EL INFINITO MATEMÁTICO: LA ESCUELA, CANTOR Y BOLZANO

Patricia Lestón, Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Buenos Aires, Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.CICATA–IPN México
patricialeston@yahoo.com.ar, crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El infinito matemático fue caracterizado y formalizado en la obra de Bolzano y Cantor en el siglo XIX. En su época esas ideas provocaron negación e incluso rechazo en parte de la comunidad matemática. En este trabajo, se presenta el análisis de parte de los trabajos de Cantor y Bolzano, buscando obtener algunas ideas que permitan organizar un instrumento de indagación para comprender la manera en que los estudiantes de los últimos años de la carrera de profesorado de matemática entienden las caracterizaciones del infinito dadas por Bolzano y Cantor y su naturaleza, y la presencia y problemática del infinito matemático en el aula*
Palabras clave: Infinito matemático, construcción sociocultural

Introducción

Este trabajo forma parte de una investigación en la línea de la construcción social del conocimiento con enfoque socioepistemológico, centrada en la construcción del infinito matemático. En trabajos previos se ha indagado sobre la presencia del infinito en el aula y su construcción fuera de ella (Lestón, 2008, Lestón y Crespo Crespo, 2009).

El infinito no académico de carácter intuitivo, es construido por los estudiantes fuera de escenarios escolares, asimilado a lo que no termina y lo que no se puede contar. Entra en el aula sin que haya conciencia de que se trata de un infinito de distinta naturaleza, y genera dificultades en la construcción del infinito matemático.

Nociones como límite, derivada, variación, función y muchas otras son vistas en la actualidad como imprescindibles dentro del discurso matemático escolar. Se apoyan sobre otros elementos, que se discuten y presentan a lo largo de años previos de educación escolarizada. Sin embargo, el infinito, sobre el que se apoyan muchos de estos conceptos, no forma parte de la matemática escolar, aún cuando aparece en distintos momentos del discurso matemático escolar. Este concepto es, aunque utilizado, olvidado como elemento a ser construido escolarmente. Podría decirse que es uno de los elementos a los que Cantoral (1995) llama *evidencias familiares*.

> *El discurso que marca el inicio de una enseñanza necesita inevitablemente de los puntos de partida no explícitos, que serán tomados como evidencias familiares. Dicho discurso al que hemos llamado Discurso Matemático Escolar señala el principio de una enseñanza. (p. 9)*

El problema es entonces que, para el infinito, lo familiar asociado a esta noción no guarda la relación esperada con lo que la matemática requiere. En esta investigación se toma como hipótesis la existencia del infinito como elemento sociocultural, y su presencia como *evidencia familiar* que sirve de punto de partida para construir otras nociones, mientas que la escuela asume esa construcción no escolar como suficiente y compatible con lo que necesita. Las características del infinito intuitivo que se presentaron en Lestón (2008), en general, distan mucho de lo que es el infinito matemático, más cercanas a lo filosófico o religioso que a lo matemático.

> *Culturalmente se generan ideas que rodean al infinito. Surge el término como adjetivo para adjudicar a todo aquello que no se puede calificar como "mucho", "muy grande". Es lo que excede a todo lo que es cuantificable. Es además una expresión de extensión del amor, del deseo, de la fe. Un amor infinito es un amor absoluto. Tan absoluto como es para un religioso el poder de Dios. (Lestón, 2008, p.114)*

Sin embargo, esa distancia no es contemplada por la escuela, lo que creemos provoca que aparezcan conflictos en las aulas cuando los docentes hablan o utilizan al infinito: hay una ruptura entre lo que los estudiantes entienden por infinito y lo que los docentes creen que están entendiendo o necesitan que sus alumnos entiendan. Se lo utiliza en la vida cotidiana para referirse a distintas cuestiones, existiendo fuera de la escuela un infinito, que no corresponde de manera completa al infinito matemático que se utiliza en el aula. La escuela utiliza el concepto de infinito pero no lo define ni caracteriza más allá de un "no tiene fin". Se produce entonces un choque entre esos dos infinitos: el construido socialmente y desconocido por la escuela (que además no es único), y el matemático, que se utiliza en la escuela, pero es desconocido por los alumnos. Entendemos entonces que es necesario centrar la discusión en el infinito matemático para comenzar a modificar el discurso matemático escolar alrededor de ese concepto.

La socioepistemología y la construcción social del conocimiento

La escuela y el discurso matemático escolar intentan responder a lo que una comunidad requiere de ellos. Sin embargo, la deficiente capacidad de actualización de esta institución hace que muchas veces se pierda de vista el sentido de la misma. Y no sólo es el sentido lo que se pierde sino la conexión con la comunidad. La escuela insiste en mantenerse ajena a lo que ocurre en el exterior, intentando defenderse de la invasión de la cultura popular, sin comprender que esa cultura no sólo es valiosa, sino que es parte de cada uno de los miembros de la comunidad y como consecuencia, ingresa en cada uno de ellos a los salones de clase (Lestón, 2008).

