Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas.

Luis Rico
Encarnación Castro
Isabel Romero

Departamento Didáctica de la Matemática.
Universidad de Granada. España.

1. Introducción

Es de dominio general que las disciplinas matemáticas están dedicadas al estudio de las estructuras formales y de sus aplicaciones. Las matemáticas tienen como campo de trabajo una serie de conceptos y procedimientos obtenidos por sucesivos procesos de abstracción y generalización, y que se representan simbólica o gráficamente; sus reglas de procesamiento interno poseen un alto grado de formalización, y la organización deductiva de sus relaciones se configura por mecanismos estrictos de prueba y control llamados demostraciones. Pero las estructuras formales no agotan el campo de interés de las matemáticas. En una perspectiva mas amplia las matemáticas estudian los modelos y patrones, en general: "*Las matemáticas estudian los patrones y modelos en sí; cualquier cosa en el cosmos satisface a una clase de modelo. Los patrones de las matemáticas se pueden agrupar ampliamente en cinco arquetipos: Número, Espacio, Lógica, Infinito e Información"* (Rucker, 1987). Es por ello que la matemática se puede considerar como la *ciencia de las estructuras significantes*; bajo esta consideración "*la matemática estudia la representación de una estructura por otra y gran parte del trabajo actual de la matemática consiste en determinar exactamente qué estructura se preserva en cada representación. Cada representación es formalmente independiente de los símbolos externos utilizados debido a que la propia estructura se trata como una abstracción o idealización"* (Kaput, 1987).

La dimensión cognitiva y el aprendizaje establecen la perspectiva con la cual queremos aproximarnos al conocimiento matemático, es decir, a ese conjunto de conceptos, procedimientos, procesos de abstracción, reglas formalizadas, representaciones y demostraciones a los que llamamos matemáticas, tal y como son entendidas e interpretadas por sujetos en edad escolar durante su etapa de formación. Usualmente, en estos contextos tales conocimientos se denominan matemáticas escolares.

Dentro de la aproximación cognitiva a las matemáticas escolares, este trabajo se centra sobre la noción de representación.

Las representaciones matemáticas las entendemos en sentido amplio, como aquellas herramientas -signos o gráficos- mediante las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados a las estructuras matemáticas. Las representaciones son parte esencial del proceso de aprendizaje de las matemáticas y conectan los objetos mentales con los objetos matemáticos. "*Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (...) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas*" (Hiebert y Carpenter, 1992).

El trabajo con representaciones se considera como una actividad usual en matemáticas; los modos de expresión de conceptos y leyes matemáticas vienen dados mediante representaciones simbólicas o gráficas. Las pruebas y demostraciones necesitan convertir determinadas expresiones de un modo de representación a otro alternativo. También las representaciones desempeñan un papel destacado en los procesos de construcción de conceptos y, por ello, son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático; de ahí el interés que tienen para la investigación en Educación Matemática (Hitt, 1997).

Nos proponemos en este trabajo presentar algunas consideraciones sobre la noción de representación y mostrar su utilidad para analizar la complejidad que se presenta en la comprensión de dos estructuras matemáticas importantes: las nociones de sucesión y término general de una sucesión de números naturales y la noción de número real.

2. Finalidad y antecedentes del trabajo

2.1 Un ejemplo

La riqueza de la noción de representación en el manejo del conocimiento matemático se puede evaluar mediante un sencillo experimento mental. Pensemos en un número cualquiera no muy grande, por ejemplo 15; tomemos una hoja en blanco y anotemos sobre ella todas las imágenes, notaciones, dibujos, frases y símbolos que nos vengan a la cabeza y que asociemos con 15, que *representen* a 15.

Pronto veremos que el número de las representaciones obtenidas es muy amplio; si compartimos nuestra información con las de otras personas podemos comprobar que la lista se prolonga extensamente y que entran a formar parte de ella conocimientos muy variados, que dependen de nuestra formación matemática y de nuestro manejo profesional o cotidiano con los conceptos numéricos. Tenemos acceso así a un dato empírico: la riqueza y variedad de representaciones para los conceptos matemáticos conocidos; en particular, para los conceptos numéricos.

Todas las representaciones obtenidas en nuestro experimento mental tienen algo común: expresan de algún modo la noción de un número concreto, en nuestro caso de 15. También cada representación se manifiesta mediante un acto, una imagen o un símbolo: tiene una manifestación externa.

Las representaciones están interconectadas: cada una de ellas muestra un aspecto relevante del concepto 15. Al mismo tiempo, si las evaluamos aisladamente, observamos que cada una de las representaciones forma parte de un sistema diferente. Aunque algunas sean más usuales o familiares que otras, ninguna de ellas agota nuestro concepto de 15, más bien dicho concepto se enriquece por la presencia de nuevos tipos de representación. En conjunto, establecen el campo de significados que puede tomar un número concreto, en este caso 15; desde una posición pragmática este conjunto de significados es el concepto de número 15, lo que se entiende por 15.

Una inspección somera de las representaciones escritas sobre el papel permite aceptar la clasificación general de las representaciones en dos grandes familias: representaciones simbólicas y representaciones gráficas; podemos aplicar esta clasificación a nuestros ejemplos concretos y dividir nuestra lista en dos apartados diferentes según este criterio. Aún cuando todas las producciones que hemos realizado sobre 15, aparentemente, no tengan importancia formal, podemos observar el interés que tienen las imágenes visuales y las representaciones gráficas para expresar los conceptos numéricos.

No todas las representaciones tienen la misma potencialidad, sólo algunas expresan características estructurales del número considerado. Nos centraremos en las representaciones válidas para un sistema numérico.

2.2 Objetivo del trabajo

La moderna conceptualización de los números está basada en la noción de sistema; hablando con cierta precisión no nos referiremos a conceptos numéricos, simplemente, sino a sistemas o estructuras numéricas. Una estructura numérica es un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componer números y de unas relaciones mediante las que se comparan y organizan dichos entes; la consideración conjunta de los entes, sus operaciones y sus relaciones es lo que caracteriza una estructura numérica (Feferman, 1989).

La representación de una estructura numérica ha de tener tambien carácter sistémico (Kaput, 1987), por ello hablamos de sistema o sistemas de representación cuando nos referimos a una estructura numérica en su totalidad. Como acabamos de ejemplificar, cada estructura numérica puede expresarse mediante una diversidad de sistemas de representación.

Objetivo central del trabajo que aquí presentamos es poner de manifiesto la pluralidad de sistemas de representación mediante los que se expresan las estructuras numéricas y la necesidad de contar con ellos a lo largo de los procesos de aprendizaje de tales estructuras. En especial, queremos destacar el carácter ineludible de las representaciones gráficas para comprender las estructuras numéricas y para asignar significados a los diferentes conceptos y procedimientos involucrados.

Sostenemos que cada sistema numérico, como complejo de entes, relaciones y operaciones, no puede expresarse ni entenderse en su totalidad mediante un único sistema de representación, por muy sofisticado que éste sea; por ello, la enseñanza y aprendizaje de los sistemas numéricos hay que abordarla desde la coordinación de varios sistemas de representación complementarios.

Afirmamos que la comprensión de los conceptos numéricos, de las relaciones entre números y de las operaciones convencionales necesitan de la actuación coordinada de varios sistemas de representación, de manera que se pongan de manifiesto aspectos esenciales de las estructuras correspondientes. En particular, las representaciones gráficas desempeñan un papel esencial para dotar de significado a las estructuras numéricas (Rico y cols., 1996).

Nos proponemos aportar algunos datos que muestren la utilidad interpretativa de las ideas anteriores. La información procede de los casos, reflexiones y hallazgos surgidos de dos investigaciones llevadas a cabo por nosotros. La primera de ellas: "*Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*" (Castro, 1994) estudia la integración de tres sistemas de representación para los números naturales, con el fin de profundizar sobre las relaciones y procedimientos implicados en la noción de sucesión de números naturales y en la de término general de una sucesión; este estudio se ha realizado con escolares de 12-13 años. La segunda investigación: "*La introducción al Número Real en Secundaria*" (Romero, 1995), analiza la comprensión de escolares de 14-15 años y sus limitaciones, así como la construcción social de significados en el sistema de los números reales, cuando se trabaja coordinadamente con cuatro tipos de representaciones para tal sistema.

2.3. Antecedentes

El interés general del objetivo enunciado se ha puesto de manifiesto reiteradamente en diversos estudios e investigaciones llevados a cabo dentro del campo de la Didáctica de la Matemática en los últimos años. Desde comienzos de los 80 hay dos campos conceptuales cuyo estudio sostenido se inicia en base a la noción de representación.

Uno de estos campos es el relativo al concepto de función; en los estudios realizados sobre este concepto se destacan los diversos sistemas de representación para las funciones y la detección de algunas dificultades de comprensión sobre este concepto debidas a problemas de traducción entre dichos sistemas. Los estudios de Janvier, que culminan en su tesis en 1978, están entre los más conocidos, dando lugar posteriormente a los materiales elaborados por el Shell Centre de la Universidad de Nottigham (1986), en los que se aborda una enseñanza por diagnóstico sobre este campo conceptual, basada en las representaciones gráficas.

El segundo de los campos de estudio trabaja sobre el concepto de número racional, también sobre la base de considerar y analizar diferentes sistemas de representación para este conjunto numérico. Los trabajos de Behr, Lesh, Post y Silver (1983) se encuentran entre los pioneros en el estudio de este conjunto numérico, campo sobre el que aún se continúan ofreciendo resultados productivos, Carpenter, Fennema y Romberg (1993), Kieren (1996).

