

## ESTUDIO DE COMPORTAMIENTOS ANÁLOGOS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRIGONOMÉTRICAS USANDO TRANSFORMACIONES GRÁFICAS

Catalina Navarro Sandoval, Diana Patiño Flores  
 Universidad Autónoma de Guerrero  
 nasacamx@yahoo.com.mx  
 Campo de investigación: Gráfica y funciones

México

Nivel: Medio

**Resumen.** En el presente escrito, se reportan los resultados de un trabajo de investigación a nivel licenciatura, el cual se centró en el estudio de comportamientos gráficos en funciones algebraicas y trigonométricas, específicamente en  $f(x) = x$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = \text{sen}(x)$  y  $f(x) = \text{cos}(x)$ , así como las transformaciones de cada una, considerando la expresión  $Y = Cf(ax + c) + D$ , con la intención de realizar comparaciones gráficas entre las funciones originales y las transformadas, el propósito general fue analizar si la presentación de funciones algebraicas y trigonométricas en diversos contextos (algebraico, visual, numérico y gráfico), permite al estudiante identificar comportamientos análogos y relacionar éstos con transformaciones gráficas. De acuerdo a los resultados obtenidos, concluimos que el estudiante al producir sus propias gráficas, éste logra identificar por sí mismo comportamientos análogos entre las gráficas algebraicas y trigonométricas, además, el uso de diferentes registros de representación coadyuva al desarrollo de dichos resultados.

**Palabras clave:** funciones algebraicas, funciones trigonométricas, comportamientos análogos, transformaciones gráficas, registros de representación

### Introducción y estado del arte

Para el desarrollo del presente trabajo, se realizó una revisión de investigaciones realizadas sobre funciones y graficación, durante ésta, se encontró que en torno al concepto de función existe una gran variedad de investigaciones, que han reportado sobre la problemática que surge al ser enseñado éste concepto dentro del sistema escolar, por lo que éstas se han enfocado a la descripción de concepciones que tienen los estudiantes sobre dicho concepto y otras dan muestra de los obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes, etc. (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2000; Sierpinska, 1992; entre otros). Por tal razón, el interés nuestro no se centra en estudiar lo descrito anteriormente, dado que sobre eso ya se han realizado diversas investigaciones. Por lo tanto, el trabajo se centró en estudiar las representaciones gráficas, en particular las funciones,  $f(x)=x$ ,  $f(x)=x^2$ ,  $f(x)=x^3$ ,  $f(x) = \text{sen}(x)$  y  $f(x) = \text{cos}(x)$ , así como las transformaciones de cada una, considerando a la expresión  $Y = Cf(ax + c) + D$  con el propósito de realizar comparaciones gráficas entre las funciones originales (prototipo) y las transformadas,

131

éste trabajo se enfocó, en el nivel medio superior, dado que en los planes y programas de estudio revisados, se reporta que es en éste donde se inicia el trabajo con representaciones gráficas.

Navarro (2004) reportó la existencia de una ruptura conceptual en la transición de funciones algebraicas a trigonométricas, es decir, primero se trabaja con la graficación de funciones algebraicas, posteriormente con las trigonométricas, sin considerar la existencia de características gráficas comunes de manera visual en ambos tipos de funciones. Por otro lado, tampoco se propicia el uso de diferentes registros de representación tales como el algebraico, el analítico, el numérico y el visual. Esto como consecuencia, de los planes de estudio y libros de texto (revisados durante la investigación).

Con base en lo anterior el problema de investigación se centró en estudiar comportamientos análogos de algunas funciones algebraicas y trigonométricas. Para ello se planteó la pregunta: ¿la representación gráfica de transformaciones de funciones algebraicas y trigonométricas permite al estudiante relacionar éstas con comportamientos análogos?, con el propósito de presentar en los contextos algebraico, gráfico, visual y numérico el tema de transformaciones, con la finalidad de analizar si la presentación de ambos tipos de funciones en diversos contextos, permite al estudiante identificar comportamientos análogos y relacionar éstos con transformaciones gráficas, mediante la construcción previa de actividades.

Con la finalidad de dar respuesta a la pregunta planteada y alcanzar el objetivo, se analizaron investigaciones en torno a graficación (Cantoral y Montiel, 2001; Campos, 2003; Navarro, 2004; Rosado, 2004; y Cordero y Solís, 2001).

