

ALGUNAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES AL ASOCIAR ECUACIONES LINEALES CON SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Fermán Arellano Cabezas¹, Asuman Oktaç¹⁻²
1 Cinvestav – IPN
2 Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
ferman.arellano@gmail.com, oktac@cinvestav.mx
Campo de investigación: Gráficas y funciones

México
Chile
Nivel: Medio

Resumen. Frecuentemente, se hace énfasis en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas movilizar diversos registros de representación de una misma gestión. Sin embargo, el tratamiento de conversión de una representación en una representación de otro registro no es fácil y en ocasiones hasta imposible. Al respecto, Duval (1988) señala: “cuando se efectúa la conversión ecuación \rightarrow gráfico no surge ninguna dificultad, pero todo cambia cuando se hace la conversión inversa”. Este aporte es muy sobresaliente e induce a investigar la naturaleza de esta problemática. En este sentido, nuestro trabajo de investigación está enfocado en identificar algunas dificultades que puedan presentar los estudiantes al tratar de poner en correspondencia el registro gráfico con el algebraico. Para ello, se aplicaron actividades donde se exponen algunos valores visuales de la gráfica, con el fin de establecer una correspondencia entre esos valores visuales de la recta y su respectiva escritura algebraica, así como, establecer un sistema para las diferentes categorías de tres rectas en el plano.

Palabras clave: ecuaciones, gráficas, representación

Problemática de investigación

Algunas investigaciones en Didáctica del Álgebra Lineal, por ejemplo Mora (2001), Eslava y Villegas (1998), reportan que a los alumnos se les dificulta asignar un sistema de ecuaciones lineales a un gráfico dado. Al plantear ejercicios como: ¿cuál es el sistema de ecuaciones lineales con dos variables para el gráfico?, muchos de los estudiantes no pueden asignar el sistema adecuado.

Por lo general, en cursos de álgebra en el nivel medio superior se prioriza el manejo eficiente de los procedimientos y algoritmos de carácter algebraico, brindando escasa o nula importancia a las representaciones gráficas. El uso de gráficas se remite a ejemplificar algunas de las propiedades analizadas sin explotar la riqueza de significados que la representación gráfica nos puede ofrecer. Estas circunstancias propician que los estudiantes tengan dificultades de interpretación al enfrentarse con preguntas en el contexto algebraico o que requieran de una reinterpretación de los conceptos algebraicos.

Abordar el estudio de este problema, teniendo como marco de referencia la teoría de “Registros de representación semiótica” desarrollado por R. Duval, nos permitió analizar los argumentos y concepciones que presentan los estudiantes al resolver actividades donde se establece implícitamente una correspondencia entre cada modificación de la recta y cada uno de los términos que conforman su expresión algebraica correspondiente.

Objetivo de la investigación

Tomado en cuenta lo anterior, el objetivo de nuestra investigación es identificar aquellas dificultades que puedan presentar los estudiantes al tratar de poner en correspondencia las variables visuales pertinentes de la gráfica y las unidades significativas de la escritura algebraica, y aquellas que se relacionan con el concepto de sistema.

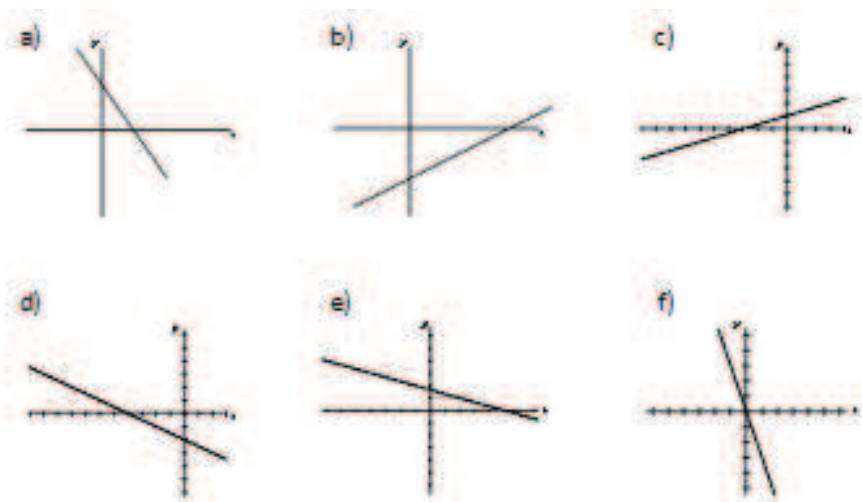
Metodología

Se aplicaron las actividades a seis estudiantes de nivel medio superior cuyas edades variaban entre 16 y 18 años: Jessica y Roberto cursaban el segundo semestre, Daniel y Bruno el cuarto semestre y Alex y Sergio el sexto semestre. Los antecedentes académicos de los estudiantes de segundo semestre son: Funciones lineales, Ecuaciones lineales, Sistemas de ecuaciones lineales. Los de cuarto semestre: Geometría, Sistemas de coordenadas y lugares geométricos, La recta y su ecuación cartesiana. Los de sexto semestre: Cálculo diferencial e integral.