En 1984 se celebra un simposio en la Universidad de Québec en Montreal, organizado por el CIRADE, para presentar y discutir las últimas etapas de un proyecto de investigación sobre representación. Resultado de este simposio es el documento "*Problems of Representation in the Teaching and Learnig of Mathematics*" (1987), en el que se plantea el estado de la cuestión y la potencialidad para la investigación en Educación Matemática del concepto en estudio.

El interés del tópico también se ha puesto especialmente de manifiesto por la existencia del *Working Group on Representations*, en el seno del *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, desde 1990 hasta 1995.

Desde una aproximación semiótica, el profesor Duval de la universidad de Estrasburgo, ha venido trabajando sobre la noción de representación y la comprensión de los *objetos* matemáticos desde comienzos de la década de los 80; su trabajo *Semiosis y Noesis* (1993) es una aportación valiosa en este sentido.

En la obra colectiva *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (1994), el concepto de representación se trabaja y emplea extensamente: "*La representación de hechos y relaciones es un aspecto muy importante del aprendizaje y el pensamiento matemático, por ello los educadores matemáticos han estado fuertemente interesados en la investigación psicológica que contribuye a la comprensión de las representaciones*" (Fey).

Vemos pues que la noción general de representación es compleja y que se ha utilizado en la investigación en Didáctica de la Matemática de manera productiva. Antes de presentar los resultados de nuestros trabajos vamos a precisar algunas de las ideas implicadas en esta noción, consideraremos algunas distinciones que nos parecen relevantes y delimitaremos el marco conceptual en el que trabajamos.

3. Análisis conceptual

La riqueza del concepto de representación se pone de manifiesto en el Vocabulario Científico y Técnico de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, donde aparecen 27 entradas diferenciadas para este término. Nuestro interés se concreta porque el término representación se utiliza en matemáticas, cognición y epistemología.

3.1 Caracterización general

La historia de la filosofía y de la ciencia muestran la riqueza de sentidos e interpretaciones que tiene este concepto (Ferrater, 1981), algunos de los cuales son importantes para las actuales líneas de investigación en educación matemática (Goldin, 1993).

Un primer punto de interés para nosotros está en la idea de que una representación es siempre representación de algo. El *concepto de representación da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas*. Uno de estos entes se denomina el objeto *representante* (o representación), el otro es el objeto *representado*; también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados.

De esta manera, "*cualquier especificación particular de la noción de representación debiera describir, al menos, cinco entidades:*

1º los objetos representados,
2º los objetos representantes,
3º que aspectos del mundo representado se representan,
4º que aspectos del mundo representante realizan la representación,
5º la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.

En buena parte de los casos importantes uno o ambos de los mundos pueden ser entidades hipotéticas e, incluso, abstracciones" (Kaput, 1987).

Una lectura superficial, pero peligrosa desde nuestro punto de vista, de las ideas anteriores permitiría deducir un planteamiento realista para los conceptos matemáticos, como objetos con existencia propia en algún mundo conceptual trascendente a los cuales solo tenemos acceso mediante sus representaciones. No es esa la idea que sostenemos, ni es esa la discusión que aquí nos tiene. Nuestra interpretación es mas sencilla: como sistemas de representación todos ellos son parciales, ningún sistema de representación matemático agota los conceptos que representa; por ello conviene distinguir entre los conceptos y sus significados o aspectos más o menos parciales que aportan las representaciones.

Por lo que a nuestro estudio se refiere, consideramos necesario distinguir entre los conceptos y estructuras numéricas y los sistemas de representación mediante los que se expresan tales conceptos y estructuras. Así, por ejemplo, cuando el profesor de matemáticas identifica los números naturales con los numerales, que se obtienen mediante las reglas de escritura de números del sistema decimal de numeración, olvida con frecuencia que la escritura decimal es sólo una forma de representar números, enunciados y demostraciones numéricas, mediante combinación lineal de las sucesivas potencias de 10, y no debe transmitir a sus alumnos tal impresión. Las relaciones y propiedades de los números no se limitan a las que se destacan con el sistema decimal de numeración. El Teorema Fundamental de la Aritmética propone una representación diferente de cada número como producto de factores primos, que muestra su estructura multiplicativa. Iguales consideraciones se pueden hacer sobre la identificación entre la notación decimal infinita de los números y los números reales.

Desde una perspectiva cognitiva esta reflexión implica que cada concepto o estructura numérica necesita para su total comprensión del empleo y juego combinado de más de un sistema de representación. Aunque no es usual, nosotros consideraremos cuáles son los aspectos y propiedades de los números, naturales o reales, que se destacan mediante cada tipo de simbolización. Cada uno de los modos de representación de los números naturales, o reales, junto con las reglas que los acompañan, propone una caracterización distinta del correspondiente concepto de número. Identificar los números con cualquiera de sus notaciones es una simplificación escolar, inadecuada para la investigación en educación matemática. Por ello diferenciamos entre los números y sus representaciones.

Una segunda idea importante para nosotros es el uso, en la filosofía contemporánea, del término *representación* para referirse a *cualquier cosa que puede evaluarse semánticamente* (Dancing y Sosa, 1993). De las representaciones puede decirse: que son verdaderas, que se refieren a, que son verdaderas de algo, que son acerca de algo, que son precisas, etc. *Contenido es* el término técnico utilizado para denominar *aquéllo que en una representación la hace semanticamente evaluable*; así, de un enunciado se dice que tiene como contenido una proposición o condición de verdad; de un término se dice que tiene un concepto como contenido; de una gráfica que expresa una relación adecuada entre sus componentes. Desde este planteamiento son representaciones las expresiones simbólicas, enunciados, diagramas, gráficos y otras notaciones usuales de las matemáticas ya que cada una tiene un contenido cuyo significado se puede evaluar; estos contenidos son objeto de estudio en matemáticas.

3.2 Representación y cognición

Desde el interés de la educación matemática hemos de considerar los conceptos matemáticos conectados con la actividad mental de las personas. Siguiendo a Wittgenstein (1988), cuando éste reflexiona sobre los "diversos juegos de lenguaje matemáticos" y entre ellos el concepto de número (op. cit. §§ 65-68), sostenemos que cada concepto matemático viene establecido por sus diferentes significados y usos y, por tanto, por sus representaciones. Son los usos de cada concepto los que establecen por extensión su campo semántico, y cada modo significativamente distinto de entender un concepto necesita de un sistema de simbolización propio, de algun modo de representación para ser distinguible. Encontramos de nuevo la distinción entre representaciones internas y externas. Las *representaciones internas* u objetos del pensamiento, ubicados en las mentes individuales de los sujetos, son distintas de las *representaciones externas, de carácter semiótico*, dadas por signos, símbolos o gráficos, de las que hemos hablado en el apartado anterior.

El uso de la noción de representación para caracterizar los estados mentales y las actividades de los sujetos constituye un dato destacable en el desarrollo reciente de la Psicología Cognitiva (Guttenplan, 1994). Asumimos que los procesos cognitivos son aquellos procesos que manipulan representaciones. Una diferencia esencial entre los procesos cognitivos y los que no lo son es, precisamente, que los primeros se pueden valorar epistémicamente. Dado que sólo algo con contenido puede evaluarse epistémicamente, sólo pueden considerarse como cognitivos los procesos en tanto que implican representaciones. En el desarrollo de los procesos, que implican pensamiento numérico por parte de los sujetos, resulta esencial un dominio mental adecuado de las representaciones externas, lo cual potencia la comprensión de los conceptos numéricos.

Siguiendo a Wittrock (1990), consideramos que la comprensión es*"una representación estructural o conceptualmente ordenada, de las relaciones entre las partes de la información que se debe aprender, y entre esa información y esas ideas y nuestra base de conocimientos y experiencia".* Los distintos sujetos presentan comprensiones diferentes sobre un mismo concepto o estructura matemática debido a que sus representaciones mentales tienen contenidos diferentes. La relación entre las representaciones internas y las externas es clave en el estudio de los fenómenos de comprensión.

3.3. Noción de representación

En este trabajo la noción de representación externa la vinculamos con los signos, notaciones, figuras y expresiones usuales de las matemáticas.

Representaciones matemáticas son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes. Por ejemplo: la *notación decimal* para la escritura de los números reales; el *diagrama cartesiano*, que asigna un punto del plano a cada pareja de números; los puntos de la *circunferencia unidad*, con centro en el origen, cuyas coordenadas representan valores de las funciones seno y coseno. Las notaciones simbólicas pueden alcanzar gran complejidad, por lo general se basan en signos alfanuméricos estructurados; las gráficas se basan en combinaciones de figuras o iconos, también estructuradas (Castro y Castro, 1997).

3.4. Tipos de representaciones

Se postula que los signos, gráficos o notaciones, con soporte físico externo, que usamos para la representación tienen un equivalente en la mente del sujeto que los utiliza, lo que hace necesario distinguir entre *representaciones externas* y *representaciones internas*. Las relaciones existentes entre estas dos modalidades de representación las expresa Duval (1993) en los siguientes términos: desde un punto de vista genético, las representaciones mentales y las representaciones externas no pueden verse como dos dominios diferentes. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de la representaciones externas; la diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y, por consiguiente, su capacidad de pensamiento sobre ese objeto o concepto. De manera recíproca, las representaciones externas, como son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el que los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás.

Las representaciones externas juegan, desde este punto de vista, una doble función:

a) actuan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales,

b) permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

Dependiendo del tipo de símbolos, gráficos o notaciones con los que un estudiante interactúe en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático, dará lugar a unos tipos determinados de representaciones internas del mismo. De igual manera, las vías que un sujeto utilice para representar externamente un concepto sirven para monstrar, generalmente, cómo es la información que posee sobre tal concepto.

