...	$y_n$

Figura 1. Expresión tabular del conjunto de datos que es tratado mediante la técnica spline

Como resultado de la aplicación del ajuste cúbico spline, a partir de un conjunto de datos se obtienen las curvas suavizadas o polinomios cúbicos correspondientes a cada uno de los segmentos que conforman al conjunto citado. Por este motivo, la técnica spline también es conocida con el nombre de interpolación segmentaria. Esto significa que la técnica spline,

interpola una función entre un conjunto de puntos. La curva interpolada pasa a través del conjunto de puntos dado y también, su derivada y curvatura son continuas en cada punto. Existen “splines” de distintos grados; sin embargo, los de tercer grado son los más ampliamente usados. Con esta descripción del ajuste cúbico spline, se puede observar en su representación gráfica, que, para cada subintervalo formado por dos puntos se determina un polinomio de grado tres, tal como se muestra en la Figura 2.

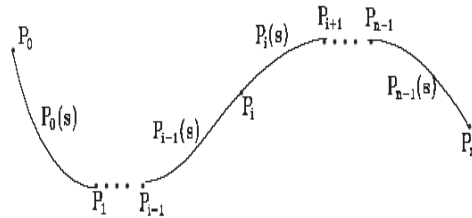


Figura 2. Expresión gráfica de la técnica de ajuste de curvas “spline”

Un caso particular del proceso que se lleva a cabo con la técnica del ajuste cúbico de curvas, se presenta en la Figura 3, aplicado al conjunto de datos tomados de un experimento.

Datos:

X	2	3	4	5	6	7
y	-5	4	27	70	139	240

Resultados del Proceso:

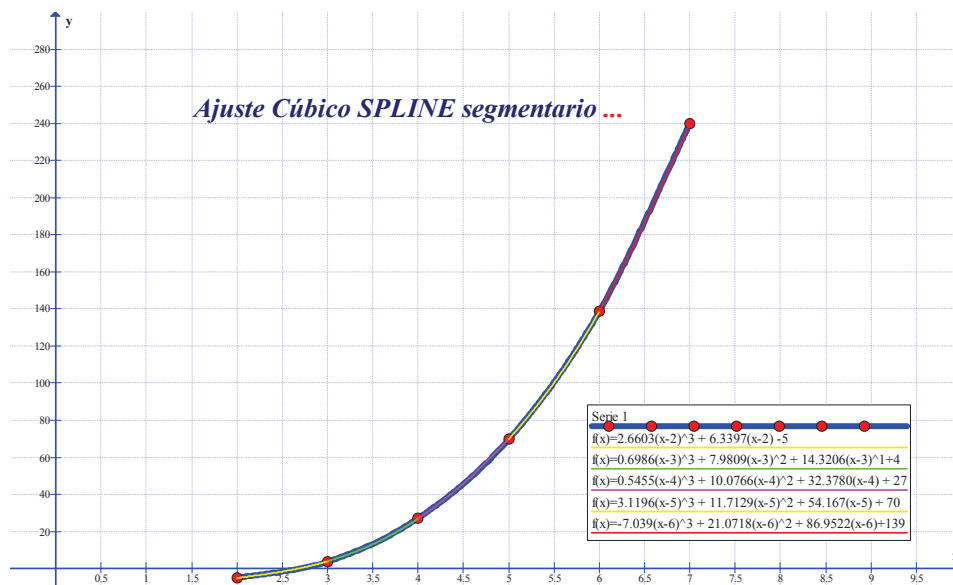


Figura 3. Representación gráfica del proceso que se sigue en el ajuste cúbico de curvas “spline”

En la *Figura 3*, se aprecia la calidad del ajuste cúbico spline segmentario; se muestra la gráfica del conjunto de datos del experimento (color azul) y los polinomios cúbicos calculados para cada uno de los segmentos correspondientes a los datos, los cuales se dibujaron en colores distintos y se encuentran indicados en la leyenda del gráfico

### Descripción del objeto matemático

Se puede realizar un ajuste cúbico (Madhumangal, 2007) a una función definida en el intervalo:

$$[x_0, x_n]$$

cuando se pueden determinar polinomios cúbicos  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ , ...,  $p_n(x)$ , tales que:

$$(1) \dots y(x) = p_i(x) \quad \text{sobre } [x_i, x_{i+1}], \quad i=0,1,2,\dots,n-1$$

$$(2) \dots p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i), \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (\text{igual derivada})$$

$$(3) \dots p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (\text{igual curvatura})$$

$$(4) \dots p_i(x_i) = y_i, \quad p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}; \quad i=0,1,2,\dots,n-1$$

Para estos polinomios se establecen las consideraciones adicionales:

Sea denotara al  $i$ -ésimo intervalo por:

$$[x_i, x_{i+1}]$$

También se considera la notación siguiente:

