ALGUNAS INCONGRUENCIAS CONCEPTUALES SOBRE LA NOCIÓN DE LINEALIDAD

Carlos Rondero, Anna Tarasenko, Juan Alberto Acosta
Universidad Autónoma de Estado de Hidalgo. (México) México
acostah@uaeh.reduaeh.mx, rondero@uaeh.reduaeh.mx, anataras@uaeh.edu.mx
Campo de investigación: Epistemología Nivel: Medio y Superior

Resumen. *Desde la perspectiva de este trabajo se considera a la noción de linealidad como un elemento fundamental en la construcción del saber matemático. Esta noción cumple una función de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada. Se tienen evidencias históricas y epistemológicas de este relevante hecho, a partir de escenarios históricos acerca de su evolución. Desde un punto de vista didáctico se han identificado algunas incongruencias conceptuales. Se busca precisar un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar. Para tal propósito el rescate epistemológico de la noción de linealidad, posibilita su resignificación en la Didáctica de la Matemática.*
Palabras clave: linealidad, epistemología, didáctica

Introducción

En esta investigación se considera que la noción de linealidad, es un elemento fundamental en la construcción de saber matemático. Se tienen evidencias históricas y epistemológicas de que dicha noción cumple una función articuladora que se muestra a través de la evolución de sus conceptos: función lineal, operador lineal, transformación lineal y espacios vectoriales, entre otros, así como el vínculo entre sus diferentes significados que les son inherentes (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2007). Todo lo cual debe repercutir en la didáctica, desde la matemática elemental hasta la matemática avanzada. En particular en este trabajo se reportan ciertas incongruencias conceptuales de la noción de linealidad, desde una perspectiva epistemológica y didáctica. Este tipo de incongruencias se presentan cuando en la definición de un concepto dado, no se hacen explícitas las filiaciones epistemológicas con otros conceptos previos articulados por una misma noción.

Partiendo de la identificación de cuatro escenarios históricos en cuanto a la evolución de la noción de linealidad (Acosta, Rondero, Tarasenko y Karelin, 2008) se toman en consideración las filiaciones y rupturas epistemológicas alrededor de la noción de linealidad, se da cuenta de inconsistencias conceptuales que tienen fuertes implicaciones en la matemática escolar. En lo que se refiere al primer escenario se identifican las culturas ancestrales la egipcia, china y babilonia, donde de la proporción directa y de la progresión aritmética son el sustento de una actividad sociocultural relevante como lo es el cobro de impuestos. El segundo se ubica en la Grecia clásica, con referencia a Euclides y Arquímedes quienes emplearon la proporción directa para sustentar muchos de sus resultados geométricos. Es en este momento histórico donde aparecen las primeras definiciones de recta. Ubicamos al tercer escenario en la época en que aparecieron los trabajos de Fermat y Descartes quienes a partir de lo realizado por Apolonio siglos antes, definen la ecuación de una recta referida a un sistema de coordenadas cartesianas, donde la proporcionalidad toma la forma analítica $b\,x = a$, y se dan los primeros elementos conceptuales de la noción de linealidad. Finalmente la última de estas referencias históricas se da a partir de mediados del siglo XIX, donde inicia la estructuración del Álgebra Lineal, a través de la incorporación de diferentes saberes matemáticos cuyo elemento de articulación conceptual es precisamente la linealidad.

Enfoque teórico referencial

Desde una perspectiva histórica epistemológica, una primera referencia es que la aritmética babilónica posibilitó hacer cálculos astronómicos y mercantiles, además de áreas y volúmenes, donde la proporción directa es la noción preponderante que aparece en todos ellos, Filloy (2003).

En la civilización egipcia, se dan elementos de solución a ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, donde *a, b* y *c* son constantes y *x* variable desconocida. En Boyer (1991) se lee que el método de solución, que aparece en el *Papiro de Rhind,* se conoce en la actualidad como el *método de la falsa posición*.

En Struik (1986), se hace referencia a un libro clásico de la cultura china *Chiu ch'ang Sua-shu* ubicado en la dinastía Han (206 a.C. – 220 d.C.) donde aparecen porcentajes, proporciones y problemas de aplicación de impuestos; así como usos de *"la regla de tres"* y de progresiones aritméticas y geométricas, aborda el cálculo de tiempos de transporte y distribución de impuestos por cantidad de población y se ocupa de la *regla de la posición falsa*, inventada por los chinos (García, 2000).

La noción de proporcionalidad aparece en ambas culturas, en el cálculo del cobro de impuestos y en aspectos geométricos para la estimación de áreas y volúmenes. La noción de linealidad surge incipientemente, desde que aparecen las ecuaciones lineales y las progresiones aritméticas, empleadas para resolver problemas cotidianos y contextuales.