Dentro de las reprentaciones externas se suelen distinguir dos grandes familias: las *representaciones digitales*, discretas, de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas infórmaticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento, y las *representaciones analógicas*, contínuas, de tipo gráfico o figurativo, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación. En matemáticas estas dos familias se denominan, comúnmente, representaciones o sistemas de representación simbólicos y sistemas de representación gráficos, respectivamente. Estos planteamientos llevan a incluir las diferentes escrituras simbólicas, el lenguaje natural (enunciados), las figuras y gráficos, las tablas, cuadros y las notaciones algorítmicas que expresen un modo de operar como sistemas de representación en matemáticas (Rico, 1995).

4. Sucesiones, números naturales y sistemas de representación

4.1. Sistemas de representación para los naturales

El Sistema Decimal de Numeración es una potente herramienta matemática, producto de una larga evolución histórica, inspirada por principios de economía no sólo semiótica sino operatoria, mediante la cual el hombre ha dado cauce y expresión a sus capacidades de contar, clasificar, medir y ordenar. En nuestra sociedad actual el dominio de este sistema es un hecho cultural básico; su conocimiento establece uno de los criterios para determinar que un ser humano ha adquirido las capacidades elementales que le permiten ocupar una posición intelectualmente digna en la sociedad. De ahí la importancia concedida en los sistema educativos a la transmisión y aprendizaje de la numeración decimal y de las operaciones aritméticas elementales, utilizando como sistema de representación exclusivo el Sistema Decimal de Numeración; el resto de las representaciones numéricas tienen, en el medio escolar, un carácter esporádico y anecdótico.

De este modo se llega a identificar cada uno de los números con su notación decimal y el conjunto de los naturales con la secuencia numérica. Tal identificación, aunque culturalmente útil, práctica y económica, no deja de suponer un empobrecimiento y una limitación en el aprendizaje de los números naturales.

4.2. Análisis aritmeticos

El carácter dinámico del sistema de los números naturales queda bloqueado por la inercia de la representación decimal usual; dicho carácter dinámico del conjunto de los números considera que estos entes se determinan por sus relaciones mutuas. Así, conocer o saber lo que significa, por ejemplo, 15 no consiste sólo en leerlo como 1 decena y 5 unidades; también en interpretarlo como 3 veces 5, 5 veces 3, siguiente a 14, anterior a 16, suma de dos números consecutivos: 7+8, suma de tres números consecutivos: 4+5+6, suma de cinco números consecutivos: 1+2+3+4+5, pero en ningún caso suma de cuatro números consecutivos, anterior a un cuadrado: 4^2- 1, suma de dos números por su diferencia: $(4+1)\cdot(4-1)$; mitad de 30: 30/2; etc. Desde esta perspectiva, cada número es un nudo en el que se entrelazan una multiplicidad de relaciones, es un elemento de una red compleja fuertemente conectada, cuyo mayor o menor dominio determinará la comprensión real que cada sujeto alcance del sistema de los números naturales (Rico, 1995).

Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto que, sobre la base de la notación decimal, hay otros sistemas de representación para los números naturales. Uno de ellos es el *análisis aritmético de los números*, considerando cada número como suma o como producto de números más sencillos. Los ejemplos anteriores son análisis aritméticos del número 15.

4.3. Sistemas gráficos

No hemos tenido aún en cuenta modos de representación gráfica. La recta númerica es la representación gráfica estándar. Sobre una recta cualquiera elegimos dos puntos arbitrarios a los que asignamos los valores 0 y 1; por convenio, el punto que corresponde a 0 está situado a la izquierda del punto que corresponde a 1:

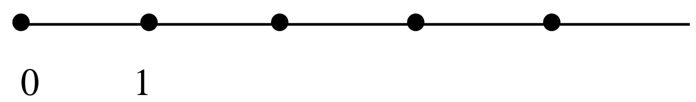


Figura 1

A partir de 1 y hacia la derecha, se van marcando puntos que guarden entre sí la misma distancia que los dos puntos iniciales sobre los que se van señalando, consecutivamente, los números naturales. Esta representación es un artefacto útil, cuyo empleo para el dominio del sistema de los números naturales ha sido estudiado detalladamente (Resnick, 1983) y cuyo interés para la comprensión de los números reales tendremos en cuenta más adelante.

4.4. Configuraciones puntuales

La historia nos informa de otro sistema gráfico de representación para los naturales, descuidado por el currículo escolar de matemáticas. Nos referimos a las configuraciones puntuales, utilizadas para representar números figurados y que tuvieron su origen y desarrollo en el concepto de número de la escuela pitagórica.

Para los pitagóricos el número no era simplemente una etiqueta para una colección, el símbolo de una cantidad o una construcción intelectual, sino algo que tenía consistencia en sí mismo; los números eran como una suerte de átomos que, en sus diversas composiciones y relaciones, dan la esencia misma de lo que es la variedad del mundo existente.

Esta noción del número tuvo su mejor instrumento en el sistema de representación que conocemos como configuraciones puntuales o números figurados, diferente totalmente de los sistemas de numeración al uso (Radford, 1995).

La idea básica de este sistema de representación es considerar cada número como un agregado de puntos o unidades distribuidos sobre una trama isométrica, según una figura geométrica plana o espacial. De este modo aparecen números triangulares, cuadrados, rectangulares, pentagonales, piramidales y cúbicos, tantos como variantes de figuras geométricas se consideren, que facilitan pensar en cada número como un todo organizado según una estructura determinada.

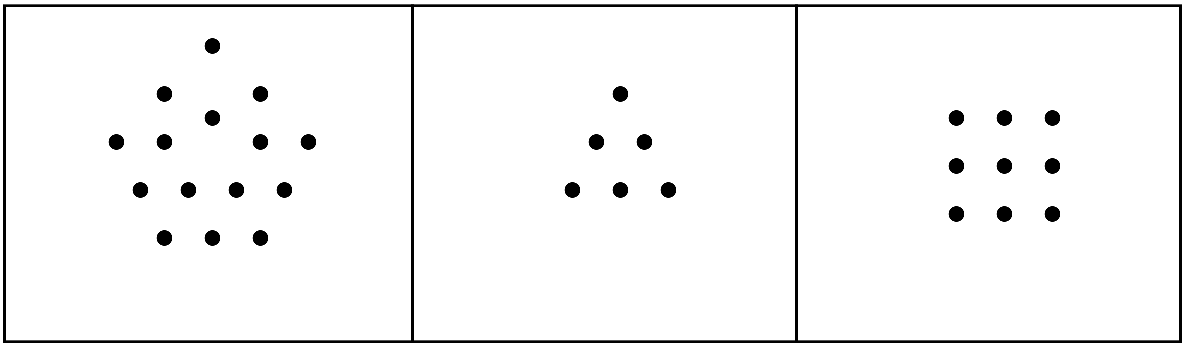


Figura 2

Precisando:

Las *configuraciones puntuales* son un sistema de representación de números, basado en:

un único símbolo: el punto;

un espacio estructurado de representación, usualmente la trama cuadrada o la trama isométrica cuando trabajamos en el plano,;

un modo de organización de la cantidad de puntos que satisface criterios de simetría o regularidad convenidos y que se pueden explicitar de manera sencilla.

Estas tres condiciones establecen un nuevo *sistema de representación de números* (Beiler, 1966), cuya ventaja consiste en proporcionar una multitud de expresiones gráficas de un mismo número, mediante las que se hace una valoración visual y un análisis de diferentes estructuras aritméticas del número

Al organizar geometricamente las unidades que componen un número, se consiguen dos informaciones importantes sobre ese número. En primer lugar, se visualiza un análisis aritmético del número: un número triangular es una suma de números consecutivos comenzando desde 1, un cuadrado es el producto de un número por sí mismo, un rectangular es producto de dos números; este análisis permite conocer determinadas propiedades del número en cuestión y relacionarlo con muchos otros, facilitando así el dominio de los naturales como sistema, cosa que no se logra con el sistema decimal de numeración. Un mismo número puede considerarse perteneciente a varios tipos de números figurados; así, nuestro ejemplo de referencia 15 es un número triangular, pero también es rectangular de diferencia 2, es un número trapezoidal, y le falta una unidad para ser un cuadrado. Cada número aparece como resultado de las diversas operaciones por las cuales se alcanza; esas operaciones establecen la configuración del grupo de puntos que constituyen el número.

En segundo lugar, distintos números comparten la estructura que representa cada tipo de configuración puntual. El análisis aritmético que expresa la configuración correspondiente se convierte en una propiedad común de todos estos números, que puede generalizarse. De este modo el sistema de representación mediante configuraciones puntuales es un instrumento para establecer propiedades generales de los números y descubrir nuevas relaciones entre ellos.

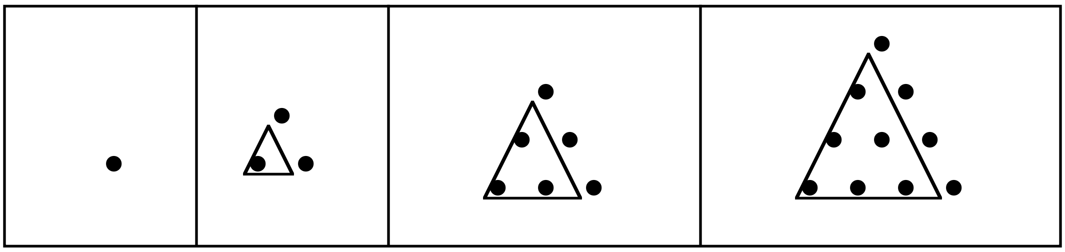


Figura 3

Este sistema de representación permitió históricamente a los matemáticos establecer propiedades numéricas generales e identidades algebraicas sin disponer del aparato simbólico del álgebra. El uso de números figurados lo encontramos a lo largo de la historia de la Teoría de Números.