La matemática educativa como disciplina ha comenzado a reconocer lo que ocurre con este tipo de nociones y formas de accionar, y está intentando dar respuesta a estas cuestiones (Castañeda, Buendía, Crespo Crespo, Lezama, Molina, Montiel, Martínez, Rosas y Sánchez, 2008). Se reconoce que el saber matemático es producto de diversos escenarios: académicos y no académicos. El infinito al que llamamos intuitivo es una construcción cultural, producto de un escenario sociocultural no académico, que, aunque relacionado con una noción matemática de inconmensurable o, simplemente, sin fin; es distinto al infinito matemático, producto de un escenario académico. Creemos que es necesario un rediseño del discurso matemático escolar que entienda qué ocurre con el infinito en el aula y que se permita discutir lo que llega a ella desde el exterior. Es necesario entonces comenzar a tomar conciencia respecto a estos obstáculos o conflictos, incorporando elementos de discusión a la clase de matemática.

> *La tarea de fortalecer el discurso matemático escolar no se reduce a una tarea de ampliación de los conceptos, debido a que los resultados de carácter didáctico y epistemológico aportan elementos para una tarea de reorganización y/o reconstrucción del discurso. [...] Para los matemáticos educativos, esta disciplina puede proveer de explicaciones detalladas sobre los procesos por los que se desarrolla una idea matemática, observando las condiciones y contextos pasados, los estancamientos, los momentos donde se agregan significados - con lo que se amplían los campos de estudio - o los puntos en la historia en que se descartan ideas asociadas a los conceptos en cuestión. (Castañeda, 2006, pp. 257-258).*

La sociedad ha cambiado desde que aparecieron las primeras escuelas, sin embargo la escuela actual mantiene en su discurso muchas de sus posturas originales. Esto también ocurre con la matemática escolar como parte de ese discurso. “la matemática escolar debe reconocer su papel dentro de un proyecto social llamado educación y por lo tanto debe evolucionar con la sociedad misma” (Montiel, Castañeda y Lezama, 2007, p.585).

La forma de lograr que lo que se construye en la escuela sea realmente significativo y aplicable es marcando las semejanzas y diferencias que hay entre esa construcción y lo que se intuye: es necesario evidenciar la relación entre el infinito intuitivo y el matemático, eliminar las dudas y poner al infinito matemático en un lugar en que se lo pueda estudiar, discutir, analizar, comprender; para entonces así poder incorporarlo como parte de lo que se conoce.

El infinito según Cantor y Bolzano

Interesa saber cómo se presentó el infinito matemático en sus primeros momentos de fundamentación y enfrentarlo a futuros docentes, que tendrán la tarea de comenzar a modificar la manera en que este concepto se aborda en la escuela, con esas obras. Consideramos entonces, inicialmente, dos fragmentos de las obras de Cantor y Bolzano.

1. El Capítulo 1 de *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta* de Georg Cantor (2006) (pp. 85-88)
2. El Capítulo 12 de *Las paradojas del infinito* de Bernard Bolzano (1991) (pp. 46-50)

A continuación presentamos los principales conceptos que se discuten en esos fragmentos, que será lo que nos permitirá luego organizar una base de encuesta con la cual comenzaremos la indagación con los estudiantes del Profesorado.

Capítulo 1 de Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta de Georg Cantor (2006) (pp. 85-88)

Este fragmento inicia con una justificación por parte del autor del por qué es necesario para él adentrarse en el trabajo con el infinito, y en particular con la construcción de los números transfinitos; en la búsqueda de continuar con el desarrollo de la teoría de conjuntos en la que estaba trabajando.

> *La dependencia en que me veo respecto a esta extensión del concepto de un número es tan grande, que sin ésta última apenas me sería posible dar sin violencia el menor paso adelante en la teoría de conjuntos; valga esta circunstancia como justificación, o si es necesario como excusa, por la introducción de ideas aparentemente extrañas en mis consideraciones (Cantor, 2006, p. 85)*

Este trabajo provocó a Cantor un enfrentamiento con muchos de sus colegas, que desacreditaron tanto sus producciones como su persona. Según este fragmento, estos enfrentamientos no fueron inesperados, aunque tal vez no haya sabido al escribir estas líneas la magnitud del ataque que le esperaba. La intuición es reconocida como componente de las ideas hasta ese momento aceptadas y es conciente de que lo está a punto de introducir contradice esa intuición. Esas ideas contraintuitivas se siguen manifestando de la misma manera, y la intuición sigue manteniendo su status respecto a este concepto, no ya dentro de la comunidad matemática, pero sí a nivel sociocultural.

Se distingue inicialmente al *infinito impropio* como el infinito matemático que hasta ese momento había sido aceptado. Ese infinito tiene como característica "el papel de una cantidad variable que o bien crece más allá de todos los límites o bien se hace tan pequeña como se desee, pero siempre continúa siendo finita" (Cantor, 2006, p. 85). Este infinito puede relacionarse con el infinito potencial de los griegos, que había llegado desde la antigüedad hasta el siglo XX, es algo finito variable.