Ya en la Grecia clásica Euclides afirma que por dos puntos pasa una recta y que ésta es única, además la proporcionalidad directa se emplea en el cálculo aproximado del área de un círculo a través del cuadrado de su diámetro. Por otra parte, tomando ideas de Anaxágoras en referencia a las razones y proporciones, Eudoxio de Cnido (408 – 355), define indirectamente la igualdad de dos razones *a: b* y *c: d* (Hofmann, 2002).

En el primer postulado del primer libro *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes da la definición más empleada de la recta hasta nuestros días: *La recta es la línea más corta que une sus puntos extremos.* Por otra parte, Arquímedes aplica la proporcionalidad directa entre variables de la misma dimensión, aunque Euclides había probado que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros (Torija, 1999).

Desde el análisis de la evolución de las nociones referidas, en este segundo escenario la noción de linealidad, empieza a tener una ruptura epistemológica con la noción de proporcionalidad, ya que la connotación abstracta se expresa a través de los postulados y demostraciones de teoremas geométricos.

En la tercera etapa, Descartes (1596 – 1650) construye el primer sistema matemático moderno, abandonando la filosofía natural tradicional, incorporando a las matemáticas todo lo que admite ordenación y medida, sabe que todos los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático pueden resolverse con regla y compás. Fermat y Descartes, dieron pleno sentido a los trabajos de Apolonio sobre lugares geométricos, en particular a la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las x, proponiendo a la recta que pasa por el origen, de la forma $b\,x = a\,y$, y plantearon $a\,x + b\,y = c$ como la ecuación de la recta en su forma general (Hofmann, 2002).

A diferencia de los dos primeros escenarios, en este periodo se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de parejas de números reales (x, y) a un lugar geométrico (en términos modernos, $f(x,y)=0$) representado en un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta representaciones analítico-geométricas, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico (Acosta, Rondero, Tarasenko y Karelin, 2008).

El cuarto escenario, ubicado a partir del siglo XVIII, es donde inicia de manera incipiente del Álgebra Lineal, tomando en consideración algunas ideas de Euler y de Cramer, entre otros. Se va creando una teoría de sistemas de ecuaciones lineales, tratándose el caso de *n* ecuaciones con *m* incógnitas, el estudio de los determinantes y el rango de un sistema. Posteriormente se incorporan conceptos como matrices, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Todo lo cual lleva a una estructuración temática y conceptual del Álgebra Lineal, donde el eje epistemológico sobre el que descansa es precisamente la noción de linealidad. Uno de los primeros casos significativos de su tratamiento analítico, aparece en el libro de Euler, publicado en 1750, *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes*. Este estudio lo llevó al hecho de que cualquier sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas tiene solución única, lo cual era una creencia generalizada en ese momento. En términos actuales significa que las ecuaciones son linealmente independientes. El enfoque de Euler va hacia el ajuste de ecuaciones, en tanto el concepto de dependencia lineal es más general, válido para una gran cantidad de objetos. A la inclusión de una ecuación en otra Euler, le llama *dependencia inclusiva*, la cual dominó la concepción en problemas con ecuaciones lineales durante el siglo XIX, Dorier (2000, p. 6-8).

En siglo XVIII, Cramer publicó un tratado titulado *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques.* Este documento es el primero donde aparece una notación para la escritura de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes no específicos. Aunque en 1693, Leibniz había escrito una carta con contenidos semejantes, la cual se publicó por primera vez en 1850. En el libro de Cramer (Dorier, 2000, p. 8-9) se presenta una regla para obtener la solución de sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, como función de sus coeficientes, empleando lo que ahora se conoce como determinantes. El concepto de rango, empezó a tomar forma dentro de la teoría de determinantes entre 1840 y 1879. En referencia a Frobenius (1875) (Dorier, 2000, p.10) se puede decir que es de los primeros autores en definir en términos modernos las nociones de dependencia e independencia lineal simultáneamente para ecuaciones y n–uplas, vinculándolo con el concepto de dependencia inclusiva ya mencionada. Al considerar a las ecuaciones y a las n-uplas como la misma clase de objetos en cuanto a la linealidad. Frobenius da un gran aporte hacia el concepto moderno de vector. Define el concepto de base de las soluciones e incorpora la noción de *sistema asociado* a un sistema dado, esto es, que un sistema de ecuaciones lineales cuyos coeficientes son los componentes de los elementos de cualquier base de soluciones del sistema inicial (Dorier, 2000, p. 10).