Para la recopilación y análisis de datos se desarrolló una entrevista clínica. Durante su aplicación se les indicó a los estudiantes que al considerar erróneo algún procedimiento no se borrara, con el fin de observar así las diferentes estrategias que utilizaban en intentar resolver cada actividad.

Las actividades que se aplicaron fueron las siguientes:

1. Adivina mi ecuación



El propósito de esta actividad es identificar las dificultades que puedan presentar los estudiantes al tratar de asignar la ecuación correspondiente a cada gráfica (las cuales exponen diferentes valores visuales).

2.

- a) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica sean rectas paralelas.
- b) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica sean rectas idénticas.
- c) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica muestre sólo un punto de intersección entre las rectas.

3.

- a) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica forme un triángulo con las intersecciones de sus rectas.
- b) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables, donde en su representación gráfica se observen sólo dos rectas.

- c) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables, donde en su representación gráfica se observen sólo dos intersecciones.

El propósito de las actividades 2 y 3 es identificar las dificultades que puedan presentar los estudiantes al construir sistemas de ecuaciones lineales que generen cada una de las diferentes categorías de tres rectas en el plano.

4. Escribe dos ecuaciones lineales con dos variables cuyas gráficas intersequen a:

- a) Los ejes x y y positivos
- b) El eje x negativo y el eje y positivo
- c) Los ejes x y y negativos
- d) El eje x positivo y el eje y negativo

El propósito de esta actividad es identificar y analizar las dificultades que pueden presentar los estudiantes respecto a las unidades simbólicas de la escritura algebraica y las modificaciones pertinentes de las variables visuales del gráfico.

Resultados y discusiones

En este apartado presentamos trabajos de algunos estudiantes y extractos de entrevistas, para ilustrar las dificultades que muestran los estudiantes.

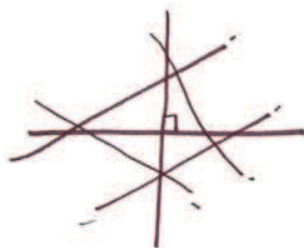
Actividad 1:

Alex concluye cada inciso con la ecuación $y = mx + b$, argumentando:

Alex: Bueno, creo que es de todas las pendientes, o sea cualquier recta que cruce a cualquier eje x ó y , sí, mientras no tenga 90° creo que ésta es la ecuación.

Entrevistador: ¿Puedes mostrarme las rectas que representa esta ecuación $y = mx + b$?

Alex: Sería así,



son ésas las posibles rectas.

Cuando se le pregunta ¿qué es pendiente?, Alex contesta: “es cualquier recta que no cumple con los 90° , por ser pendiente la recta, su ecuación es $y = mx + b$ ya que la pendiente está dada por dicha ecuación”.

De esta manera observamos cómo Alex confunde la pendiente como una recta y no como la inclinación de la recta.

También se observa que no pueden establecer la ecuación para un gráfico que no tiene “escalas” en los ejes coordenados:

Bruno: es (x, y) , debido a que cualquier punto se mueve en ella.

Daniel: diría que x más un número real es igual a y , sería $x + \mathfrak{R} = y$, y así voy dando valores.

De esta manera, se observa que no se realiza una discriminación de las unidades significantes en el registro de partida (el gráfico) y en el registro de llegada (algebraico), esto impide establecer una correspondencia entre las unidades simbólicas de la escritura algebraica y los valores de las variables visuales. Y en consecuencia, pasar de una representación a otra.

Actividades 2 y 3:

Al inicio de estas actividades hubo desconcierto ante la palabra “sistema”:

Daniel: ¿de tres ecuaciones?

Entrevistador: sí.

Daniel: ¿cada una debe ser una recta diferente?

Entrevistador: entonces ¿cuál el sistema de tres ecuaciones?

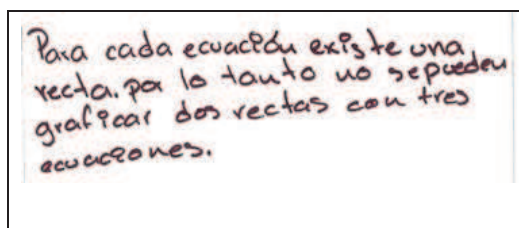
Jessica: ¿el sistema de qué?

Alex: ¿son tres ejemplos diferentes o cómo?

Roberto: ¿tres ecuaciones con dos variables a qué se refiere?

