LOS DIÁLOGOS DE ESTUDIANTES: SU RIQUEZA PARA EL ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Buenos Aires, Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN México
crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Algunos diálogos de nuestros estudiantes en muchas oportunidades dejan traducir de manera implícita sus ideas y creencias, y a través de ellas es posible comprender la manera en la que se construye el conocimiento matemático escolar. El profesor debe estar atento a observar las conexiones explicitadas por sus alumnos. De esta manera, puede reforzar aquéllas que presentan más ventaja para avanzar en la comprensión y buscar modos de refutar las que son inapropiadas.*
En este trabajo se muestran algunos ejemplos de situaciones presentadas en el aula de matemática a partir de respuestas dadas por estudiantes cuyo análisis permite comprender algunos problemas en la construcción del conocimiento matemático por parte de los mismos.
Palabras clave: Discurso matemático escolar, construcción del conocimiento matemático

El discurso matemático escolar

La investigación en matemática educativa propone un enfoque sistémico y situado en el que se intenta estudiar las condiciones y circunstancias ligadas a la emergencia y construcción del conocimiento matemático (Cantoral & Farfán, 2003). Encontrar contextos significativos de aprendizaje es de primordial importancia para lograr la construcción sólida del conocimiento. La investigación sobre el discurso escolar se propone caracterizar las formas argumentativas que se usan en el aula.

Los errores que cometen los estudiantes, las afirmaciones que realizan y que no son correctas, deben ser analizados con detenimiento, ya que están dejando inferir características de la construcción de los conocimientos matemáticos y en qué basan esa construcción. Los docentes tenemos tendencia a asumir que el significado de conceptos matemáticos básicos, están implícitamente claros para los alumnos y son compartidos por la comunidad de la clase. Los estudiantes construyen aunque no nos lo propongamos explícitamente, nuevas conexiones entre piezas de información previamente asimiladas.

En el aula es posible detectar formas de argumentación que no son las esperadas (Crespo Crespo, 2007), de su análisis es posible determinar cuáles son las estrategias de argumentación que dan convicción a los estudiantes y cómo las aplican en los escenarios en los que se desarrollan sus actividades.

Discurso matemático escolar: sus manifestaciones

El discurso matemático escolar difiere del discurso matemático, es saber transpuesto. Se refiere a cómo se interpreta, se usa y se comparte la matemática en situación escolar. En su formación, influyen, entre otros, profesores, padres, académicos, políticos y autores de libros de texto (Castañeda, 2009). Está compuesto por varios elementos que manifiestan sus características. Es posible analizarlo a través de producciones escritas, orales y gestuales presentes en el aula.

Los diálogos entre alumnos o entre alumnos y docentes tienen por función un intercambio social. En ellos afloran mecanismos de prueba socialmente reconocidos como válidos y construidos fuera y dentro del aula. Su análisis e interpretación, puede mostrar la manera en la que se va construyendo el conocimiento (Crespo Crespo, 2009). A continuación, como ejemplos, se presentan y analizan algunos episodios sucedidos en el aula de matemática. A través de ellos es posible acceder a algunas de las ideas que manejan los estudiantes y cómo esas ideas se convierten en obstáculos para la comprensión del conocimiento matemático.

Episodio 1: *Números irracionales y aproximaciones* (1° Año Prof. de Informática. Matemática 1)

Se les pide a los alumnos determinar los ceros de la función y = x2 – 2 para poder graficar la parábola correspondiente. Uno de los estudiantes A1 pasa al frente, resuelve y obtiene:

$$x_1 = \sqrt{2} \qquad\qquad x_2 = -\sqrt{2}$$

A continuación, tras hacer uso de una calculadora escribe:

$$x_1 = \sqrt{2} = 1{,}41 \qquad\qquad x_2 = -\sqrt{2} = -1{,}41$$

Se le observa que $\sqrt{2} \neq 1{,}41$, que se trata de un número irracional, pero se suscita el siguiente diálogo entre el profesor P y varios de los alumnos del curso:

A_2: Ponele más decimales

A_1: La calculadora dice: 1,414213562. ¿Pongo todos?