4.5. Noción de sucesión

El concepto de sucesión de números naturales es un concepto complejo, en cuya base se encuentran las nociones de conjunto totalmente ordenado con primer elemento y de proceso infinito: para todo término de la sucesión hay un siguiente. Cuando se presentan varios términos de una sucesión y se pide continuarla la propuesta consiste en encontrar nuevos números que mantengan unas determinadas relaciones con los términos conocidos, similares a las que éstos mantienen entre sí. Son varias las maneras mediante las que pueden relacionarse un número limitado de términos; para la pregunta: "1, 2, 4,.. ¿cuál es el siguiente?" hay una multiplicidad de respuestas posibles. Conforme se incrementan los términos conocidos de una sucesión las posibilidades de encontrar relaciones distintas se van limitando y las opciones conocidas para continuar la secuencia se reducen. Reconocer las relaciones que se dan entre los términos conocidos de una secuencia permite, en ocasiones, obtener nuevos términos, es decir, continuar la secuencia. Sin embargo, la caracterización de una sucesión la da su término general (Rico y otros, 1996).

4.6. Término general de una sucesión

La expresión del término general de una secuencia de naturales presenta grandes dificultades de comprensión y es un punto al que muchos escolares son incapaces de dotar de significado adecuado por el alto grado de abstracción que supone. ¿Qué significa término general de una sucesión? El término general es la expresión algebraica de la ley que satisfacen todos los términos, en función del ordinal correspondiente. El término general de una secuencia expresa la estructura común que comparten todos sus términos cuando se les considera como elementos de un conjunto ordenado. Su modo usual de expresión es mediante notación algebraica. Así, la ley $a_n = (n^2 + 2n)/2$ indica que todos y cada uno de los términos de la sucesión que se considera se obtienen elevando al cuadrado el ordinal correspondiente, sumándole su doble y dividiendo el resultado entre 2. Sin embargo, esta noción de estructura común o *estructura que comparten todos los términos de la sucesión* no se pone de manifiesto analizando las relaciones entre dos o tres términos consecutivos.

Disponer de varios números escritos en el sistema decimal de numeración no permite apreciar la estructura común que tienen; para conocer tal estructura es necesario que los números estén escritos mediante un desarrollo aritmético compartido o, mejor aún, que se presenten mediante una configuración puntual que se ajuste a un mismo patrón. La visualización de los números triangulares pone de manifiesto que los números 1, 3, 6, 10, 15,... comparten un mismo patrón (figura 3); la traducción aritmética de este patrón:

$$1,\ 1 + 2,\ 1 + 2 + 3,\ 1 + 2 + 3 + 4,\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5,\ ...$$

adelanta la estructura que comparten los números iniciales: cada uno de ellos es suma de números consecutivos, comenzando desde 1 y llegando hasta el natural que corresponde a su posición ordinal en la secuencia; pero aún quedan por explicar muchos fenómenos de comprensión para llegar a establecer que la ley de esa sucesión es, precisamente, $a_n = (n^2 + 2n)/2$.

5. Estudio sobre sucesiones

5.1. Contextualización curricular

El trabajo "*Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*" (Castro, 1994) se propone estudiar la viabilidad en el currículo de matemáticas de Secundaria Obligatoria de un sistema de representación para los números naturales que proporcione un instrumento para la visualización y el análisis de las sucesiones, análogo a la representación gráfica de las funciones. Estudiamos la potencia de las configuraciones puntuales para expresar relaciones y propiedades numéricas; también estudiamos como, mediante dichas representaciones, los estudiantes de 12-13 años descubren y utilizan algunas propiedades numéricas.

Este estudio se organiza en base a las referencias siguientes:

* empleo coordinado de los tres sistemas de representación mencionados para números naturales: configuraciones puntuales, sistema decimal de numeración y desarrollo aritmético de los números;
* trabajo con secuencias numéricas, lineales y cuadráticas, analizando el patrón que definen cada una de los tipos de sucesión mediante las configuraciones puntuales y los desarrollos aritméticos;
* realización de las siguientes tareas: continuar una secuencia, extrapolar términos, generalizar, obtener el término general, y utilizar el término general para obtener términos concretos.

5.2. Discusión de hallazgos

5.2.1 Sucesiones y sistemas de representación

Las configuraciones puntuales permiten representar los términos de las sucesiones de números naturales de primer o segundo grado. Las progresiones aritméticas admiten representaciones puntuales sencillas, por lo general rectangulares de base o altura constantes, o variantes de esta representación. Estas sucesiones se denominan secuencias lineales porque la representación gráfica de sus términos puede analizarse mediante una *descomposición en líneas* y la diferencia entre dos términos se puede describir como agregación de una línea.

Figura 4

Las sucesiones de diferencias segundas constantes son aquéllas cuyo término general viene dado por un polinomio de segundo grado. Los casos más sencillos son la sucesión de números cuadrados: $C_n = n^2$ y la de números rectangulares $R_n = n\ (n+1)$.

La representación gráfica de los términos de estas sucesiones se puede realizar teniendo en cuenta que las dos dimensiones son variables; el paso de un término al siguiente viene dado por un aumento de superficie según las dos dimensiones. La estructura de estos números se llama *cuadrática* o *multiplicativa* y el paso de un término al siguiente no es constante sino que, al aumentar en dos dimensiones, también es variable siendo esa variación lineal.

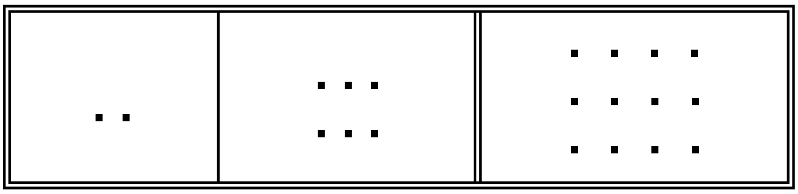


Figura 5

En general, si la ley de una sucesión es $a_n = an^2 + bn + c$, dicha sucesión es de diferencias segundas constantes. Si a_n toma valores naturales para todo n, entonces cada término puede representarse mediante una configuración plana poligonal, regular o irregular, manteniendo todos los términos un mismo patron de representación.

En el trabajo con secuencias de configuraciones puntuales los alumnos del primer ciclo de secundaria (12-13 años) no muestran dificultad para continuar un patrón de representación con secuencias lineales o con secuencias cuadráticas; en la mayor parte de los casos pueden explicar verbalmente el criterio de formación de los términos.

5.2.2 Diversidad de desarrollos

Después de introducir a los escolares en el sistema simbólico de representación de las configuraciones puntuales, hemos utilizado estas representaciones como sistema simbólico alternativo con el que realizar, entre otras, las siguientes tareas:

* visualizar el patron que comparten los términos de la sucesión,
* continuar la secuencia, y
* representar términos avanzados con este patrón.

Así, en el ejemplo de la figura 5, los alumnos reconocen la forma geométrica de los tres términos representados, añaden dos o tres términos a continuación; también son capaces de representar el término 11º o el 15º.

Igualmente, la representación puntual facilita el análisis estructural de los términos de la sucesión y permite expresar nuevos términos mediante el desarrollo aritmético obtenido. Para el ejemplo de la figura 5 son varios los desarrollos aritméticos correctos encontrados por los alumnos:

a) 2, 3 + 3, 4 + 4 + 4, 5 + 5 + 5 + 5, ..
b) 1 + 1, 2 + 2 + 2, 3 + 3 + 3 + 3, 4 + 4 + 4 + 4 + 4, ...
c) 2 x 1, 3 x 2, 4 x 3, 5 x 4, ...
d) $1^2 + 1$, $2^2 + 2$, $3^2 + 3$, $4^2 + 4$, ...
e) $2^2 - 2$, $3^2 - 3$, $4^2 - 4$, $5^2 - 5$, ...

Se observa que las posibilidades de análisis del patrón puntual son variadas; cada una de ellas proporciona un posible desarrollo aritmético (aditivo o multiplicativo) que comparten los términos de la secuencia. Se obtienen así diversas expresiones para los términos de la sucesión considerada en el sistema de representación que hemos denominado analisis aritmético. Los distintos análisis propuestos ponen de manifiesto diversos niveles de complejidad en el pensamiento numérico de los escolares: alumnos en los que predomina una interpretación aditiva de las relaciones, alumnos en los que predomina una interpretación multiplicativa y alumnos que se orientan hacia una interpretación basada en los cuadrados. Este sistema de representación permite conocer los distintos niveles en el pensamiento numérico de los escolares, que se muestran por la complejidad de los análisis que cada uno es capaz de realizar

Independientemente del nivel de pensamiento numérico mostrado, los diversos análisis aritméticos se han hecho posibles por el empleo del sistema de representación puntual. Cuando esta misma sucesión se presenta escrita en el sistema decimal de numeración: 2, 6, 12, 20,..., la gran mayoría de los alumnos no disponen de datos suficientes para encontrar un desarrollo aritmético común a estos términos, ya sea aditivo o multiplicativo. Vemos como se hace necesaria una coordinacion de sistemas de representación para poder entender el significado de la expresión "estructura aritmética que comparten varios números". Una vez que se encuentra el sistema de representación adecuado resulta posible entender dicho significado, si bien las respuestas pueden ser muy variadas.

5.2.3. Comprensión del término general

A partir de las conexiones establecidas entre los términos de la secuencia de configuraciones puntuales y la secuencia de desarrollos aritméticos, hemos estudiado la comprensión que muestran los escolares para generalizar la estructura común que tienen los términos de una secuencia. Es decir, tratamos de explicitar la noción de término general de una sucesión que tienen los escolares de 12-13 años mediante la pregunta: ¿Cómo se escribe el término que ocupa el lugar n-ésimo? Las respuestas a esta cuestión varían según el sistema de representación considerado.