En algunas de éstas se reporta la necesidad de crear contextos gráficos para conectarlos con los contextos algebraicos y/o analíticos. Los recursos son diversos: unos se apoyan en algún software gráficator para generar habilidades visuales, otros se ocupan del uso de registros gráficos y algebraicos para generar habilidades cognitivas. Otros se ocupan de diseñar situaciones para generar discursos argumentativos gráficos o lenguajes gráficos para establecer nuevos estatus de las gráficas en la matemática escolar. Algunos autores trabajan las transformaciones gráficas transitando en diferentes contextos y otros tratan a las transformaciones, como argumentaciones para resignificar la función cuadrática. En particular este trabajo se enfocó a identificar comportamientos análogos mediante la comparación gráfica de funciones algebraicas y trigonométricas.

### Marco teórico y metodología

Tomando como base a la teoría de Raymond Duval (1998), donde se define a los registros de representación, como aquel sistema semiótico que permite realizar las tres actividades cognitivas ligadas a la sémiosis, tales como las siguientes:

- La formación de una representación identificable, como una representación de un registro dado: enunciado de una frase, dibujo de una figura geométrica, escritura de una fórmula.
- El tratamiento de una representación en el mismo registro, que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro. Existen reglas de tratamiento propias de cada registro.
- La conversión de una representación, es la transformación de la representación en otra representación de otro registro distinto al de la representación inicial, en la que se conserva la totalidad o parte del registro de partida (el registro de la representación por convertir).

En resumen, Duval propone trabajar con diferentes registros de representación semiótica, para que el estudiante logre reconocer y manipular al objeto matemático en cualquier registro de representación, esto es para la adquisición conceptual de un objeto. Con base en lo anterior y al objetivo de la investigación, en esta investigación se utilizó a los registros algebraico, visual, numérico y gráfico para la construcción del cuestionario, así mismo, se realizó la revisión de algunos planes de estudio de algunas instituciones, tales como el de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG), el del Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicios (CBTis), el del Colegio de Bachilleres (Cobach) y el del CETIS sobre el tema de “Graficación de funciones algebraicas y trigonométricas”, donde se encontró el tema de graficación y clasificación de las funciones se aborda en la asignatura de Matemáticas IV (Geometría Analítica), en el cuarto semestre en la UAG, en el tercer semestre en el CBTIS en la asignatura de Matemáticas III (Geometría analítica-Trigonometría), mientras que en los programas de estudio correspondientes al COBACH en la asignatura de Matemáticas II (Trigonometría, geometría euclidiana, geometría analítica) y en los programas de estudio de el CETIS, este tema no se contempla. Así mismo, se realizó también la revisión de tres libros de texto que se encuentran citados dentro de la bibliografía de los programas del Nivel Medio Superior. Ésta se realizó con la finalidad de conocer cómo se aborda el tema de graficación de funciones y transformaciones gráficas, donde se

encontró que se inicia presentando el sistema coordenado rectangular o cartesiano, la ubicación y localización de puntos en el plano y solamente en uno de los libros se observa el uso de tabulación para trazar gráficas en el plano, por otro lado, se deja observar también el trabajo con funciones algebraicas y trigonométricas por separado, así como el uso de algunos registros de representación, sin embargo, no se presenta el trabajo de transformaciones gráficas con las funciones algebraicas y trigonométricas en común (no se miran comportamientos análogos entre funciones algebraicas y trigonométricas).

Con base en la información anterior se diseñó un conjunto de actividades, cuyo propósito fue mirar si la presentación gráfica de ambos tipos de funciones en diversos contextos, permite al estudiante identificar comportamientos análogos y relacionar éstos con transformaciones gráficas.

En particular la actividad 1, se enfocó a que los estudiantes a partir de una expresión algebraica obtuvieran numéricamente un conjunto de pares ordenados, mediante la tabulación, para que posteriormente los localizaran en el plano cartesiano y realizaran la representación gráfica.