P: Eso es también una aproximación

A_1: Son todas las cifras que me da la calculadora. ¿está mal?

P: Es también una aproximación, el número tiene infinitas cifras decimales

A_2: Pero necesitamos hacer la cuenta para marcar en el eje

P: Utilizamos la calculadora para obtener una aproximación y marcar en la recta numérica, para ubicar por dónde está $\sqrt{2}$, pero tenemos que saber que $\sqrt{2}$ no es 1,41, no podemos escribir que son iguales

A_1: Pero, ¿en la recta pongo $\sqrt{2}$ o 1,41?

P: Ponemos $\sqrt{2}$, que es el cero de la función

A_1: ¿En 1,41?

P: Sí

A_1: O sea que en el fondo es lo mismo

P: No. Es aproximadamente igual. Lo que se está marcando es aproximado

A_1 (sin decir nada, marca $\sqrt{2}$ y - $\sqrt{2}$ y se sienta)

En esta situación de aula, se pone de manifiesto la autoridad que los estudiantes otorgan a la calculadora. Esa autoridad hace un tiempo, era depositada en libros, docentes, o hermanos mayores con estudios relacionados con la matemática. Actualmente es el recurso tecnológico y sus resultados los que son tomados como depositarios de la autoridad. Se pone de manifiesto, además, que los estudiantes no diferencian entre los números irracionales y sus aproximaciones. Los alumnos no aceptan que se trate de un número, de un resultado una expresión que contenga operaciones, en este caso radicación. Expresan la necesidad que sienten de realizar las operaciones y devolver un resultado en el que no aparezcan operaciones. Para ellos los resultados deben ser expresados en sistema decimal, tal como la calculadora los expresa. Al analizar el intercambio de ideas que surgen en este diálogo, no podemos menos que preguntarnos si finalmente el estudiante comprende realmente lo que hace cuando marca finalmente los valores de las raíces en la recta numérica, o bien si lo hacen finalmente por satisfacer a la docente.

Episodio 2: *"Cuentas sin terminar"* (1° Año Prof. de Informática. Matemática 1)

Durante el cálculo de un límite de una función, el resultado obtenido fue: $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Uno de los alumnos A_3 escribe en el pizarrón ese resultado y lo recuadra. Uno de sus compañeros inicia el siguiente diálogo:

A_4: Escribí el resultado

A_3: Ya lo hice

A_4: No, está sin terminar la cuenta (toma su calculadora y hace cálculos): A mí me dio 1,207106781

P: No, el resultado es $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

A_4: ¿Por qué no terminamos la cuenta?

P: $\sqrt{2}$ *es un número irracional. Lo que obtuviste con la calculadora es un valor aproximado*

A_4: Pero así está sin terminar

A_5: Tenés razón, está sin terminar. Si lo dejo así no sé cuánto da

P: No

A_5: A veces usted deja cuentas sin hacer en el resultado

P: ¿Cuentas sin hacer?

A_5: Sí, esto es lo mismo que cuando en el ejercicio de principio de la guía usted dejó $\frac{1}{2}$ *en vez de hacer la cuenta y poner 0,5 que es el resultado*

P: $\frac{1}{2}$ *y 0,5 son el mismo número en un caso expresado como fracción y en el otro con su expresión decimal*

A_4: Pero el que está bien es 0,5, porque está terminado

P: No, los dos están bien

A_4: La calculadora da 0,5, ese debe ser el resultado, o ¿no?

P: Si colocás 0,5 o dejás $\frac{1}{2}$*, los dos están bien. Son dos formas de expresar el mismo número*

A_5: Entonces acá está bien escribir $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$*, pero también 1,207106781*

P: No

A_4: ¿Viste? Tenemos que hacer la cuenta y escribir todos los decimales. Es 1,207106781

P: No, justo eso es lo que está mal

A_4: Pero la calculadora da eso

P: $\sqrt{2}$ es un número irracional.