Incongruencias conceptuales

Un estudio histórico-epistemológico como el que se ha esbozado, es una muestra de la evolución conceptual de las nociones de proporcionalidad y linealidad, con lo cual se rescatan elementos epistemológicos que en principio es posible incorporarlos a la didáctica de la matemática.

Por otra parte, se desprende un elemento de análisis de carácter didáctico en referencia a lo que propicia incongruencias conceptuales y sobre la forma en que se instalan las nociones de proporcionalidad y linealidad, desde la matemática elemental a la matemática avanzada, al no hacer explicitas las filiaciones entre ambas nociones, esto a su vez repercute en la articulación del *corpus de saberes* que constituyen al Álgebra lineal, incidiendo directamente en su aprendizaje. Cabe señalar que al constituirse un corpus más amplio, se deja de lado una gran parte de los antecedentes conceptuales, que en esencia se identifican por medio de un rescate histórico y epistemológico. En el caso de la noción de linealidad, se pierden algunos de sus significados anteriores, todo lo cual propicia la existencia de incongruencias conceptuales.

Una primera incongruencia que se puede resaltar es la que se da entre la proporcionalidad directa y la función lineal, al tratar de generalizar la proporcionalidad $y = \frac{b}{a}x$, a una nueva forma dada por la llamada función lineal $f(x) = ax + b$, con $x \in \Re$, es decir hay una ruptura epistemológica de lo proporcional a lo lineal, en el sentido de la aparición del término independiente en la expresión de la función.

Otra incongruencia se presenta al abordar desarticuladamente a la función lineal, en el sentido cuando *b ≠ 0,* no cumple con la correspondiente definición de transformación lineal $T(c_1x + c_2y) = c_1T(x) + c_2T(y)$, en el entendido de que sólo la función *f(x)= a x*, es la que satisface esta definición (Golubitsky y Dellnitz , 2001).

Para el caso de dos vectores v_1 y v_2 definidos en R^n, con $n > 1$, se dice que son linealmente dependientes sí y sólo si la combinación lineal $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$, se cumple cuando $c_1 \neq 0$ ó

$c_2 \neq 0$. Un aspecto didáctico rescatable es el que refiere a cómo se relacionan conceptualmente la dependencia lineal y la proporcionalidad directa. Se puede ver de la definición anterior, que se cumplen las proporcionalidades directas, $\overrightarrow{v_1} = -(\frac{c_2}{c_1})\overrightarrow{v_2}$, siempre y cuando $c_1 \neq 0$, o bien $\overrightarrow{v_2} = -(\frac{c_1}{c_2})\overrightarrow{v_1}$, si $c_2 \neq 0$. De manera tal que la dependencia lineal de dos vectores en el espacio R^n, es posible relacionarla conceptualmente con su carácter colineal, en el sentido de que cualquiera de ellos se expresa como el producto de un escalar por el otro vector, esto es, uno es múltiplo del otro. Dicha consideración es poco empleada en la didáctica del Álgebra lineal, lo que podría ayudar a instalar y entender mejor el concepto de dependencia lineal.

En el caso de tres vectores v_1, v_2 y v_3, linealmente dependientes en R^n, además de poder representar uno cualquiera de ellos en términos de los otros dos, por ejemplo

$$v_1 = -(\frac{c_2}{c_1})v_2 - (\frac{c_3}{c_1})v_3 \text{, con } c_1 \neq 0$$

estos tres vectores presentan la propiedad de ser coplanares, es decir, son vectores paralelos a un mismo plano. Cabe aclarar que en cierta forma, la característica de colinealidad se extiende a la de coplanariedad, todo ello se desprende a su vez de la condición de dependencia lineal, la cual es un concepto que surge de la propia noción de linealidad.

Al generalizar al caso de n vectores definidos en R^n, con $n > 1$, es posible analizar cómo se relacionan en este caso la proporcionalidad y la dependencia lineal. Los *n* vectores $v_1, v_2, ..., v_n$, son linealmente dependientes si y sólo si, la combinación lineal,

$$\boxed{c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n = 0}$$

se cumple cuando al menos uno de los coeficientes es distinto de cero.

En tal caso para un $c_k \neq 0$, se tiene que,

$$v_k = -(\frac{c_2}{c_k})v_2 - (\frac{c_3}{c_k})v_3 - .... - (\frac{c_{k-1}}{c_k})v_{k-1} - (\frac{c_{k+1}}{c_k})v_{k+1} - .... - (\frac{c_n}{c_k})v_n,$$

se presenta una extensión de la proporción directa, que podría ser llamada *"proporcionalidad generalizada"*, en el sentido extendido de que término a término aparece la proporción directa, aunque se pierde el sentido original de la misma. Esto se interpreta usualmente como el hecho de que, cuando los vectores son linealmente dependientes entonces es posible representar uno de ellos como una combinación lineal de los otros.