En la segunda actividad el propósito fue que los estudiantes visualizaran y describieran el comportamiento gráfico de funciones cuando éstas son transformadas por parámetros, considerando como funciones prototipo a  $y=x$ ,  $y=x^2$ ,  $y=x^3$ ,  $y=\text{sen}(x)$  y  $y=\text{cos}(x)$ . En la tercera actividad se pretendió que los estudiantes lograran identificar y visualizar, gráficamente que existe una relación cuando ambos tipos de funciones son afectadas por un mismo parámetro, sabiendo que los dos tipos de funciones son de naturaleza distinta.

## Diseño de actividades

### Actividad 1

*Indicaciones: Dadas algunas funciones lineales, cuadráticas, cúbicas y trigonométricas graficarlas en los planos cartesianos dados.*

$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = \cos(x)$	$y = \text{sen}(x)$
$y = x + 2$	$y = x^2 + 1$	$y = x^3 - 3$	$y = \cos(x) + 1$	$y = \text{sen}(x) - 2$
$y = -3x$	$y = 0.5x^2$	$y = 2x^3$	$y = 2\cos(x)$	$y = \frac{1}{2}\text{sen}(x)$

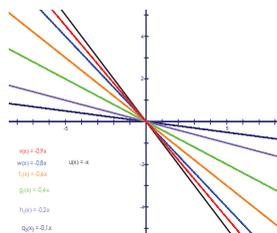
$y = x - 1$	$y = (x + 1)^2$	$y = (x - 21)^3$	$y = \cos(3x)$	$y = \text{sen}\left(\frac{1}{3}x\right)$
-------------	-----------------	------------------	----------------	---

A) Graficar funciones lineales, B) Graficar funciones cuadráticas, C) Graficar funciones cúbicas, D) Graficar funciones trigonométricas (seno) y E) Graficar funciones trigonométricas (coseno)

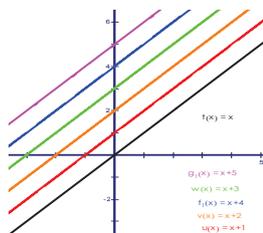
Actividad 2

Observa las funciones y sus respectivas gráficas, describe el comportamiento de las gráficas, cuando son transformadas por parámetros, considerando como funciones prototipo a  $y=x$ ,  $y=x^2$ ,  $y=x^3$ ,  $y=\text{sen}(x)$ ,  $y=\text{cos}(x)$ . (nota: sólo presentaremos algunas de las actividades)