A_4: Pero da 1,414213562

P: La calculadora te da una aproximación. $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales

A_4: Y, ¿cómo sabe que son infinitas? Si son muchas no sé si no acaban de golpe

P: Está demostrado. Desde la época de los griegos se sabe...

A_3: Es como π, que puedo siempre encontrar siempre una cifra más.

A_4: Pero usamos 3,14

P: Sí, en general usamos dos cifras decimales para hacer cálculos, pero sabemos que tiene infinitas

A_5: En la práctica, si es un número sirve para hacer cuentas y entonces tengo que considerarlo con cierta cantidad de cifras decimales. O, ¿para qué sirven si no los números?

P: Pero tenemos que aceptar que lo que usamos al tomar una cantidad determinada de cifras es un número racional tan cercano como quiera, pero que $\sqrt{2}$ (o π también), no es ese número racional, sino que ese racional está tan cerca como queremos de él, pero que $\sqrt{2}$ no es 1,4142, así como π no es 3,14. Cuando se hacen cuentas no se obtiene el resultado exacto

A_4: Pero si son distintos no es lo mismo

P: Exactamente

A_4: Entonces, ¿por qué la calculadora me da así?, ¿está mal?

P: La calculadora te da una aproximación para que puedas hacer un cálculo. No puede darte todas las cifras decimales porque son infinitas.

A_3: Entonces está mal lo que dice la calculadora, porque da el resultado al apretar el signo "=". De todas maneras la calculadora tendría que decir que no es igual, que no es el verdadero resultado

A_4: Pero con infinitas cifras, ¿cómo se hacen cuentas?

P: Por eso la calculadora nos da las primeras cifras, pero tenemos que saber que son sólo algunas, que es sólo una aproximación. No podemos hacer cuentas con infinitas cifras decimales

A_5: Entonces, ¿para qué sirven los irracionales?...

(la pregunta queda sin respuesta y la clase continúa...)

Nuevamente en este diálogo entre los estudiantes y su docente, surge como una de las ideas centrales, la necesidad que sienten los alumnos de que un resultado no contenga operaciones. En esta situación, nuevamente el resultado que da la calculadora es considerado correcto, más allá de que no tenga en cuenta el concepto de irracionalidad. La expresión de un número irracional es considerado por ellos como una "cuenta sin terminar". Se pone de manifiesto la autoridad que otorgan a las calculadoras. Otro de los conceptos cuya comprensión errónea se manifiestan en este diálogo, es la confusión entre un número y sus representaciones. Es usual que los alumnos confundan a los números con sus representaciones. El hecho de que un número irracional posea infinitas cifras decimales, es pensado por los alumnos como una dificultad para la realización de cuentas, y en ese momento aparece, tal vez de manera inesperada el cuestionamiento acerca de la utilidad práctica de los números irracionales.

Episodio 3: *La no aceptación encubierta del infinito* (1° Año Prof. de Informática. Matemática 1)

Al graficar la función y = sen(x), la profesora explica cómo obtener los valores del seno de un ángulo gráficamente a partir de la circunferencia trigonométrica y los segmentos determinados en ella. En la explicación marca en el eje de abscisas los valores en radianes y mediante la participación de los alumnos, va marcando valores en el plano cartesiano, los une e indica a los estudiantes que copien. Mientras copian del pizarrón, tiene lugar el siguiente diálogo:

A_6: ¿Por qué pusimos $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π en vez de colocar los grados?

P: Porque estamos midiendo los ángulos en radianes. Por ejemplo: 90° es $\frac{\pi}{2}$, 180° es π...

A_6: ¿Por qué π?

P: π es la relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Y un radián es el ángulo que limita un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

A_6: ¿Por qué no le ponemos el valor?

P: Es π

A_6: ¿Por qué no 3,14?

P: 3,14 no es π, se aproxima a π

A_7: Sí es 3,141592. Lo da la calculadora

P: Y sigue… tiene infinitas cifras no periódicas. Siempre puedo encontrar otra.