Así, en el sistema decimal de numeración, el término general de la sucesión viene dado por **n**, que es la traducción simbólica inmediata de las expresiones: "un número en general", "cualquier número de la sucesión", "cualquier término de la sucesión", o equivalentes.

Al emplear el patrón geométrico, la necesidad de dejar espacios vacíos entre los puntos para indicar el paso a **n** lleva a que algunos alumnos utilicen modelos continuos para el término general, así por ejemplo, esta sería la expresión gráfica del término general en la sucesión de números cuadrados:

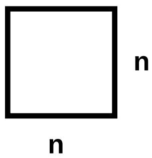


Figura 6

Se muestra así la dificultad de este sistema para expresiones generales.

En la representación por desarrollos aritméticos encontramos que el paso al término general se suele escribir adecuadamente. Sin embargo, cuando se dispone de varias expresiones que traducen el mismo patrón, no es fácil considerar equivalentes el paso de cada una al término general.

En general, se detecta un fuerte obstáculo para la obtención de la expresión del término general de una sucesión. Tanto las representaciones puntuales como los desarrollos aritméticos expresan, de algún modo, la estructura que comparten varios números. La notación decimal de esos mismos números no pone de manifiesto la estructura común.

Cuando se pregunta por el término general de la sucesión lo que se pide es encontrar, mediante notación algebraica, una expresión de la estructura común de todos sus términos. Esta pregunta no se puede responder en el sistema decimal de numeración ya que, en este sistema, cada término viene dado por un símbolo único y no se considera su estructura compartida; de ahí que la respuesta más común que se encuentra es "**n**", que es un símbolo único y representa "*un término en general*". En la representación mediante configuraciones puntuales sí se aprecia la estructura común, pero el carácter concreto de tales representaciones dificulta la obtención de un término genérico. Sólo mediante los desarrollo aritméticos es posible encontrar sentido a la propuesta de escribir el término general de una sucesión.

5.2.4. Balance

La comprensión de la noción de término general necesita considerar multitud de relaciones entre varios números ordenados; la interpretación de estas relaciones hace necesaria la coordinación de diversos sistemas numéricos de representación. Es mediante dicha coordinación, por el juego de las conversiones entre unos sistemas de representación y otros, como los escolares elaboran los significados necesarios para abordar la cuestión planteada.

En nuestro trabajo hemos encontrado un grupo significativo de alumnos que han mostrado capacidad para: interpretar la cuestión sobre el término general de una sucesión de números naturales, buscar una configuración puntual común de los números propuestos, expresar aritméticamente la estructura compartida por los números, caracterizar dicha estructura en función de la posición que ocupa cada término y generalizarla. Aún cuando se pueden presentar multitud de errores en este proceso, esta ha sido la via mediante la cual los alumnos de primer ciclo de secundaria han encontrado significado y respuesta a la cuestión ¿cual es el término general de esta sucesión?

6. Sistemas de representación del Número Real

El segundo estudio que presentamos es el trabajo "*La Introducción al Número Real en Secundaria"* (Romero, 1995), en el cual nos hemos propuesto mostrar que el sistema simbólico de los números decimales resulta insuficiente para abordar la complejidad del concepto de Número Real y que se hace necesario el apoyo que proporciona la representación geométrica. Veremos que ambos tipos de representación son interdependientes y complementarios para la construcción de una noción sólida de Número Real y necesarios para iniciar su estudio significativo con escolares de 14-15 años.

Las *representaciones simbólicas* y las *representaciones geométricas* juegan un papel clave en el concepto de Número Real, puesto que permiten expresar las ideas y las relaciones constitutivas de dicho concepto y tienen un uso aceptado y establecido. Tanto en el ámbito de las notaciones simbólicas, como en el de las representaciones geométricas, poseemos un instrumento integrador fundamental para el Número Real: el sistema de Notación Decimal y el Modelo de la Recta, respectivamente.

El sistema de Notación Decimal es un sistema integrador en el dominio de las notaciones simbólicas, ya que toda notación decimal (finita, periódica o no periódica) representa un número real y, recíprocamente, cada número real puede venir expresado mediante una notación decimal. En este dominio de las notaciones simbólicas, contamos también con las notaciones habituales operatorias (fracciones, raíces cuadradas, raices enésimas), que constituyen un complemento y un apoyo importante para el sistema de Notación Decimal dentro de este ámbito.

Por otra parte la recta real es un sistema integrador en el dominio de las representaciones geométricas. El hecho de que la correspondencia entre los puntos de la recta y los Números Reales, realizada a través de la medida de longitudes, se conceptualice como una biyección, permite considerar importantes propiedades en el conjunto de los Números Reales, tales como el orden o la densidad, cuya interpretación mediante el continuo lineal es mucho más intuitiva y conveniente en las primeras etapas, según veremos en un apartado posterior. Para la comprensión del concepto de Número Real sostenemos que las representaciones gráficas desempeñan un papel esencial, sin cuya aportación el significado de tal concepto no se podría construir con precisión.

Pasamos a describir los sistemas de representación del Número Real, caracterizando cada sistema simbólico mediante las correspondientes condiciones y rasgos sintácticos y semánticos.

6.1. Representaciones simbólicas del Número Real

6.1.1. Notación decimal

En el sistema de numeración decimal posicional los números enteros se expresan en términos de potencias de 10, de forma análoga a los polinomios en x, mientras que las fracciones decimales se expresan en términos de potencias de 1/10, de forma análoga a los polinomios en 1/x.

Es usual en el trabajo escolar hacer el paso de la notación fraccionaria a la decimal. Mediante el algoritmo de la división las fracciones pueden escribirse de forma justificada en notación decimal. En algunos casos obtenemos, en un número finito de pasos, su expresión decimal, que es igualmente finita. Sin embargo, en otros casos el algoritmo de la división no da lugar a una expresión decimal finita, sino que el cociente obtenido tiene infinitas cifras decimales. En este caso, la equivalencia de ese cociente con la fracción inicial supone una extensión del convenio previo que se estableció para los decimales exactos. La justificación formal de la equivalencia entre una fracción y una expresión decimal ilimitada viene dada por la interpretación de un decimal infinito como una serie de potencias de 1/10: $\sum a_n 1/10^n$ (Gardiner, 1982; pg. 75). Esta cuestión, desconocida por los alumnos, constituye el ejemplo más sencillo de extensión mediante el cual trascendemos los procesos finitos para tomar contacto con los procesos infinitos, que están en la raiz de las matemáticas de las magnitudes continuas.

Sin tener que descender a las profundidades de la justificación formal, los alumnos de esta edad (14- 15 años) pueden establecer razonadamente que todo número racional tiene una expresión decimal finita o infinita periódica y viceversa o, al menos, eso es lo que da por supuesto la organización curricular para el nivel correspondiente (Rico, Coriat, Marín y Palomino, 1994). En efecto, al realizar la división indicada por la expresión fraccionaria, observamos que el número de restos distintos posibles es limitado, ya que el resto ha de ser menor que el dividendo, de modo que si la división no es exacta, llegará un momento en que un resto se repita y, una vez que esto suceda, las cifras del divisor y los restos siguientes se repetirán indefinidamente en el mismo orden. Recíprocamente, los alumos de este nivel pueden razonar las reglas que permiten la conversión de un decimal finito o periódico en una fracción, aunque éstas últimas hacen uso implícito de ciertas propiedades de series numéricas al efectuar operaciones aritméticas con números de infinitas cifras.

Una vez claro que a todo número racional corresponde un decimal recurrente y viceversa, cabe preguntar qué ocurre con los decimales infinitos no recurrentes: ¿responden a alguna noción de número?

Si consideramos la interpretación de los decimales infinitos recurrentes como series de potencias, e interpretamos el caso de los decimales infinitos no recurrentes de la misma forma, en este segundo caso no disponemos de la recurrencia para sumar la serie. No obstante, aplicando a la sucesión de sumas finitas de la serie de potencias de 1/10 la propiedad fundamental de los números reales: toda sucesión infinita de números reales creciente y acotada superiormente por cierto número k, tiene como límite un número real a < k), entonces *a cada decimal infinito le corresponde un número real. Recíprocamente, cada número real viene dado mediante un decimal infinito*.

Este resultado muestra la potencia del simbolismo de la notación decimal para el Número Real pero, al mismo tiempo, pone de manifiesto la complejidad y la sofisticación de algunos resultados que subyacen en la aparentemente sencilla notación decimal para representar los Números Reales.

6.1.2. Notación operatoria

Denominamos *operatoria* a la notación habitual de los Números Reales (fracciones, expresiones radicales, π) en el sentido que destacan el carácter operatorio de los Números Reales, al indicar una operación cuya aplicación algorítmica permite obtener la representación decimal; este es el caso de:

-la notación de fracción, que expresa una división indicada;

-la notación habitual de los Irracionales algebraicos, que viene dada a partir del proceso de resolución de una ecuación, de la que son ejemplos sencillos los irracionales cuadráticos;

-la notación habitual de irracionales trascendentes conocidos, en los que a partir del "nombre" tenemos acceso a métodos para su aproximación decimal.

Aunque los alumnos de aquellos niveles en que se introduce el Número Real se enfrentan por primera vez a los decimales infinitos no periódicos sin tener la posibilidad de comprender aún las justificaciones formales en las que se fundamentan, la simultaneidad de la notación decimal con la notación habitual constituye un apoyo para el trabajo con este tipo de expresiones decimales y su aceptación por parte de los alumnos.

