EL USO DE LA SUBTANGENTE PARA CARACTERIZAR UNA CURVA

Alma Rosa Pérez Trujillo, Hipólito Hernández Pérez
Universidad Autónoma de Chiapas México
almarpt@hotmail.com, polito_hernandez@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología, tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *Presentamos un diseño didáctico en donde se aborda un tema del Cálculo del currículo actual, cuyo fundamento teórico está basado en investigaciones de corte socioepistemológico favoreciendo el uso inteligente de la tecnología en el aula de matemáticas. En él se retomarán aspectos que ayuden a la reconstrucción de significados de tópico matemáticos como el uso de la subtangente para caracterizar una curva (máximos, mínimos y puntos de inflexión).*
Palabras Clave: Subtangente, socioepistemología, diseño Didáctico, tecnología

La problemática

En investigaciones sobre Cálculo de Matemática Educativa se han propuesto resignificaciones de diversos tópicos a partir de un análisis epistemológico e histórico, con la finalidad de enriquecer y rediseñar el discurso matemático escolar (Buendía, 2004; Castañeda, 2004; Cordero, 2003). No obstante, aunque el objetivo de muchas de estas investigaciones sea el impacto en el quehacer cotidiano del profesor en el aula, el sentir generalizado de los profesores en servicio es la falta de vinculación entre sus necesidades y las investigaciones que se llevan a cabo (Pérez, 2008). De ahí que establezcamos un vínculo entre la matemática escolar y las investigaciones, vía diseños didácticos que hagan uso de la tecnología y cuyo fundamento teórico sean investigaciones de corte socioepistemológico.

Marco teórico y metodológico

Las dimensiones didáctica, epistemológica y cognitiva han sido abordados por diferentes esquemas explicativos para dar cuenta de la construcción del conocimiento matemático de tal manera que el paradigma dominante ha sido el objeto matemático como la metáfora para explicar cómo se construye el conocimiento. Si vemos a las Matemáticas como una construcción hecha por seres humanos, que surge como consecuencia de darle respuesta a problemáticas en particular, consideramos que la perspectiva epistemológica debe cambiar, ya que se debe considerar al ser humano haciendo matemáticas y diseñar situaciones. El análisis de dichas prácticas debe conformar el aspecto social en el estudio de la construcción del saber matemático estableciendo así un marco en el que lo socio interactúe de manera sistémica con las dimensiones didáctica, epistemológica y cognitiva del saber para brindar una explicación más robusta acerca de su construcción. Al resultado de la conjunción de estas cuatro dimensiones, se le ha llamado aproximación socioepistemológica (Cantoral, 2000). Sin embargo, esas prácticas tienen que reformularse, reinterpretarse para lograr llegar al aula. Si bien, son el fundamento epistémico en la construcción del saber en cuestión, se les tiene que imprimir intencionalidad y hacerlas explícitas a fin de favorecer la resignificación de dicho saber; esto es, la reconstrucción del saber en una situación particular.

Debido a las características propias del diseño didáctico propuesto en esta investigación, se siguió la metodología de la Ingeniería Didáctica. Cabe señalar que existen algunas adecuaciones que se realizaron en la utilización de esta metodología, tomando en cuenta que el diseño didáctico nace al seno de los resultados de investigaciones de corte Socioepistemológico. En consecuencia, no se toman elementos de la obra matemática como base del diseño, sino a las prácticas sociales que dieron origen al conocimiento matemático. En este sentido, consideramos que en el diseño didáctico reflejarán las consideraciones epistemológicas en torno al máximo, mínimo y punto de inflexión, además, permitirá favorecer la construcción y constitución de su significado.

Fundamento teórico del Diseño Didáctico

El diseño didáctico está sustentado en el hallazgo del argumento gráfico-analítico hecho por Castañeda (2000) en las obras de difusión: el *Analyse des infiniment petits*, del marqués *L´Hospital* y el *Analitiche Institutioni*, de *Maria Gaetana Agnesi.* Retomamos el tercer argumento propuesto por *L'Hospital* y la segunda caracterización planteada por *Agnesi*, las cuales presentamos más adelante.

Para el diseño se decidió utilizar el pizarrón electrónico como herramienta tecnológica, ya que su utilización tiene como característica, la sensibilidad al tacto; su uso está apoyado en el empleo del software apropiado, como *Cabri Geometre* o *Geometer's Sketchpad*. Esta cualidad permite controlar la exposición directamente desde la pantalla del pizarrón electrónico como si se estuviera utilizando el ratón o el teclado; de esta manera se puede acceder, desplegar información y ejecutar programas de aplicación contenidos en la computadora, como se muestra en las siguiente imagen (ver figura 1).

