

EL USO DE PATRONES GEOMÉTRICOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL LENGUAJE SIMBÓLICO EN ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Karla Elizabeth Velasco Martínez, Claudia Margarita Acuña Soto
CINVESTAV, IEMS
kvelasco@cinvestav.mx, claudiamargarita_as@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento algebraico

México

Nivel: Medio

Resumen. *La idea que motiva el presente trabajo se refiere a entender cómo generalizan los estudiantes de bachillerato y qué tipo de pensamiento les permite hacerlo, para ello planteamos a un grupo de estudiantes del IEMS actividades donde se debe identificar un patrón que predice una secuencia geométrica, como un primer acercamiento a la idea de generalización. Este patrón debe ser descrito de forma algebraica (fórmula). En este artículo mostraremos dos tipos de formulaciones distintas construidas por los estudiantes para abordar el problema con distintos tipos de pensamiento que nos permiten mirar aspectos que podrían determinar el éxito o fracaso del desarrollo cognitivo puesto en marcha por los estudiantes.*

Palabras clave: Patrones, manipulables, ecuación, generalización

Marco teórico

Para muchos estudiantes es muy difícil introducirse al manejo del lenguaje simbólico sin antes tener una aproximación personal y directa que sea resultado de sus propias conclusiones, por esta razón en algunos bachilleratos se han incorporado tratamientos de secuencias aritméticas y geométricas donde el objetivo es que logren dar sentido a la fórmula que expresa su comportamiento.

Deseamos entender cómo los estudiantes tratan las series, cómo identifican el patrón que predice el comportamiento de una secuencia de formas, cómo logran formularlo mediante el análisis de la progresión, y finalmente cómo lo concretan en la ecuación que predice toda la secuencia.

Es frecuente la utilización de patrones y la periodicidad con el fin de enseñar algunos aspectos de la matemática, debido a que las secuencias son “fenómenos periódicos comprendidos como un proceso unificado que obedece a leyes” (Shama, 1998, p.273). Estas se emplean con frecuencia para mejorar la comprensión del álgebra, en el área de la biología, por ejemplo, se trabaja con patrones o fenómenos periódicos (Billstein y Williamson, 2002).

En esta actividad se requiere de distintas formas para abordar pensamientos abstractos, por ejemplo, Sierpinski comenta: “In analytic-arithmetic thinking an object is defined by a formula

that allows one to compute it; in analytic-structural thinking an object is best defined by a set of properties.” (Sierpinska, 2000, pág.235).

La interpretación que le damos a este comentario es que los estudiantes suelen razonar el álgebra en dos vertientes: la manera analítica-aritmética donde solamente se siguen fórmulas establecidas repetidamente para resolver los problemas, y la forma analítica-estructural en la cual el razonamiento hace referencia a un tipo de pensamiento más general, que tiene que ver con el proceso de “des-arimetizar” el contenido analizado, es decir, a partir de las propiedades encontradas en las operaciones aritméticas, se trata de generalizar los conceptos e ideas que se extraen de los cálculos.

Suponemos las dificultades que enfrenta el estudiante en el proceso de internalización del conocimiento cuando se trabaja con herramientas que se transforman en instrumentos psicológicos (Falcalde, 2007), debido a que en nuestro trabajo haremos uso de manipulables, palillos de madera y la computadora, con la intención de proveer a los estudiantes de instrumentos que modelen el problema a resolver y que de ser posible sean hechos a un lado para dar paso a el uso de instrumentos psicológicos que describan las generalizaciones que se concretan en la formulación de una ecuación para la serie.

Metodología

La actividad constó de un cuestionario a lápiz y papel, otro cuestionario que incluyó el uso manipulables, palillos de madera que modelan una secuencia, y un tercero en el que se les facilitó la computadora para resolver el mismo problema. En el primero se propusieron 15 preguntas, 4 de ellas son similares a las del curso normal. El resto solicitan que los estudiantes establezcan las ecuaciones que representen las sucesiones de figuras sobre frisos.

En el segundo cuestionario se construyó una sucesión de cuadrados con palillos de madera y se formulan 16 preguntas que permiten focalizar el proceso de crecimiento e identificar las regularidades de la cuadrícula formada por palillos. En la tercera actividad se usó Cabri Géomètre, el objetivo de esta actividad fue observar si el cambio de ambiente tendría un efecto en la formulación de los resultados, es decir, si los facilitaría o no.

En todas las tareas se solicitaba que se observaran grupos de dibujos a los cuales se les llamó pasos, de éstos se requiere detectar las diferencias entre los dibujos y observar las formas que permiten pasar de un paso a otro que dependerá de por ejemplo el número de vértices, de segmentos de línea que los forman para, finalmente, formular las relaciones de crecimiento con lenguaje simbólico.