A_7: Entonces, ¿cuando escribo π es porque no puedo escribir todo?

P: Sí

A_6: Pero entonces no es un número

P: Es un número irracional y por eso tiene infinitas cifras no periódicas.

A_6: Pero, ¿π es como una variable, que no sé cuánto vale?

P: No, es constante, π no es cualquier número, se sabe cuánto vale

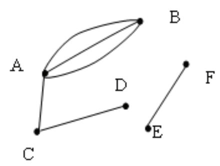
A_6: Es como cuando escribo a o b en un ejercicio, no como cuando escribo x o y...

P: Cuando vemos π, todos sabemos qué número es, no es una constante cualquiera

En este diálogo aparece por una parte la no comprensión del valor de π y de su valor. Los alumnos suelen pensar los ángulos en grados y los radianes les resultan una unidad artificial y sin significado. Se confunde en la conversación de los estudiantes las ideas de variables, constantes y parámetros. Las variables se unen al uso de las x y las y; las primeras letras del alfabeto son reservadas para las constantes. En la consideración del número π, nuevamente se manifiestan dificultades en aceptar la existencia de infinitas cifras decimales no periódicas. Al igual que en el caso anterior, el infinito es considerado en su carácter potencial. Surge fuertemente la influencia de concepciones del infinito que han sido construidas por ellos en escenarios no académicos (Lestón, 2008).

Episodio 4 – Soluciones únicas (2° Año Prof. de Informática – Modelos Discretos)

En la práctica de Teoría de grafos se plantea un problema en el que se pide representar una situación de trozos de autopista entre ciudades



Se le pide construir los tramos de autopista necesarios para que todas las ciudades queden intercomunicadas (alcanza con uno)

A4: ¿Cuál es la respuesta a si posible llegar de A a cualquier ciudad con a lo sumo 2 tramos de autopista?

P: Depende de qué trozo de autopista decidiste construir

A4: Sí, pero ¿cuál es la respuesta correcta? ¿Cuál está bien? ¿Sí o no?

P: Las dos estarían bien...

A3: No, en un examen, ¿cuál será la que se le pone bien? Sólo una puede ser la respuesta correcta…

En este breve diálogo, se manifiesta la creencia de los estudiantes de que en los problemas de matemática debe haber una única respuesta correcta. Esa solución es para ellos la que la escuela quiere. Aún comprendiendo que puede haber varias respuestas, el alumno que participa de este diálogo busca cuál será la que se considere correcta en una evaluación. Indudablemente, considera que todas las actividades que se realizan en clase tiene como finalidad aprobar la evaluación correspondiente.

Algunas reflexiones acerca de qué información dan estos episodios

Estos episodios reflejan la existencia de construcciones no correctas o poco sólidas para conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. Algunos conceptos no han sido construidos de manera correcta por algunos de estos estudiantes, no han adquirido significatividad para ellos. Esas ideas se convierten en obstáculos para la comprensión del conocimiento matemático.

Es posible inferir de ellos que la matemática es vista como la ciencia que permite hacer cálculos y por lo tanto el producto de las actividades que se desarrollan en el aula debe para ellos reducirse a cálculos, sin construcción de significados de los conceptos matemáticos. La escuela actual hace hincapié en la construcción de contenidos aritméticos y algebraicos, mostrando a la matemática como una colección de símbolos, reglas y procedimientos de forzosa aplicación que manipulan mecánicamente. La ausencia de significado provoca una manipulación errónea según supuestas reglas.

Los docentes tienen tendencia a asumir que el significado de conceptos matemáticos básicos son claros y compartidos, sin embargo, los estudiantes construyen nuevas conexiones entre piezas de información previamente asimiladas. Debemos estar atentos a observar las conexiones explicitadas por sus alumnos.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 6(1), 27-40.

Castañeda, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22.* 1379-1390.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2009). *La comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática*. Revista Premisa 10 (41), 21-30

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.