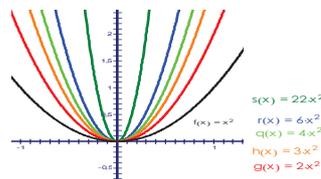
$y = Ax \quad -1 < A < 0$



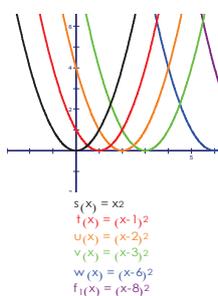
$y = x + B \quad B > 0$



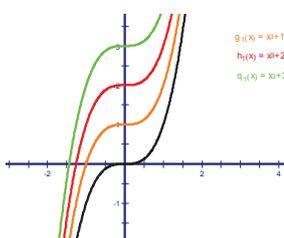
$y = Ax^2 \quad A > 0$



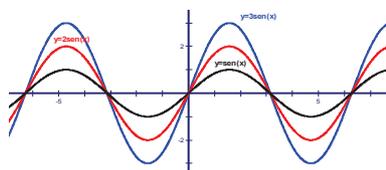
$y = (x - B)^2 \quad B < 0$



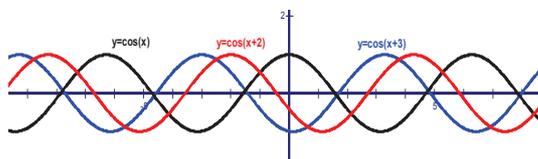
$y = x^3 + C \quad C > 0$



$y = A \text{sen}(x) \quad A > 1$

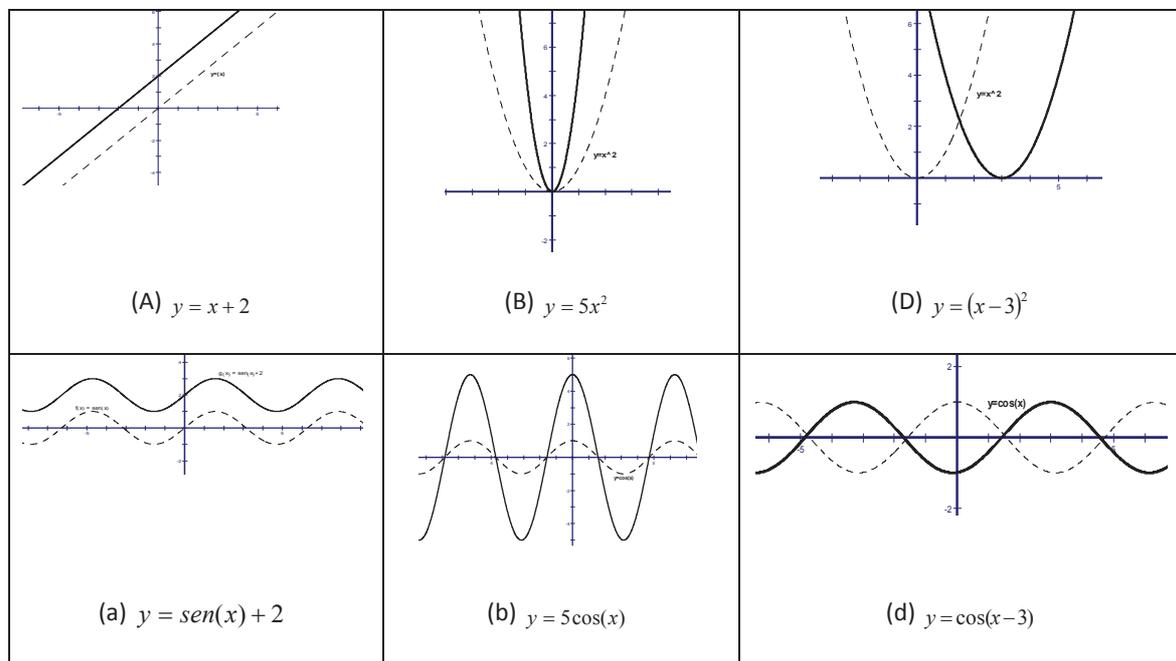


$y = \cos(x + D) \quad D > 0$



### Actividad 3

Describe relación que existe entre las gráficas de los incisos A) y a), B) y b), C) y c), D) y d).



### Resultados observados

La aplicación del cuestionario, se realizó con un grupo de diez estudiantes que cursaban un curso propedéutico para ingresar a la Universidad, a los estudiantes se les organizó en equipos de dos integrantes, la aplicación se realizó en tres momentos.

En conclusión, la actividad 1 permite el uso de los contextos algebraico, numérico y gráfico, y con ello realizar comparaciones mediante la visualización gráfica de sus producciones, se percibe que esto lo realizan sólo con funciones algebraicas, teniendo casi nulo éxito en las funciones trigonométricas. Sin embargo, a pesar de que sólo algunos equipos lograron identificar comportamientos en funciones algebraicas, fue clave para poder identificar comportamientos en las actividades posteriores (actividad 2 y 3). En cuanto a los registros de representación, en esta actividad observamos que la mayoría de los estudiantes presentan dificultades para pasar del registro gráfico al algebraico, logrando conectar los registros numérico y algebraico.

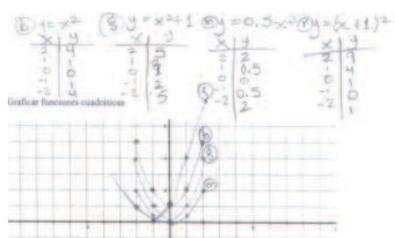


Fig. 1. Muestra la conexión entre registros (función algebraica)

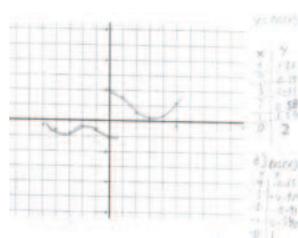


Fig. 2. Muestra dificultades en la conexión de registros (función trigonométrica)

En la actividad dos, se observó que los estudiantes lograron visualizar, identificar, comparar y describir comportamientos de ambos tipos de funciones (ver fig. 3, 4 y 5). Es decir, el registro gráfico proporcionó a los estudiantes información visual, la cual en el registro gráfico no hubiera sido posible visualizar.