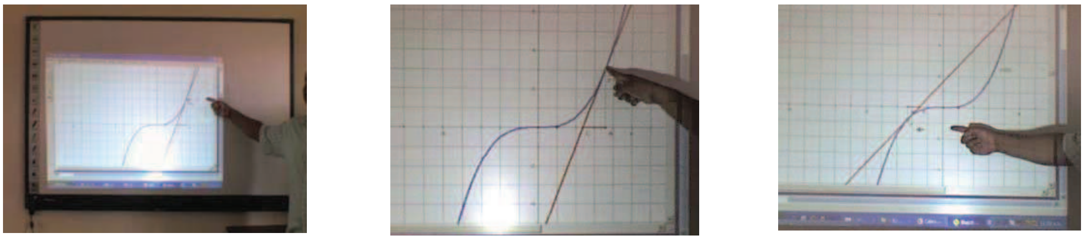


Figura 1. Uso del pizarrón electrónico (Tomada de Pérez, 2008; p. 61)

Una de las ventajas que observamos al hacer las construcciones por computadora apoyados en los software mencionados y no de manera tradicional utilizando lápiz y papel, es la libre manipulación y verificación de la construcción, además, de las ventajas que proporcionan las múltiples realizaciones y hacer ajustes en las construcciones para producir un resultado deseado.

El tercer argumento establecido por *L'Hospital* está sustentado en la observación de la posición relativa que guarda la subtangente y la tangente, a medida que se consideran nuevos puntos en la curva.

> El máximo se alcanza cuando la tangente se vuelve horizontal y paralela a la subtangente; de manera análoga, esto pasa con el mínimo, (Castañeda, 2006; pp. 259-260).

Si la subtangente PT aumenta [hacia la izquierda] a medida que MP se acerca a DE, es claro que cuando se construya a la tangente en el punto D, la subtangente tiene una magnitud infinita. De esta forma, cuando AP rebasa a AE, la subtangente PT se vuelve de positiva a negativa, o al contrario (Figura 2).

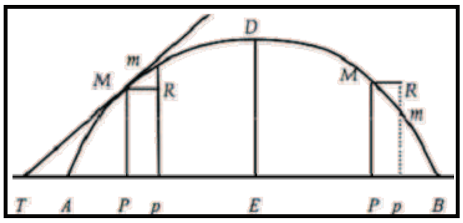


Figura 2. Uso de la subtangente. (Tomada de Castañeda, 2006; p. 260)

La segunda caracterización plateada por *Agnesi* se basa en la propiedad geométrica que guarda la subtangente respecto a la curva.

Es claro que, al aproximarse CG a EF, la subtangente AC será siempre la mayor, y cuando CG cae en EF, la tangente será paralela a BC; por consecuencia, la subtangente será infinita (Figura 3).

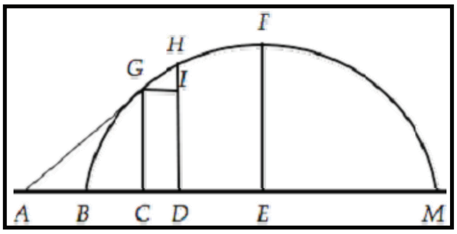


Figura 3. Propiedad geométrica de la subtangente. (Tomada de Castañeda, 2006; p. 260)

El diseño didáctico

Presentamos el diseño didáctico, con el cual pretendemos que se vea al Cálculo como aquello que estudia los fenómenos de la variación y el cambio. El objetivo de este diseño es mostrar el uso de la subtangente en un contexto de variación para caracterizar el comportamiento de las curvas, además, de permitirnos reconocer la riqueza que existe en el uso del argumento gráfico-analítico encontrado en las obras de *L'Hospital* y *Agnesi*. Al hablar de la caracterización de una curva, nos referimos a la posibilidad de incrementar o aumentar los significados de los objetos matemáticos que se estudian en clase, esta caracterización se da de manera intencionada con las actividades propuestas en el diseño didáctico, ya que establecemos una vinculación entre las investigaciones socioepistemológicas sobre Cálculo de los últimos tiempos y el quehacer cotidiano del profesor, favoreciendo además el uso inteligente de la tecnología.

Subtangente: En la siguientes gráficas (figura 4a y 4b) se puede observar un trozo de una curva llamada $f(x)$, además de una tangente t a la curva $f(x)$ en el punto A. Llamamos subtangente en A, al segmento CA'.