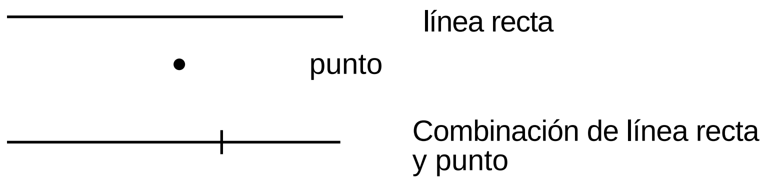
6.2. Representaciones geométricas del Número Real

6.2.1. La Recta Real

Por recta real se entiende un sistema de imágenes, signos, reglas y convenios mediante los que se realiza una representación geométrica de los Números Reales y se interpretan sus operaciones sobre una línea recta.

El análisis de la recta real incluye dos niveles. En un primer nivel encontramos:

1) Imágenes específicas:



2) Convenios de carácter general:

a) Una marca en la recta (punto) representa un número, y recíprocamente.

b) Los números 0 y 1 pueden elegirse arbitrariamente entre los puntos de la recta; para establecer la aplicación de $\mathbb{R}$ en la recta hay que fijar esos puntos.

c) El orden izquierda-derecha entre los puntos de la recta corresponde al orden usual entre los números; esto lleva a que los puntos a la izquierda de 0 correspondan a los números negativos y que los puntos a la derecha de 0 correspondan a los números positivos.

3) Reglas para representar los números:

a) Ley de la aplicación de $\mathbb{R}$ en la recta: la medida de longitudes;

b) Criterio para representar el punto que corresponde a una suma ;

c) Criterio para representar el punto que corresponde a un producto.

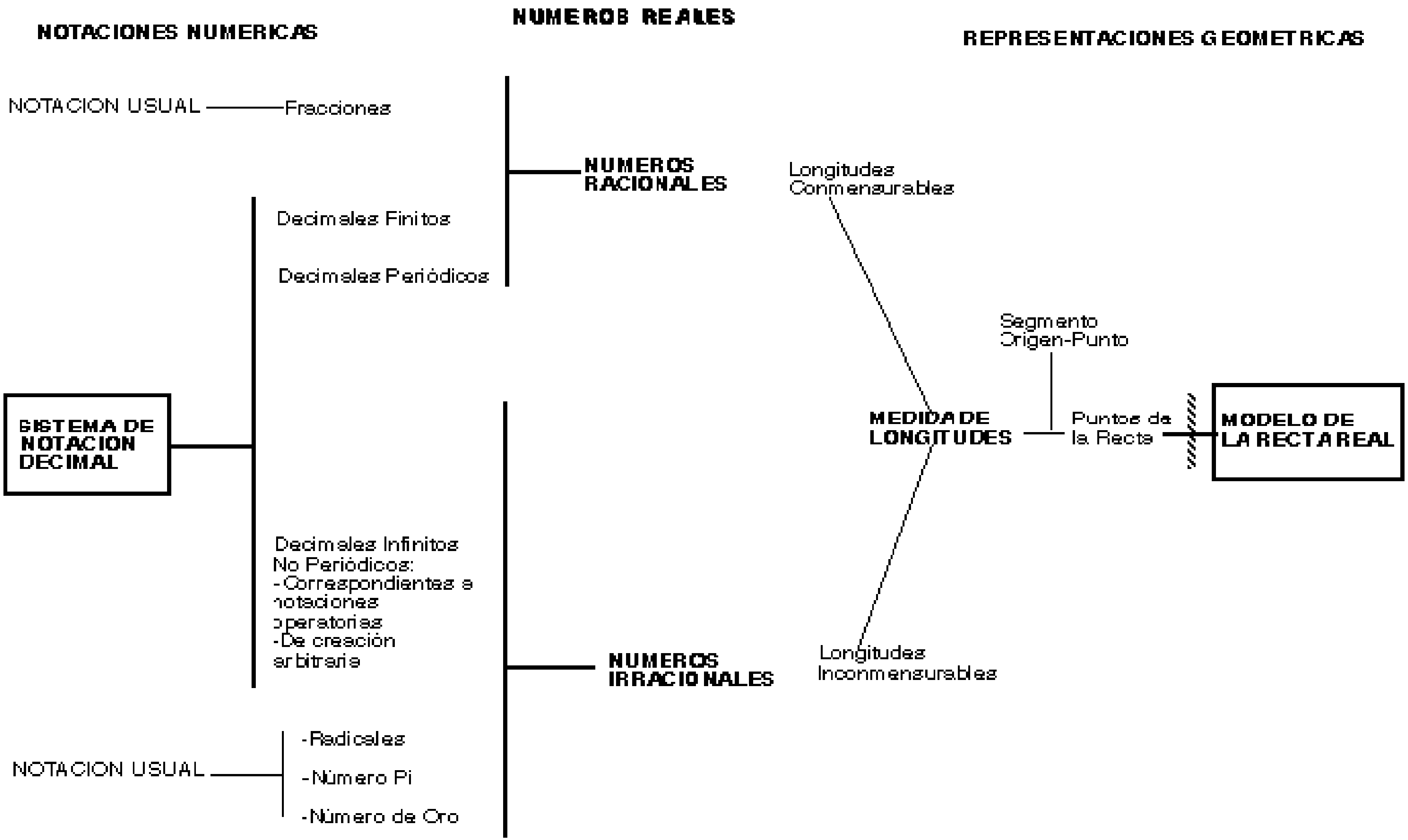
En un segundo nivel de análisis entra la consideración del continuo lineal, que soporta la interpretación geométrica del conjunto de los Números Reales. El sistema axiomático sobre el que se fundamenta dicho continuo lineal impone una lógica y unas propiedades al conjunto numérico, difíciles de expresar y argumentar en términos de simples notaciones numéricas; ésta es precisamente una de las claves por las que la Recta Numérica se convierte en un sistema de representación ineludible para la comprensión del concepto de número real.

Los alumnos han tenido contacto con el modelo de la recta desde la educación primaria; han estudiado la representación en la misma de los números Naturales, Enteros y Racionales. El criterio mediante el cual un número, Racional o Irracional, es asignado a un punto de la recta es el de la Medida de Longitudes; a un número determinado le corresponde el punto extremo del segmento con origen en 0, tal que la medida de dicho segmento con respecto al segmento unidad (de origen 0 y extremo 1) viene dada por el número en cuestión. Este criterio se maneja de forma implícita. Sin embargo, hemos señalado que la clave para considerar a la Recta como modelo de los Números Reales es la consideración de la biyectividad de la correspondencia números-puntos de la recta. Si se quiere empezar a trabajar de modo consistente con el modelo de la Recta, consideramos que es necesario profundizar en esta cuestión, es decir, en el estudio de la Correspondencia Números-Puntos de la recta y en su carácter biyectivo.

6.3 Conexiones entre los sistemas de representación

Si nuestro objetivo es favorecer la comprensión en los alumnos, y esta comprensión viene dada por el dominio de cada uno de estos sistemas y la coordinación entre ellos, parece claro, a la vista de los presupuestos anteriores, que para lograrlo hay que incrementar las conexiones entre los sistemas de representación de este concepto, tanto en las transformaciones dentro de cada sistema como en las conversiones entre sistemas diferentes.

En el mapa siguiente se muestran algunas relaciones y correspondencias entre los distintos sistemas de representación del Número Real presentados anteriormente.


NOTACIONES NUMERICAS
NUMEROS REALES
REPRESENTACIONES GEOMETRICAS
NOTACION USUAL
Fracciones
NUMEROS RACIONALES
Longitudes Conmensurables
Decimales Finitos
Decimales Periódicos
Segmento Origen-Punto
SISTEMA DE NOTACION DECIMAL
MEDIDA DE LONGITUDES
Puntos de la Recta
MODELO DE LA RECTA REAL
Decimales Infinitos No Periódicos:
-Correspondientes a notaciones operatorias
-De creación arbitraria
NUMEROS IRRACIONALES
Longitudes Inconmensurables
NOTACION USUAL
-Radicales
-Número Pi
-Número de Oro

6.4. Dificultades para la comprensión de los irracionales

Pasamos a describir una serie de dificultades y a mostrar varios argumentos que, a nuestro juicio, avalan la importancia y limitaciones de cada uno de los sistemas de representación simbólicos y geométricos de los Números Reales así como de sus conexiones.

Situándonos en la perspectiva del curriculum de matemáticas de Educación Secundaria, a partir de los conocimientos numéricos de nuestros alumnos, el problema de la irracionalidad, simplemente, no tiene lugar. Así pues, su introducción a los estudiantes requiere una evolución cualitativamente importante en su pensamiento matemático. Esta modificación no se produce espontáneamente; mientras, se evita el problema de la irracionalidad y se pospone a la espera de que la presentación formal del concepto solucione un conflicto que no se entiende como tal, porque nunca ha sido planteado. El problema de la irracionalidad adquiere plena significación en el contexto geométrico, más concretamente, en el terreno de la medida. *"Sin la presión de los problemas de la medida, $\mathbb{R}$ no habría respondido más que a problemas matemáticos extremadamente elaborados"* (Douady, 1980).

La idea intuitiva inicial de que dos magnitudes, y más concretamente, dos longitudes, tienen una parte alícuota común es, sin duda, una etapa inevitable en el desarrollo del conocimiento matemático, tanto en el plano histórico como en el plano individual (Arsac, 1987). Pero esta intuición puede convertirse en un obstáculo para la comprensión del problema de la irracionalidad.