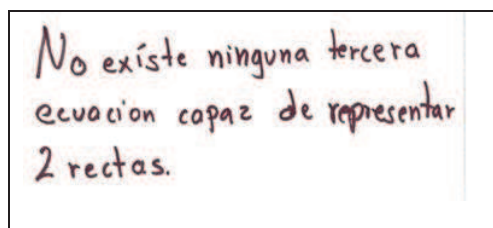
Además, mostraron dificultades para interpretar una de las diferentes categorías de tres rectas en el plano con un sistema de tres ecuaciones lineales:

Bruno:



Para cada ecuación existe una recta, por lo tanto no se pueden graficar dos rectas con tres ecuaciones.

Alex:



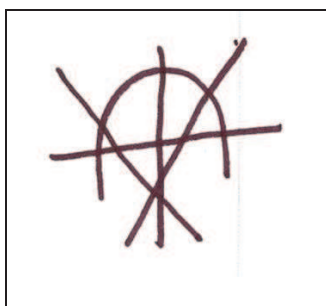
No existe ninguna tercera ecuación capaz de representar 2 rectas.

De igual manera, Jessica no concibe que exista un sistema de tres ecuaciones lineales que represente dos rectas en el plano:

Jessica: ¿para qué quieres tres ecuaciones si sólo se hace con dos?, o una de éstas no dé recta, sino otra cosa.

Entrevistador: ¿cómo sería?

Jessica: (bosqueja)



¿se piden dos rectas, no?

Actividad 4:

Jessica interpreta la solución como la ubicación de un punto (x, y) en el plano cartesiano, relacionando los signos de las coordenadas del punto con los signos de los ejes indicados en cada

inciso. Ella escribe: $y+3=0$ $x+2=0$ ---c), $y-6=0$ $x-2=0$ ---a), $y-5=0$ $x+12=0$ ---b), y argumenta: eso es más fácil, pues $y+9=0$ $x-3=0$ ---d)

únicamente hay que despejar y dejas sola a y , x , y ya te sale (señala x y y en cada ecuación).

$$y = +6 \quad y = -9$$

Jessica: esto es: a) $x = +2$, d) $x = +2$,



Con base en sus argumentos observamos como Jessica presenta dificultades para expresar una ecuación lineal con dos variables. También presenta dificultades para construir una ecuación que

interseque un lugar específico del plano, al interpretar esta condición como establecer un punto coordenado (x, y) . Esto nos condujo a realizar la siguiente pregunta: ¿Qué es una ecuación lineal?

Jessica: pues es, hacer una operación con dos números que no se conocen, y hay que saber cuál es su valor.

Consideramos que esta forma de concebir a una ecuación lineal impidió que esta estudiante contestara de manera correcta la actividad.

Nota. Sólo un estudiante pudo contestar correctamente las actividades, éste manifestó un manejo eficiente entre los dos registros de representación. Además, un buen manejo de técnicas para encontrar la pendiente de la recta y un reconocimiento preciso del coeficiente a y de la constante b , en la ecuación $y = ax + b$.

Conclusiones

Los resultados poco satisfactorios que muestran los estudiantes para pasar del registro gráfico al algebraico, se debe a la no discriminación de las variables visuales pertinentes y una correspondencia sistemáticamente establecida entre los valores de esas variables y las unidades simbólicas de la escritura algebraica. Cabe mencionar que el único medio para llegar a discriminar es mediante la **observación**, que permite la identificación de relaciones o la organización de relaciones (ciertas formas, comportamientos) entre las unidades significantes que constituye a una representación semiótica.

De esta manera, la construcción de la expresión algebraica a partir de la información que proporciona la gráfica, demanda desarrollar tratamientos que favorezcan la identificación de los elementos gráficos (relaciones cualitativas en la representación gráfica), para luego construir la expresión algebraica.

Otra de las causas que impide pasar de un registro a otro es, que aún prevalece un encerramiento a un registro de representación, este encerramiento conduce un obstáculo; en el momento en que

la mayoría de alumnos salen del contexto en el cual se realizó el aprendizaje, se muestran incapaces de manejar los conocimientos adquiridos.

De esta manera se omite todo tipo de actividades que den luz de la relación que existe entre dos o más registros, particularmente, la relación entre un gráfico y la expresión algebraica de su ecuación correspondiente.

En este sentido, consideramos de suma importancia “construir la expresión algebraica a partir de una gráfica”, con base a una interpretación global, es un tema relevante que debe ser incluido en los programas de matemáticas en el nivel medio superior. Así como, disponer de varios registros de representación semiótica de una misma gestión, y poder realizar una coordinación entre estos registros, deben adquirir atención.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1988). Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253.

Eslava, M. y Villegas, M. (1998). *Análisis de los modos de pensar Sintético y Analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano*. Tesina de Diplomado no publicada, UAEH. Hidalgo.

Mora, B. (2001). *Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F, México.