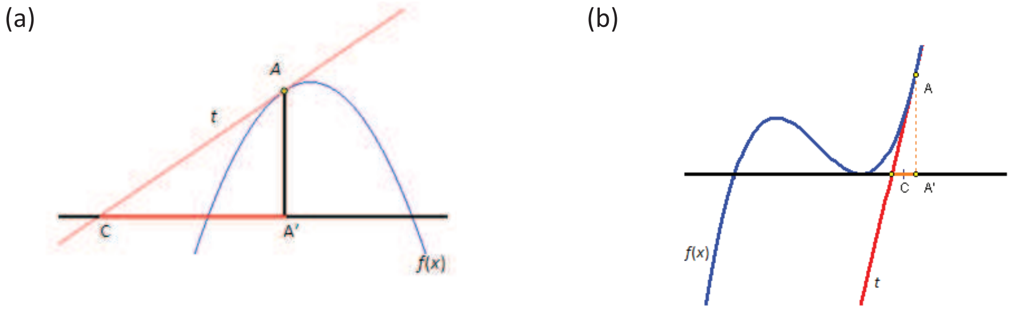
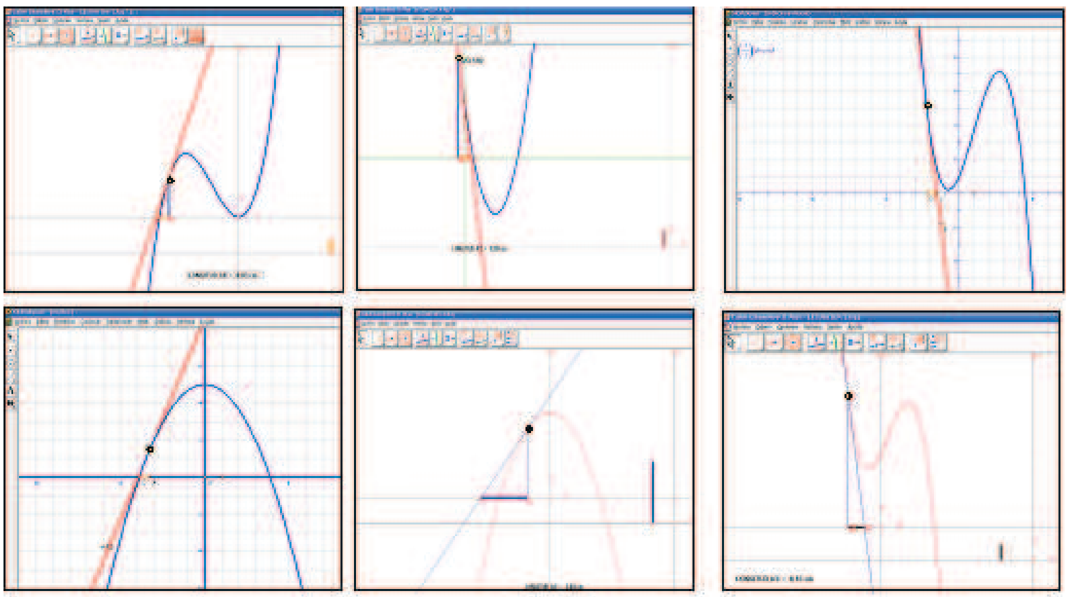


Figura 4. Trazo de la subtangente a una curva de segundo y tercer grado

Proyectar en el pizarrón electrónico cada una de las siguientes construcciones:



1. Mueve en el pizarrón electrónico el punto A en cada una de las construcciones. ¿Qué está sucediendo con el valor de la longitud de la subtangente?

2. Describe qué está pasando en la curva cuándo el valor de la subtangente es el más grande.

3. ¿Qué información proporciona la variación de las subtangentes en relación a la curva planteada?

4. Las siguientes tablas de datos muestran los valores de la magnitud que va tomando la subtangente al momento de desplazar a la derecha el valor de la abscisa en la curva, determine a cuál de las gráficas pertenece cada una de las tablas.

(a)

A	subtg
A_1	0.04
A_2	0.41
A_3	1.56
A_4	509.2
A_5	1.96
A_6	0.99
A_7	0.58
A_8	0.31
A_9	0.10
A_{10}	0.01
A_{11}	0.08
A_{12}	0.24
A_{13}	0.39
A_{14}	0.54
A_{15}	0.68
A_{16}	0.81

(b)

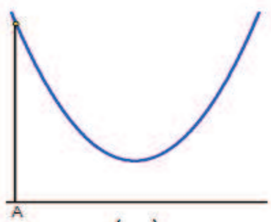
A	subtg
A_1	0.28
A_2	0.42
A_3	1.30
A_4	2.52
A_5	4.59
A_6	9.90
A_7	276.98
A_8	11.37
A_9	4.98
A_{10}	2.72
A_{11}	1.43
A_{12}	0.52
A_{13}	0.19
A_{14}	0.80
A_{15}	1.34
A_{16}	1.93