Por último, otro tipo de incongruencia conceptual se da en el caso de los operadores lineales que generan a su vez a las ecuaciones diferenciales lineales como puede ser el caso, $L= aD+b$, donde D es el operador derivada d/dx, a y b son constantes reales.

Este argumento usualmente no se discute en la matemática escolar y por tanto se deja de instalar en los estudiantes esta forma de conceptualizar la noción de linealidad, que como se ha intentado mostrar, es un eje conceptual transversal en toda la matemática**.**

Una ecuación diferencial lineal de primer orden se genera al operar L sobre una función y(x), es decir,

$$L[y(x)] = (aD+b)\ [y(x)]= aD[y(x)]+b[y(x)]= ay'+by,$$

la cual puede ser homogénea o no homogénea, según se iguale a 0 ó a g(x).

Cabe señalar que en este caso la linealidad se centra precisamente en el operador y no en alguna de las variables que intervienen en la propia ecuación diferencial. Esta característica de linealidad se ve reflejada al encontrar la solución general ψ_g de una ecuación diferencial lineal no-homogénea, dada a su vez como combinación lineal de la solución general ψ_h de su correspondiente ecuación diferencial lineal homogénea y la solución particular ψ_p de la ecuación diferencial lineal no-homogénea, esto es,

$$\psi_g = \psi_h + \psi_p$$

esta representación de la solución general, es posible obtenerla precisamente por el hecho relevante de que la ecuación diferencial es generada por el operador lineal L, de modo tal que a su vez se cumple,

$$L(\psi_g) = L(\psi_h + \psi_p) = L(\psi_h) + L(\psi_p) = g(x)$$

Conclusiones

Se ha tratado de mostrar que en la didáctica se dejan de lado los significados que anteceden al concepto de linealidad los cuales forma parte del corpus de saberes del Álgebra lineal, lo que propicia la presencia de incongruencias conceptuales.

La noción de linealidad es un elemento de articulación en la matemática escolar y se puede apreciar su característica de transversalidad conceptual entre la matemática elemental y la matemática avanzada, en el entendido de que la noción adopta diferentes características que tienen su expresión en los conceptos que genera y que a su vez aportan nuevos significados a la misma (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2007).

Una de las rupturas epistemológicas que mayor repercusión tiene en la didáctica, es la que se manifiesta entre la usualmente llamada función lineal, $f(x) = ax + b$ y el concepto de transformación lineal $T(c_1 x + c_2 y) = c_1 T(x) + c_2 T(y)$ ya que sólo *f(x)=ax,* la satisface.

Respecto a las filiaciones epistemológicas de la noción de linealidad, es de resaltarse que su explicitación tiene implicaciones conceptuales de carácter cognitivo y didáctico. Algunas de tales filiaciones se manifiestan en conceptos como función lineal, transformación lineal, dependencia lineal y ecuación diferencial lineal entre otras.

En este trabajo se dan evidencias, sobre todo histórico-epistemológicas, de algunas incongruencias conceptuales que se presentan en relación a la noción de linealidad y que se ven reflejadas en el aprendizaje ciertas áreas de la matemática como son el Álgebra lineal y las Ecuaciones diferenciales.

Es posible identificar el fenómeno didáctico de las incongruencias conceptuales en relación a otras nociones matemáticas, lo cual puede incidir en su aprendizaje

Se concibe que la evolución epistemológica de las nociones matemáticas como es este caso la linealidad, aporta elementos que repercutan en su instalación didáctica en diferentes momentos de la trayectoria escolar de un estudiante.

Referencias bibliográficas

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. y Karelin, O. (2008). Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. *Memoria del HPM 2008, ICME,* México, D.F., México

Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2007). El papel de la linealidad como noción articuladora en la didáctica. *Memoria de la XI EIME, UAY, México*

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 33-59). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Dorier, J. (2000). *On the teaching of linear algebra.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E. (2003). *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana.* México. Grupo Editorial Iberoamérica.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción.* España: Gedisa Editorial.

Golubitsky, M. y Dellnitz M. B (2001). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de MATLAB.* México: Thomson Editores.

Hofmann, J. (2002). *Historia de la matemática.* México: Limusa.

Struik, D. (1986). *Historia concisa de las matemáticas*. (2ª ed.). Serie Maestros del Pensamiento Científico. México: Instituto Politécnico Nacional.

Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* (2ª ed.). La matemática en sus personajes. España: NIVOLA.

Boyer, C. (1991). *A History of Mathematics.* Nueva York: Wiley.