El reconocimiento del fenómeno de la inconmensurabilidad en el dominio geométrico implica el paso de un estadio donde la figura sirve de útil de prueba a otro estadio en que la geometría se convierte en *"el arte de los razonamientos ciertos sobre figuras falsas"*. En efecto, es absolutamente imposible constatar la inconmensurabilidad sobre una figura; al contrario, de la experiencia práctica e inmediata se sigue la conmensurabilidad, ya que la percepción y las necesidades prácticas hasta un orden de magnitud determinado, se satisfacen en un número finito de pasos. Así que la conmensurabilidad no puede concernir más que a objetos matemáticos ideales, y no puede mostrarse sino que precisa entonces de una demostración *en el sentido de deducción a partir de unos axiomas* (Arsac, 1987). Junto con el problema anterior, en cualquier demostración geométrica sobre inconmensurabilidad subyace el problema de los procesos infinitos.

La irracionalidad de los radicales cuadráticos, considerada desde el punto de vista numérico, se aborda siguiendo métodos basados en la reducción al absurdo, lo que supone grandes dificultades para el razonamiento de los alumnos (Tall, 1978), especialmente en una situación de introducción del concepto. Cuando se pretende resolver el problema de la irracionalidad planteándolo exclusivamente en el terreno de la aritmética, resulta bastante pobre en significatividad. Los razonamientos por reducción al absurdo son la forma elegante de eludir el inevitable proceso infinito que surge cuando se trata de ir obteniendo las sucesivas aproximaciones decimales (por exceso o por defecto) de los radicales cuadráticos, sobre las que no es posible comprobar la irracionalidad.

La noción "intuitiva" o "a priori" de Continuo Lineal, o de la recta geométrica, es fuente de numerosas dificultades, contradicciones y paradojas (Romero, 1996), que también implican la noción de infinito. Estas dificultades se ponen de manifiesto cuando consideramos que mediante la representación geométrica y mediante verificación empírica no podemos detectar diferencias entre densidad y continuidad. Para hacer inteligible dicha diferencia es necesario un nivel más elevado de representación, que incluye la idea de potencia de un conjunto, es decir, su cardinal (Moreno y Waldegg, 1991).

Estas reflexiones resumen algunas consideraciones epistemológicas sobre el concepto de Número Real, los problemas principales de los que surge y a los que trata de dar respuesta, así como sobre las dificultades para coordinar los sistemas de representación sobre los que se estructura.

7. Resultados del estudio sobre números reales

Los resultados que a continuación se comentan se obtuvieron en una experiencia de investigación-acción que se llevó a cabo con un grupo de alumnos de Primer Curso de Bachillerato Unificado y Polivalente (14-15 años) en un instituto de Bachillerato de la provincia de Granada, e ilustran de modo empírico la tesis que venimos sosteniendo.

7.1. Discusión sobre la irracionalidad de π

La cuestión de que exista una correspondencia biyectiva entre las fracciones y los decimales finitos o periódicos plantea uno de los conflictos importantes que surgen desde el primer momento para estos alumnos. Se trata de la discusión sobre la racionalidad o irracionalidad del número π. Parece una contradicción el hecho de que π sea infinito no periódico, según el conocimiento establecido, y provenga de "*una fracción*", a saber, de *la fracción*: (Longitud de la circunferencia)/ (Diámetro de la circunferencia). Para los alumnos, todas las razones son fracciones (es decir, razones entre enteros), porque no han tenido contacto con razones entre longitudes inconmensurables. Sólo después del trabajo reiterado con este tipo de razones en múltiples experiencias, los alumnos son capaces de acuñar un nuevo término: el de "*proporción*", para referirse a la relación entre longitudes que no pueden ser expresadas mediante una fracción. Este término surgió en clase con motivo de unos trabajos de investigación sobre la proporción aúrea y, una vez comprendido y compartido su significado por un grupo de alumnos, éstos procedieron a realizar análogías con otras razones inconmensurables, como la que corresponde al número π, con lo cual se resolvió el aparente conflicto planteado al principio.

7.2. Biyección entre la recta y los números reales

A lo largo del proceso didáctico se observó una evolución en la conceptualización de los alumnos sobre los tipos de número que pueden corresponder a un punto cualquiera de la recta real; esta evolución vino motivada por las experiencias realizadas sobre medidas y, más concretamente, con las longitudes inconmensurables pero construibles. En un principio los escolares rechazan que a cualquier punto de la recta le pueda corresponder un decimal infinito. Después de construir longitudes inconmensurables piensan que a un punto de la recta también puede corresponderle un irracional construible. Al final del proceso didáctico, aproximadamente la mitad de los alumnos aceptan que a un punto dado de la recta puede corresponderle un número racional o irracional construible. El teorema de Pitágoras se convierte en un argumento con el que se vinculan la representación geométrica y la notación operatoria.

Se planteó un debate en clase para explorar la comprensión de los alumnos preguntándoles acerca de qué números llenan la recta, es decir, cómo es la correspondencia números-recta. A mediados del proceso didáctico se propuso a los alumnos esta pregunta destinada a explorar sus intuiciones acerca de si los números racionales llenan o no la recta numérica; se trataba de explorar si, en la intuición de los alumnos, el modelo de la recta podía quedar cubierto por los números racionales. En principio, esta pregunta estaba formulada con la expectativa de que, después de la actividad sobre la conmensurabilidad de segmentos, los alumnos pudieran establecer una correspondencia entre puntos de la recta-longitudes-números y, dado que la mayoría de ellos pensaban que dos longitudes cualesquiera son conmensurables, establecieran que todos los puntos de la recta corresponden a números racionales.

Las respuestas de los alumnos, sin embargo, revelaron otros aspectos. Uno de los puntos más destacados es la creencia de muchos alumnos de que los racionales no llenan la recta debido a la necesidad de "finalizar el proceso infinito" de colocarlos todos y a la imposibilidad material de hacerlo.

También se registran opiniones afirmativas basadas en el criterio injustificado de la biyectividad de dos conjuntos infinitos (a saber, el de los números y el de los puntos de la recta). Otros afirman la imposibilidad de decidir que tipo de correspondencia habrá entre dos conjuntos si el número de sus elementos es infinito.

Nuestra interpretación es que la propia formulación de la pregunta, en términos de números llenando o completando la recta, era mucho más compleja de lo que habíamos supuesto. *Los argumentos expresados por los escolares ponen de manifiesto que la cuestión, así formulada, hace aflorar sus intuiciones más primitivas sobre la estructura del continuo lineal, sobre la correspondencia entre esta estructura y sus nociones acerca de los números, sobre el cardinal de los conjuntos infinitos y la correspondencia entre ellos y, en especial, sobre la no existencia de un final para los procesos infinitos.*

Estos son puntos clave para la comprensión del concepto de Número Real y de su estructura topológica; sin embargo, el trabajo con alumnos de los primeros niveles de secundaria sobre este tópico resulta problemático, ya que supone el manejo de instrumentos matemáticos basados en el uso riguroso de los procesos infinitos, y por tanto, con un gran nivel de sofisticación.

7.3. Diferencias entre números racionales e irracionales

En otro orden de cosas, para detectar la comprensión de los alumnos sobre las diferencias entre los racionales y los irracionales, les fue formulada la siguiente pregunta: ¿Qué aportan los números irracionales a los números racionales? Las respuestas de los alumnos hacían referencia a las medidas de ciertas longitudes que no se podían medir con números racionales (por ejemplo, la longitud del lado de un cuadrado de área 2 ó el número π), y a los que ellos habían denominado con el término *proporción* a raiz de sus trabajos con la proporción aúrea, que ya hemos mencionado. También aludieron a la resolución de ecuaciones cuyas soluciones no podían expresarse mediante números racionales. Sin embargo, cuando la profesora argumentó a través de la notación decimal, apuntando que los racionales correspondían a los decimales finitos y periódicos y que los decimales infinitos no periódicos, correspondientes a los irracionales, venían a completar todos los tipos de notaciones decimales posibles, el razonamiento no resultó en absoluto significativo para los alumnos, y bastantes dieron muestras de no entender.

7.4. Desconexión entre representaciones de los irracionales

Por último, podemos mencionar el conflicto que sale a la luz entre la infinitud potencial de la representación decimal y la finitud actual de la representación geométrica en el caso de algunos irracionales, conflicto que subyace a la noción de magnitud continua. La mayoría de los alumnos encuentra muy difícil aceptar que el lado de un cuadrado de área 3 tenga una longitud finita (acotada) y que su expresión numérica sea infinita no periódica. Para estos alumnos el lado del cuadrado no puede medir *exactamente* $\sqrt{3}$ por este motivo. Este conflicto es tan fuerte que una alumna se negaba a unir el lado que estaba pintando en un cuadrado de área 3 con el extremo del lado contiguo porque, en ese caso, el lado que estaba dibujando no correspondería a su expresión numérica (infinita).

La cuestión de la exactitud de la medida de los lados de los cuadrados es realmente interesante. Se llega a que la medida de un lado es un número que multiplicado por sí mismo da 3, y ese número no tiene una expresión decimal exacta ni controlable. Entonces, la exactitud de la medida del lado de un cuadrado no puede establecerse en el terreno numérico sino que se refiere, en última instancia, a que un lado multiplicado por sí mismo da como resultado el área; es decir, entramos en un razonamiento puramente geométrico. Este punto es realmente sutil y queda totalmente fuera del alcance del trabajo con alumno en los primeros niveles.

En definitiva, el conflicto que se plantea a los alumnos ante la expresión decimal infinita de determinadas medidas acotadas y delimitadas, *finitas*, tiene razón de ser y es difícil de solucionar. Subyace toda una diferencia conceptual que se produce entre considerar una expresión decimal infinita como proceso, a considerarla como un ente en términos de infinito actual.

Como vemos, la escasa coordinación entre los diferentes sistemas de representación para los números reales plantea dificultades considerables.