(c)

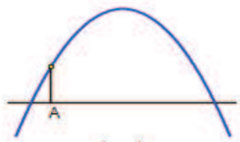
A	subtg
A_1	0.68
A_2	0.52
A_3	0.37
A_4	0.41
A_5	59.73
A_6	0.38
A_7	0.47
A_8	0.72
A_9	1.04
A_{10}	2.15
A_{11}	3.52
A_{12}	9.53
A_{13}	762.25
A_{14}	9.75
A_{15}	2.50
A_{16}	1.02

(d)

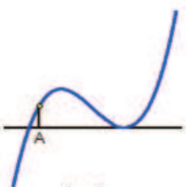
A	subtg
A_1	1.54
A_2	1.34
A_3	1.14
A_4	0.97
A_5	0.86
A_6	0.97
A_7	7.89
A_8	35.92
A_9	1.08
A_{10}	0.85
A_{11}	0.94
A_{12}	1.11
A_{13}	1.30
A_{14}	1.50
A_{15}	1.72
A_{16}	1.93



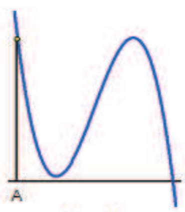
(   )



(   )



(   )

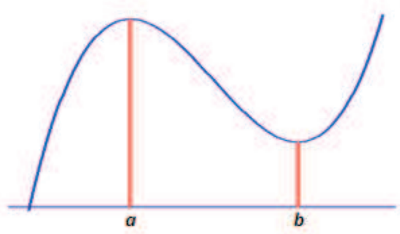


(   )

5. Cuál es el comportamiento de las subtangentes en las curvas dadas

6. Considerando que por cada punto x que se elija, es posible determinar una subtangente, explica cuál es el comportamiento variacional que tienen las subtangentes en la curva *f*.

7. Cómo es el valor de la subtangente en ***a*** y ***b*** de la siguiente curva



8. Analiza el siguiente enunciado, argumentando su validez a partir de las reflexiones anteriores.

   "En esta gráfica existe un punto donde se cumple que la subtangente es la mayor o menor magnitud de entre todas las subtangentes posibles (Castañeda, 2004)".

El diseño propone establecer un vínculo entre la magnitud de la subtangente y el comportamiento de las curvas dadas. Es decir, caracteriza un máximo, mínimo o punto de inflexión de una función a través la variación de las subtangentes. Proponemos también que, la variación de la abscisa determina nuevas magnitudes de las subtangentes. Esta relación puede expresarse a través de una relación funcional en la que la idea de máximo o mínimo aporta elementos para la caracterización del punto de inflexión.

Conclusiones

Hoy en día sabemos que los procesos de institucionalización del saber matemático provocan que ciertos contextos en los cuales surge inicialmente algún concepto matemático pierdan presencia en la mayoría de las aulas actualmente, tal es el caso de la subtangente. De ahí que con esta secuencia didáctica se favorecerá el reconocimiento del comportamiento de las curvas a través de ésta como un argumento que permite determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de las mismas.

Una práctica que se favorece con el diseño didáctico es la manipulación de los elementos geométricos, ya que al variar la magnitud de la abscisa, el sistema geométrico que se ha definido en la curva se modifica y sus cambios son susceptibles a ser cuantificados, más aún cuando la manipulación puede hacerse de forma automática al hacer uso de las herramientas que ofrecen paquetes computacionales como *Cabri Geometre* o *Geometer's Sketchpad*, además de las bondades del pizarrón electrónico mencionadas anteriormente.

La intención de esta investigación es establecer un vínculo entre la matemática escolar y los resultados de investigaciones de corte Socioepistemológico a través del diseño didáctico propuesto haciendo el uso de la tecnología, ya que éste nos permiten mostrar aspectos que favorecen la generación de significados para los saberes matemáticos en cuestión. De forma particular el diseño didáctico que presentamos permite caracterizar una curva a través del uso de la subtangente, al analizar las longitudes de las subtangentes se pueden encontrar los máximos, mínimos y puntos de inflexión en las curvas dadas.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004*). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral R. (2004) Pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En R. Farfán, C. Matías, D. Sánchez y A. Tavarez (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13, 54-62. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Castañeda, A. (2000). *Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y Maria G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 9(2), 253-265.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). D. F., México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Pérez, A. (2008). *Una vinculación de la matemática escolar y la investigación a través de diseños didácticos con el uso de la tecnología*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Chiapas, México.