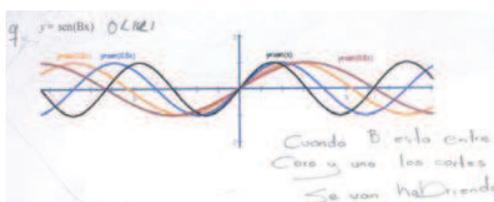


Fig. 3

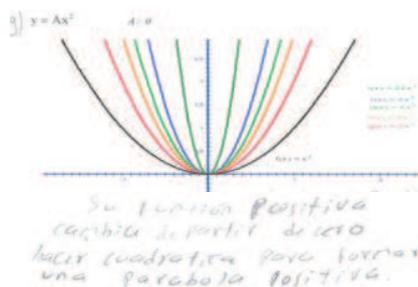


Fig. 4

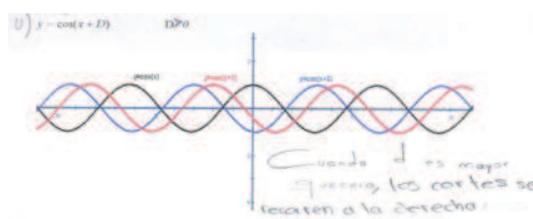


Fig. 5

En la tercera actividad, se observó que la mayoría de los alumnos, identificó comportamientos análogos entre los dos tipos de funciones (ver fig. 6). Cabe señalar que las actividades 1 y 2

jugaron un papel importante para que los estudiantes en la última actividad arribaran a este tipo de argumentaciones.

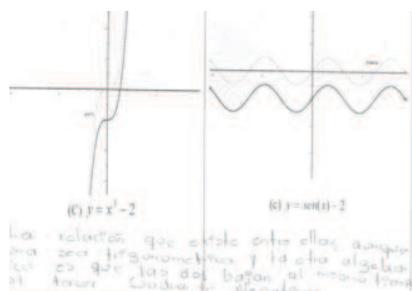


Fig. 6

De los resultados mencionados anteriormente, se señala que algunos estudiantes mencionaron que las representaciones gráficas (registro gráfico) ayudaron a identificar la relación entre las funciones algebraicas y trigonométricas cuando son transformadas por (registro algebraico) parámetros, esto fue en cuanto a sus desplazamientos. Además mencionaban que con la representación gráfica y transformaciones gráficas en funciones algebraicas y trigonométricas lograban identificar que en algunas de las funciones presentadas, existen comportamientos parecidos o similares en ambos tipos de funciones y que de otra forma no hubiesen logrado identificar, puesto que esto no lo habían visto.

Por lo tanto, hay evidencia, del hecho de que el mismo estudiante al reproducir sus propias gráficas, permite que éste identifique comportamientos análogos entre las gráficas algebraicas y trigonométricas; además, el uso de diferentes registros de representación, en este caso el algebraico, numérico, gráfico y visual coadyuvieron al desarrollo de dichas actividades.

### Referencias Bibliográficas

Anfonsi, A. y Flores, M. (1948). Coordenadas y Ángulos de diversas magnitudes. [Revisión del libro *Curso de trigonometría rectilínea*]. Progreso, S. A., 71- 73.

Anfonsi, A. y Flores, M. (1948). Variación de los valores de las funciones trigonométricas. [Revisión del libro *Curso de trigonometría rectilínea*]. Progreso, S. A., 98- 99.

- Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV, México.
- Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F. Alanís, J. A. Rodríguez, R. A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México, Prentice-Hall.
- Cordero, F. y Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1993). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. Ed. Cambray, R., Sánchez, E. y Zubieta, G. *Antología en Educación Matemática* (pp. 125-139). México, D. F.: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Ed. Hitt, F. *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 173-201). México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Guerrero, A y Ramiro, M. (2004). *El papel de la Visualización en el aprendizaje de la matemática. Antología*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México
- Navarro, C. (2004). *Elaboración y funcionamiento de una ingeniería didáctica basada en la visualización de los límites*. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV, México.
- Lehmann, C. (2003). *Geometría Analítica*. México: Limusa.
- Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV, México.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel and E. Dubinsky (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). Washington, DC, EE. UU.: Mathematical Association of America.