7.5. Balance

Al iniciar el estudio de los números reales mediante el empleo conjunto de los sistemas de representación convencionales ya citados, han surgido y se han puesto en evidencia varias dificultades importantes que impiden una comprensión precisa de las nociones de número irracional y de número real, aún a nivel intuitivo. En los apartados precedentes hemos comentado situaciones conflictivas en las que se ponen de manifiesto significados muy arraigados sobre los números, incompatibles entre sí en muchos casos, .

El problema que plantea la creencia intuitiva en la conmensurabilidad de dos longitudes cualesquiera es una de las cuestiones más complejas de abordar; la inconmensurabilidad de longitudes es una cuestión que ni siquiera se plantea para la mayoría de los alumnos de 14-15 años. Para aproximarse a esta cuestión se hace necesaria una reflexión profunda sobre la identidad entre la reducción a una medida común de dos longitudes y el valor racional de la razón entre ambas longitudes; por otra parte es necesario destacar la identificación entre los números racionales y los decimales periódicos para que se atisbe la posibilidad de que la razón entre dos longitudes puede no ser un número racional.

Unicamente en el juego de los tres sistemas de representación mencionados se llega a poner en cuestión la falsa intuición sobre la conmensurabilidad de dos longitudes cualequiera, y queda planteado el problema de la irracionalidad para un tratamiento geométrico. La verificación de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ por reducción al absurdo, queda fuera de las posibilidades de comprensión de los escolares de 14-15 años, quienes sólo admiten este conocimiento por la autoridad del profesor.

Hay un fuerte rechazo a admitir la existencia de expresiones decimales cuyas cifras sucesivas no están sometidas a alguna regla controlable y enunciable. La expresión decimal de los irracionales cuadráticos se asume por los alumnos como *un procedimiento* indicado en la notación operatoria y no como un número bien delimitado y definido. Por eso se produce un desconcierto considerable cuando esos mismos números se presentan como longitudes de construcción sencilla y, por tanto, como puntos bien definidos en la recta real. La identificación entre la representación decimal y la representación geométrica de los irracionales cuadráticos se rechaza intuitivamente; mayor problema supone admitir que otros irracionales no construibles también tienen un punto como representación geométrica.

Finalmente, el continuo geométrico plantea también dificultades para identificar el conjunto de todos los puntos de la recta con el conjunto de todas las notaciones decimales.

Gracias a la consideración simultánea de las representaciones simbólicas y geométricas de los números reales hemos podido explorar las dificultades de comprensión que se presentan al iniciar un tratamiento sistemático de estos conceptos y caracterizar algunas de ellas. Los significados diferentes que surgen de cada uno de los sistemas de representación para los mismos entes señalan el origen de las dificultades y bloqueos en la comprensión de los alumnos. Pero estas diferencias también marcan la línea de trabajo sobre la cual avanzar para una integración de las diferentes representaciones en un mismo concepto de número real.

La consideración conjunta de las diversas representaciones pone de manifiesto las graves carencias de los tratamientos puramente formales dados hasta ahora a este difícil concepto de número real.

8. Conclusión

Una psicología de las matemáticas que trate directa y explícitamente de la interacción entre la estructura del contenido y la naturaleza del pensamiento humano puede servir de base para el desarrollo de la teoria y para la práctica de la enseñanza en este campo.

Nuestro propósito ha ido encaminado a poner de manifiesto la utilidad del análisis de las estructuras numéricas mediante las nociones de representación y sistemas de representación. De esta manera hemos puesto de manifiesto parte de la complejidad conceptual y de las relaciones implicadas en el concepto de término general de una sucesión y en el concepto de número real; para ello nos hemos servido de las representaciones internas y de los significados aportados por los alumnos.

Hemos tratado de justificar la pluralidad de representaciones presentes y necesarias para el conocimiento de las estructuras numéricas; hemos destacado las facetas que cada sistema pone de manifiesto y hemos visto algunas de sus posibilidades y limitaciones. Esto nos ha permitido plantear la necesidad de coordinación entre diferentes sistemas para la comprensión de las estructuras numéricas implicadas. Los ejemplos aportados en nuestras investigaciones indican claramente la fecundidad de esta dirección.

Si la comprensión implica una coordinacion de sistemas de representación, entonces el principal reto del aprendizaje de estructuras numéricas no puede reducirse a la automatización de reglas operatorias, sino que debe de consistir en la coordinación de los diferentes sistemas de representación en los que tales reglas adquieren su significado y los conceptos mejoran su precisión.

Sin embargo, en el currículo de las matemáticas escolares no se dispone de información suficiente sobre los sistemas de representación adecuados para las estructuras numéricas convencionales, tampoco sobre las funciones cognitivas que destacan cada uno de estos sistemas, menos aún sobre las posibilidades de coordinación entre los sistemas y los aspectos conceptuales y procedimentales que surgen de estas coordinaciones. El diseño de tareas y secuencias de instrucción necesita del desarrollo y conclusión de investigaciones sobre estas cuestiones.

Para continuar investigando en este campo se hace necesaria una mayor integración entre las viejas disciplinas académicas. Esto es necesario porque los problemas reales del aprendizaje de las matemáticas no saben de divisiones administrativas entre áreas de conocimiento.

Esta es nuestra obligación como profesionales de la educación y como responsables de la formación de los jóvenes en una sociedad que se pretende más justa y solidaria.

Referencias

Arsac, G. (1987) L´origine de la démonstration: Essai d´epistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 8, 267-312.

Beiler, A. (1966) *Recreations in the theory of numbers.* New York: Dover.

Behr, M.; Lesh, R. & Silver, E. (1983) Rational Number Concepts. En R. Lesh, y M. Landau (edts.) *Acquisition of Mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.

Carpenter, T.; Fennema, E. & Romberg, T. (1993) *Rational Numbers. An Integration of Research*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Castro, E. (1994) *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)* Tesis Doctoral. Granada: Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1997) Representaciones y modelización. En L. Rico (edt.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona; Horsori.

Dancing, J. & Sosa, E. (1993) *A Companion to Epistemology*. Oxford: Blackwell.

Douady, R. (1980) Approche des nombres réels en situation d´apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11, 77-110.
Duval, R. (1993) Semiosis et Noesis. En *Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa*. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
Euclides (1991) *Elementos. Libros iIIV.* Madrid: Biblioteca Clásica Gredos.
Feferman, S. (1989) *The Number Systems. Foundations of Algebra and Analysis*. New York: Chelsea Publishing Company.
Ferrater, J. (1981) *Diccionario de Filosofía*. Madrid: Alianza
Fey, J. (1994) Eclectic approaches to elementarization: Cases of curriculum construction in the US. En R. Biehler, R. Scholz, R. Strasser & F. Winkelman (edts.) *Didactic of Mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Gardiner, A. (1982) *Infinite Processes.* New York: Springer-Verlag.
Goldin, G. (1993) The IGPME Working Group on Representations. En *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psicology of Mathematics Education*. Tsukuba: University of Tsukuba.
González Mari, J.L. (1995) *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Granada: Tesis Doctoral.
Guttenplan, S. (1994) *A Companion to the Philosophy of Mind*. Oxford: Blackwell.
Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992) Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (edt.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Company.
Hitt, F. (1997) *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum.* Conferencia pronunciada en el XI Relme. Morelia, Michoacán, México (sin publicar).
Janvier, C. (1978) *The Interpretation of complex cartesian graphs representing situations -studies and teaching experiments*. Doctoral Dissertation. Nottingham: University of Nottingham.
Janvier, C. (edt.) (1987) *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
Kaput, J. (1987) Representation Systems and Mathematics. En C. Janvier (edt.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
Moreno, L. y Waldeg, G. (1991) The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211-231.
Palmer, S. (1977) Fundamental aspects of cognitive representation. En Rosch, E. & Lloyd, B. (edts.) *Cognition and categorization*. Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
Radford, L. (1995) La transformación de una teoría matemática: el caso de los números poligonales. *Mathesis*, 11, 217-250
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1990) *Vocabulario Científico y Técnico*. Madrid: Espasa Calpe.
Resnick, L. & Ford, W. (1981) *The psychology of Mathematics for instruction.* Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
Resnick, L. (1983) A developmental theory of number understanding. En H. Ginsburg (edt.) *The development of mathematical thinking*. Orlando: Academic Press.
Rico, L., Coriat, M.; Marín, A. y Palomino, G. (1994) *Matemáticas 4º. Opción A. Educación Secundaria Obligatoria. Proyecto 2000.* Sevilla: Algaida.
Rico, L. (1995) *Conocimiento Numérico y Formación del Profesorado*. Granada: Universidad de Granada.
Rico, L; Castro, E. y Romero, I. (1996) The Role of Representation Systems in the learning of Numerical Structures. En A. Gutiérrez y L. Puig (edts.) *Proceedings of the Twentieth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* Vol.1. Valencia: Universidad de Valencia.

Romero, I. (1995) *La introducción del Número Real en Educación Secundaria.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Romero, C. (1996) Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. *Enseñanza de las Ciencias,* Vol. 14 (1), 3-14

Rucker, R. (1988) *Mind tools. The mathematics of information*. London: Penguin Book.

Shell Centre (1986) *The language of functions and graphs: An examination module for secondary school*. Manchester: Joint Matriculation Board.

Skemp, R. (1980) *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid: Morata.

Tall, D. & Schwarzenberger, R. (1978) Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.

Tall, D. (1980) The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 11, 271-284.

Wittgenstein, L. (1987) *Investigaciones filosóficas*. Madrid: Alianza.

Wittrock, M. (1990) *La investigación de la enseñanza, III. Profesores y alumnos.* Madrid: Paidós.