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i=1,2,3,\dots,n \quad \text{y sea } M_i = y''(x_i), \quad i=0,1,2,\dots,n$$

Entonces se propone encontrar un polinomio cúbico para el  $i$ -ésimo intervalo de la forma:

$$(5) \dots y(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \quad \text{en } [x_i, x_{i+1}]$$

de manera que el problema se reduce a determinar los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ , y  $d_i$ , asociados al conjunto de datos que se ajustarán mediante el spline cúbico. Estos coeficientes quedan determinados mediante las relaciones:

$$(6) \dots y_i = d_i$$

$$(7) \dots b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$(8) \dots a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_{i+1}}$$

$$(9) \dots c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{2h_i M_i + h_{i+1} M_{i+1}}{6}$$

Así que, los coeficientes,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ , y  $d_i$  en la ecuación (5) quedan determinados en términos de las  $(n+1)$  derivadas desconocidas:  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ . Estas incógnitas se determinan mediante la ecuación:

$$(10) \dots 6 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) = h_i M_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) M_i + h_{i+1} M_{i+1}$$

Esta relación es cierta para  $i = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ .

Entonces se dispone de  $(n-1)$  ecuaciones para resolver las  $(n+1)$  cantidades desconocidas:  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$

Luego, se requieren dos condiciones más, para resolver el problema del número de ecuaciones requeridas. Las condiciones se pueden obtener considerando las formas siguientes:

(i) Si se satisface la condición  $M_0 = M_n$ , entonces el ajuste cúbico (“spline”) correspondiente es llamado “spline natural”.

(ii) Si se satisfacen las condiciones:

$$M_0 = M_n ; M_1 = M_{n+1} ; y_0 = y_n ; y_1 = y_{n+1} ; h_1 = h_{n+1}$$

el “spline” correspondiente, se llama “spline periódico”.

(iii) Otro caso es aquél, para el que se cumplen las condiciones:

$$y'_0 = y'(x_0) ; y'_n = y'(x_n)$$

de donde se obtiene:

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1} \left( \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \right)$$

y ... (11)

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n} \left( y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right)$$

Se denomina “spline no periódico” o bien “spline cúbico anclado” (ajuste cúbico anclado), al “spline” que satisface las condiciones (iii),

(iv) Si se consideran como condiciones que:

$$M_0 = M_1 - \frac{h_1(M_2 - M_1)}{h_2}$$

y

$$M_n = M_{n-1} + \frac{h_n(M_{n-1} - M_{n-2})}{h_{n-1}}$$

entonces el “spline“, que cumple con esas condiciones se llama “spline de extrapolación”

(v) Si se define que:

$$M_0 = y_0'' \ ; \ M_n = y_n''$$

entonces el “spline” que satisface esas condiciones, es llamado “spline de curvatura ajustada en puntos extremos”.

### Diseño de las actividades y de las pruebas

Las actividades consistieron en la presentación del tema por los estudiantes, en esta se les pide que hagan uso de: un discurso matemático, esquemas, tablas, gráficas, software y el uso de un lenguaje simbólico, además se propició en el estudiante la búsqueda y organización de la información para prepararlo en el uso personal de material informativo, como condición del autoaprendizaje; con objeto de conjuntar la comprensión de la teoría con la aplicación práctica. Se indicaron los conceptos básicos adquiridos previamente requeridos para el aprendizaje del objeto en cuestión; para lo que se sugiere que el estudiante use recordatorios (notas), claves o formulas, ayuda con los detalles o pasos que conforman el algoritmo e iniciar la presentación con un problema en el contexto de la ingeniería. Se diseño un sistema de evaluación, en el que se incluye un examen único para los dos conjuntos de estudiante el experimental y el de control, el cual se aplica en igualdad de condiciones, a la misma hora y con la misma duración y consistiendo de un solo problema en el que se utilice la técnica spline para su solución.

### Metodología

El objeto matemático descrito, ha sido tratado para su aprendizaje por estudiantes de ingeniería, utilizando el modelo de aprendizaje sociocultural de Lev S. Vygotsky (Vygotsky, 1979) para el que se sostiene, que ambos procesos, desarrollo y aprendizaje, interactúan entre sí considerando el aprendizaje como un factor del desarrollo. Es esta estrecha relación entre desarrollo y aprendizaje la que Vigotsky destaca y lo lleva a formular su famosa teoría de la “Zona de Desarrollo Próximo” (ZDP), que se puede definir como la distancia entre el nivel de desarrollo, determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. Así mismo, subraya que

el motor del aprendizaje es siempre la actividad del sujeto, la cual está condicionada por dos tipos de mediadores: “herramientas” y “símbolos”, ya sea autónomamente en la “zona de desarrollo real”, o ayudado por la mediación en la “zona de desarrollo potencial. Y la adquisición de aprendizajes se explica cómo formas de socialización. El autor concibe al hombre como una construcción más social que biológica, en donde las funciones superiores son fruto del desarrollo cultural e implican el uso de mediadores.