Hoja de trabajo de Jimena	Hoja de trabajo de Celita
<p>Handwritten work by Jimena showing diagrams of a grid with points and sticks, and numerical calculations for the number of sticks and points in different steps.</p>	<p>Handwritten work by Celita showing a list of points ($P_1 = 4, P_2 = 12, P_3 = 24, P_4 = 40, P_5 = 60, P_6 = 84, P_7 = 112, P_8 = 144, P_9 = 190, P_{10} = 220$), a sequence of equations ($P_x - P_{x-1} =$), and a sequence of equations ($P_n X + 4 = P_n X + 1$).</p>

Fig. 1 Hojas de trabajo de Jimena y Celita

Resultados y análisis

A continuación describimos el trabajo desarrollado por dos de las estudiantes involucradas en este proceso, Jimena y Celita. Las estudiantes fueron elegidas por su capacidad argumentativa a lo largo del desarrollo de las clases y por su alto aprovechamiento de los conceptos compartidos en la materia.

Tabla 1. Relación de las actividades cognitivas desarrolladas por Jimena y Celita

Actividad cognitiva	Jimena	Celita
Organización de la información	Analizando la información por medio de un conteo que le permite a su vez realizar operaciones aritméticas.	Observaciones de regularidad que le permiten generalizar incluso con lenguaje simbólico.
Detección de regularidades	Parece que sólo se concretaba en hacer cuentas y tratar de obtener de ellas una interpretación de lo que ocurría.	Análisis profundo de la información que identifica en las regularidades e inclusive identifica un patrón dentro de otro patrón.
Descripción figural de regularidades	En secuencias numéricas aparece el uso de un signo que une dos elementos y en el vértice anota la diferencia en el paso. En la secuencia de palillos usa una cuadrícula con sintagmas que la confunden.	En secuencias numéricas aparece el uso de un signo que une dos elementos y en el vértice anota la diferencia en el paso. En la secuencia de palillos usa una cuadrícula sin sintagmas, solo hace anotaciones sobre las relaciones.
Uso de el instrumento (palillos)	Su uso mejoró el acercamiento a la descripción de las regularidades utiliza sintagmas que la confunden.	El pensamiento dominante parece ser la formulación de expresiones simbólicas, utiliza una cuadrícula pero no usa sintagmas.
Descripción simbólica de regularidades	Diagramas de regularidades.	Diagrama de regularidades, tabla de resultados y ecuación de regularidades
Uso del instrumento (computadora)	Siente más confianza con la actividad a lápiz y papel.	La pantalla es tratada con indicaciones como una hoja de papel.
Tipo de pensamiento	Analítico-aritmético.	Analítico-estructural.

En lo que respecta al trabajo de nuestras dos estudiantes consideramos que Celita desarrolló un pensamiento del tipo aritmético-estructural descrito por Sierpiska, es decir que pasa de las observaciones aritméticas a un pensamiento más general que la llevo a deducir ecuaciones para generalizar lo que describió en sus respuestas.

Jimena no llegó a la representación simbólica de los datos analizados, pues solo respondía a casos particulares. En cambio a Celita aunque comenzó con la misma técnica que Jimena, contabilizando y haciendo operaciones aritméticas para analizar las relaciones (tabla 1), al no tener contacto con el uso de los palillos en una parte de la actividad, se vio forzada a “des-arimetizar” el problema y emplear sus propios recursos para la obtención de formulaciones simbólicas.

En cierto momento a Jimena le costó mucho trabajo expresar sus conclusiones y argumentar los pasos que desarrolló para resolver las actividades, pero el uso del material tangible (palillos) colaboró en mejorar un poco las justificaciones que ofrecía en sus respuestas.

Por otro lado Jimena trabaja de manera que se pudiera catalogar como analítica-aritmética, pues sólo trabaja con los datos aritméticos operativamente recurriendo en varias ocasiones a la repetición de procedimientos y no logra desarrollar un pensamiento que la lleve a transformar sus observaciones en expresiones simbólicas, la insistencia en el tratamiento operacional no le permitió desarrollar el razonamiento sintético necesario para la formulación simbólica.

Al aplicarle el cuestionario que emplea los palillos, Celita mostró una mayor comprensión del proceso que estudiaba, le permitió no usar tantas operaciones para llegar a la solución de las actividades que se le plantearon, ello contribuyó para que la estudiante expresara mediante una tabla los datos que obtenía de su estudio y así planteó finalmente las ecuaciones que resolvían las actividades.

Celita mencionó que los tres cuestionarios se le hicieron iguales, pues en algunas cosas se confundía, sin embargo durante la aplicación se observó que le costó más trabajo desarrollar el cuestionario con la herramienta del software, parece que se debía a la escasa experiencia en el manejo del ratón para la construcción de los segmentos que describirían las imágenes de los pasos y el nulo conocimiento del software, a pesar de que previa a la aplicación se le dio una breve introducción al manejo de las herramientas.