Las “herramientas” (herramientas técnicas) son las expectativas y conocimientos previos del alumno que transforman los estímulos informativos que le llegan del contexto. Los “símbolos” (herramientas psicológicas) son el conjunto de signos que utiliza el mismo sujeto para hacer propios dichos estímulos. Las herramientas no modifican los estímulos en sí mismos, pero sí modifican las estructuras de conocimiento cuando aquellos estímulos se interiorizan y se convierten en propios. Las “herramientas” están orientadas externamente y su función es, a su vez, orientar la actividad del sujeto hacia los objetos; al contrario los “símbolos” están orientados internamente y son un medio de la actividad interna que apunta al dominio de uno mismo. Todo este proceso recibe el nombre de “ley de la doble formación” puesto que el conocimiento se adquiere procesándolo, primero, desde el exterior, con las “herramientas” y reestructurándolo luego en el interior, a través de los “símbolos”.

Los conocimientos estructurados con ayuda de los mediadores (“herramientas” y “símbolos”) generan en el alumno la citada “zona de desarrollo potencial”, que le permite acceder a nuevos aprendizajes, creándose así un cierto grado de autonomía e independencia para aprender a aprender más.

En el aprendizaje escolar, la actividad del alumno está mediada por la actividad del profesor, que es quien debe ayudarlo a activar los conocimientos previos (a través de las “herramientas”) y a estructurar los conocimientos previos (a través de los “símbolos”) proponiéndole experiencias de aprendizaje ni demasiado fáciles ni demasiado difíciles, sino en el límite de las posibilidades del sujeto. Es decir, en su “área o zona de desarrollo potencial” con el fin de ir ampliándola y desarrollándola. De esta forma, los procesos de aprendizaje y de enseñanza se solapan, convirtiéndose la propia actividad del alumno y la del profesor en

mediadores de todo proceso de enseñanza-aprendizaje en el ámbito escolar.

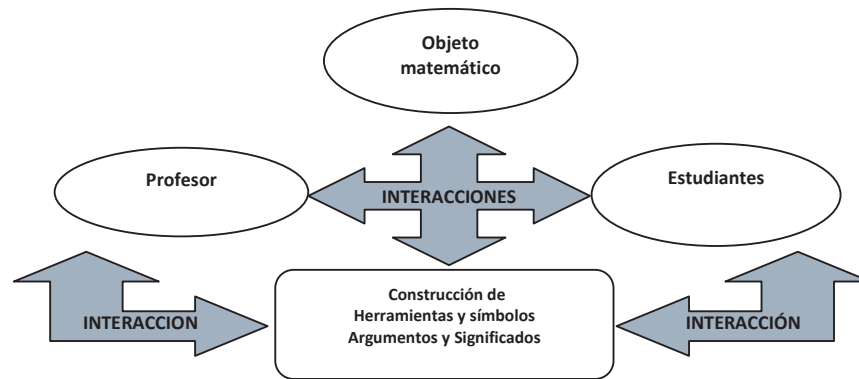


Figura 4. Esquema de las interacciones realizadas para aplicar la metodología de la zona de Desarrollo Próximo con estudiantes de Ingeniería, para el aprendizaje del ajuste cúbico de curvas “spline”.

### Realización del experimento

En nuestro experimento buscamos propiciar el desarrollo de las habilidades psicológicas proponiendo un conjunto de actividades tendientes a que el estudiante pueda resolver problemas con la técnica “spline”, suponiendo que, para lograrlo sólo necesita cierta estructura, claves, recordatorios, ayuda con los detalles o pasos, aliento para seguir esforzándose. Este tipo de apoyos es lo que se denomina en la teoría el *andamiaje didáctico*. En esta etapa de la indagatoria, el estudiante ha logrado resolver con relativa facilidad los problemas que se le proponen, en la medida en que los apoyos se aumentan en forma gradual, a fin de observar cuánta ayuda necesita y cómo responde. Así mismo un aspecto importante que se ha utilizado, como parte del andamiaje didáctico es solicitar al estudiante una presentación en la que se propicie el uso de: discurso matemático, esquemas, tablas, gráficas y el uso de lenguaje simbólico.

Por su parte el maestro observa, escucha y toma notas cuidadosamente acerca de la forma en que el estudiante emplea la ayuda y el nivel de apoyo que necesita. Esta información ha servido para planear agrupamientos instruccionales, tutoría entre compañeros (actividad que en la teoría “vigotskyana”, se denomina, la enseñanza recíproca), tareas de aprendizaje, trabajos para casa, uso de herramientas de programación de computadoras, uso de software de apoyo, etc. En este sentido el profesor ha guiado y facilitado con explicaciones, demostraciones y el trabajo con otros estudiantes, lo que hace posible el aprendizaje cooperativo. Así es como se ha experimentado para la aprehensión del objeto matemático propuesto en nuestra indagatoria, de tal manera que teóricamente hemos supuesto que las herramientas psicológicas (Baquero, 1997), son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores y, el puente entre las habilidades interpsicológicas (sociales) y las intrapsicológicas

(personales). La actividad desarrollada por los estudiantes para la presentación en el aula se muestra en *Figura No. 5*.

Una vez hecha la presentación por parte de los estudiantes, en la siguiente fase del experimento se realiza el desarrollo matemático por parte del profesor, aclarando las inquietudes y dudas de los estudiantes y haciendo énfasis principalmente en las recomendaciones que se consideran pertinentes y de acuerdo con lo observado, lo escuchado y las notas que tomaron cuidadosamente durante la presentación de los estudiantes; se ilustra con un caso resuelto en clase y se propone un caso de estudio para realizarse fuera del aula y desarrollarse, tanto en el escritorio, así como, valiéndose de los instrumentos electrónicos de cómputo. Finalmente se lleva a cabo una serie de ejercicios en el aula, tipo taller y organizada por estudiantes y profesor resolviendo varios problemas relacionados con el contexto de la ingeniería y discutiendo los resultados obtenidos. Por último se realiza un examen del objeto matemático tratado, en forma individual.



Figura 5. Una de las etapas de la experimentación en la que los estudiantes realizan la presentación del objeto matemático propuesto.

En la investigación se aplicó esta metodología a un grupo experimental, mientras que otro grupo recibió la instrucción en la forma tradicional; en la que el profesor es el expositor, realiza ejemplos pregunta acerca de dudas, las aclara, propone un caso de estudio para realizarse fuera del aula de clase, incluyendo prueba de escritorio y programa por computadora y aplica el examen en forma individual. En ambos casos; es decir, en el grupo experimental como en el grupo de control se utilizó el mismo tiempo para la enseñanza del objeto de estudio (4.5 hrs.) y se aplicó el mismo tipo de examen; cuyos resultados se analizan mediante la prueba  $t$  independiente de comparación simple.



## Resultados y conclusiones

Lo que aprendemos depende de las herramientas psicológicas que tenemos, y a su vez, las herramientas psicológicas dependen de la cultura en que vivimos, consiguientemente, nuestros pensamientos, nuestras experiencias, nuestras intenciones y nuestras acciones están culturalmente mediadas; que es el hecho central de la teoría “Vygotskyana”, en la que se postula que el ser humano, en cuanto sujeto que conoce, no tiene acceso directo a los objetos; el acceso es mediado a través de las herramientas psicológicas, de que dispone, y el conocimiento se adquiere, se construye, a través de la interacción con los demás mediada por la cultura, desarrollada histórica y socialmente. Por lo que hemos propuesto el probar experimentalmente que el estudiante puede lograr la construcción de sus propias estructuras para alcanzar el aprendizaje del objeto matemático “spline” (y de cualesquiera otros objetos matemáticos); coincidiendo con Vygotsky en el sentido de que la cultura nos dice qué pensar y cómo pensar; nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento, por esta razón, la teoría sostiene que el aprendizaje es mediado y que además la interacción social es el origen y el motor del aprendizaje.

Concluyendo que la investigación ha comenzado a producir resultados satisfactorios, en contraste con aquellos grupos en los que se ha seguido con la enseñanza tradicional (grupo de control). Así mismo, resulta importante señalar, que se ha observado la dificultad de resolver problemas por parte de los estudiantes (grupo experimental), cuando se les retiran los apoyos estratégicos para sostener o soportar el aprendizaje; sin embargo, el grupo experimental da mejores resultados en el aprovechamiento escolar, que el grupo con enseñanza tradicional.

Prueba-t Independiente sobre los datos de los grupos de control y experimental :			
Datos	Media	Varianza	N
Calificaciones del grupo de Control	5.08121	0.65895	33
Calificaciones del grupo Experimental	8.93859	2.28771	64
Estadístico de prueba: $t = 13.64879$ Probabilidad: $p = 4.03865E-24$			
A un nivel de 0.05, Las dos medias SON significativamente diferentes.			

Figura 6. Resultados del análisis de los datos obtenidos de las calificaciones de los grupos del experimento.

## Referencias bibliográficas

- Baquero, R. (1997). *Vygotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: Aique S.A.
- Madhumangal P. (2007). *Numerical Analysis for scientists and enginners. Theory and C programs*. Londres: Alpha Science.

Vygotsky, L. S. (1979). *Desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo-Critica.