Por otra parte, Jimena no empleó la herramienta del software, pero al final de la aplicación se le cuestionó pidiendo su opinión sobre el empleo de la computadora en la solución de las actividades parecidas a las que desarrolló y el comentario que refiere es interesante:

“Yo prefiero el cuestionario uno (refiriéndose al que solicitaba contestar preguntas sin el uso de materiales tangibles), porque . . . , valla se me hace más sencillo, más simple, más Pues ¡sí!, se me hace más sencillo, más útil, porque tengo la hoja y puedo rayar y puedo poner lo que entiendo y poner los datos y alguna seña o algo así de lo que estoy utilizando y en la computadora, pues no, . . . , no podría hacer eso”.

Finalmente se aplicó a Celita el cuestionario que emplea la tecnología de lápiz y papel; donde expresa con mayor fluidez fórmulas para llegar de forma más eficaz a las respuestas solicitadas en

cada pregunta, además fue capaz de comprobar que éstas funcionaran adecuadamente; en las últimas preguntas de este cuestionario se nota visiblemente el dominio de uso del lenguaje simbólico propio del álgebra, pero sin dejar de mostrar tintes propios del vocabulario de la estudiante, es decir se nota que emplea su propio lenguaje para expresar fórmulas que generalizan los resultados que se le pedían.

Discusión

De ambas observaciones en las aplicaciones de los cuestionarios se concluye que el razonamiento analítico-estructural descrito por Sierpinska (2000) se alcanza después de comprender los procesos que determinan las operaciones que actúan sobre los objetos observados, en este caso sobre las relaciones entre los elementos de las secuencias presentadas a las estudiantes. Y que el análisis detallado de los patrones conduce a la creación de un lenguaje simbólico que contribuyó en la argumentación de los pasos dados en la construcción de las soluciones presentadas como ecuaciones.

En términos generales se observan que en los resultados de ambas estudiantes se encuentra inmersa la observación y el análisis de la información que arrojan las regularidades de las secuencias descritas por los resultados de los ejercicios propuestos, lo cual sirvió de alguna manera en la generalización de algunos patrones (para el caso de Jimena) y para la obtención de expresiones simbólicas (para el caso de Celita).

El análisis de los resultados presentados por Celita y Jimena respecto al manejo de las secuencias y la información que de ella se deriva, nos sugiere dos formas de enfrentar la tarea de interpretar los patrones: organizar la información y abordar finalmente una generalización.

Como producto de la aplicación de la investigación se observó que la forma en que cada estudiante contabilizaba tanto los puntos (vértices de los pasos) así como los segmentos de línea (lados de los pasos) que formaban cada figura, les ayudaba a contabilizar el cambio en los pasos, sin embargo el uso desordenado de este instrumento también podía constituir un obstáculo.

Respecto a las estrategias de solución vemos que aunque ambas detectan los cambios en la secuencia esto no es suficiente para concretarla en la expresión simbólica. En el caso de Jimena, supone que la solución se obtiene a partir de las posibles operaciones realizadas con los datos, en

cambio Celita detecta la regularidad y logra formularla aritméticamente, procedimiento que le permite finalmente abordar el pensamiento analítico-estructural.

Esto muestra que el proceso de generalización no se establece solo a partir de la detección de las regularidades del proceso observado, la interpretación de los datos puntualmente, es decir como un cambio que se verifica de uno en uno, impide la mirada global que permitiría una idea de regulación general para todo los casos observados.

El uso de la computadora no nos permitió observar cambios apreciables en las formas de resolver el problema, posiblemente por los obstáculos que representó su falta de pericia, por lo que consideramos que esta parte del programa de trabajo no dio resultados observables.

Referencias bibliográficas

Billstein R., Williamson J. (2002). Patterns and discoveries. En R. Billstein & J. Williamson (Eds.). *Teacher's Edition. Middle Grades MATHematics*. (pp. 238-317). Evanston Illinois: Mc Dougal Littell.

Falcade R., Laborde C., Mariotti M. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies Mathematics*, 66, 317 – 333.

Quiles M. (2006). Dominio Abstracto. En M. Quiles (Ed.). *Pienso Razono y Reflexiono 6 de primaria* (pp. 96-171). México: Trabajos Manuales Escolares (ME).

Shama G. (1998). Understanding periodicity as a process whit a Gestalt structure. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 255-281.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En Dorier J.L. (Ed.). *En On the Teaching of Linear Algebra*. (pp.209-246). Dordrecht. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Warren E., Cooper T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 years olds thinking. *Educational Studies Mathematics*, 67, 171-185.

Zotelo B. (2006). Secuencias y series. En Zotelo B. (Ed.). *Razonando 5° primaria. Redes Cognitivas y Dominios*. (pp. 158-161). México: Trabajos Manuales Escolares (ME).