Luego, a partir de trabajos del campo de la teoría de funciones, define un *infinito propio* que permite justificar un pensamiento que ya estaba siendo usado: la existencia de un punto en el campo que representa la variable compleja ubicado en el infinito, infinitamente distante pero determinado. Este tipo de infinito es para Cantor un *infinito determinado*.

En función de esa distinción entre los dos infinitos propio e impropio, Cantor introduce sus números transfinitos, haciéndolos surgir de la existencia de los puntos ubicados en el infinito, el infinito propio de Cantor. Este punto, que hasta ese momento era único, es la base para la fundamentación del conjunto de los números transfinitos, cada uno distinguible de los otros y con relaciones aritméticas regulares entre ellos y con los enteros finitos. A partir de esto, Cantor retoma la idea de potencia, que ya había trabajado y muestra cómo esas potencias definen una secuencia de números transfinitos.

> *Conforme a este concepto, a todo conjunto bien definido le corresponde una potencia determinada, de modo que dos conjuntos tienen la misma potencia si se pueden coordinar uno con otro, elemento a elemento, biunívocamente (Cantor, 2006, p. 88)*

Hasta aquí, Cantor logra caracterizar al infinito no como el resultado de lo finito cambiando, sino como un elemento con entidad, con existencia justificada por el uso previo a su definición, por su coherencia con lo ya existente y aceptado en un cuerpo de conocimiento. Y si bien no encontramos aquí una definición de lo que es el infinito, podemos encontrar un sustento para su entidad como objeto de conocimiento.

El Capítulo 12 de Las paradojas del infinito de Bernard Bolzano (1991) (pp. 46-50)

Esta sección del trabajo de Bolzano presenta una discusión sobre las definiciones o explicaciones que se habían dado al infinito hasta ese momento dentro de la matemática y la filosofía. Al igual que en el caso anterior, no se presenta aquí una definición para el infinito, pero sí una caracterización que permite argumentar en contra de los problemas que este concepto ha presentado a lo largo de la historia. La primera definición que presenta es adjudicada a Cauchy y Grunert y es una idea bastante próxima a la que se puede encontrar en las aulas en la actualidad.

> *Algunos matemáticos […] han creído ofrecer una explicación del infinito al describir a éste como una cantidad variable; cuyo valor se incrementa sin límite y puede sobrepasar cualquier cantidad dada, independientemente de la magnitud de ésta. El límite de ese crecimiento ilimitado sería una cantidad de magnitud infinita. (Bolzano, 1991, p. 47)*

Frente a esta descripción, el autor muestra una serie de inconsistencias que hacen que la definición no sea correcta matemáticamente. En primer lugar, existe la cuestión del uso del término *cantidad variable*, ya que según Bolzano esa *cantidad* no es una cantidad sino una noción de cantidad, la idea de una cantidad. Para comprender esa idea de cantidad, debe aceptarse que existe un conjunto infinito de cantidades que difieren en su magnitud, no pudiendo el infinito pensarse como una cantidad determinada. Además, el autor encuentra un problema al pensar en lo infinitamente pequeño: si el límite de un crecimiento ilimitado es lo infinitamente grande, entonces, el cero debería considerarse como el límite de un decrecimiento ilimitado, es decir, lo infinitamente pequeño, lo que resulta contradictorio.

La segunda definición que se presenta es la ofrecida por Spinoza y otros filósofos y matemáticos. Esta definición a su criterio, contraria a la anterior que caracterizaba como demasiado amplia, le resulta demasiado estrecha, además de incorrecta.

> *Según ellos, sólo es infinito aquello que no es ya susceptible de un incremento adicional o aquello a lo que ya no se puede añadir (adicionar) nada más (Bolzano, 1991, p. 47)*

La manera en que Bolzano explica la inconsistencia de esta definición es, una vez más, haciendo uso de un ejemplo, muy sencillo de seguir, y lo que es más importante, fácilmente aceptable. Toma como elemento para su ejemplo a una semirrecta, ya de longitud infinita, y a su extensión infinita para convertirla en una recta.

> *Sin embargo, algunos matemáticos ponen en duda la legitimidad de este procedimiento. Pero, ¿qué matemático que no rechace sin más todo lo que tenga que ver con el infinito no aceptará que la longitud de una recta acotada solamente en una dirección, pero que se extiende al infinito en la otra, es infinitamente grande y, no obstante, al mismo tiempo, que puede prolongarse y hacerse más grande extendiéndola en el sentido de la primera dirección? (Bolzano, 1991, p. 48)*

Frente a esta pregunta que hace, queda claro que lo infinito puede ser aún incrementado, aumentado en extensión, o agregando elementos a un conjunto que ya es infinito.

La tercera definición que se presenta en este capítulo se refiere al término al decir "que es infinito lo que no tiene un fin" (p. 48). Esta definición, según Bolzano, sigue siendo insatisfactoria. El fin que entiende el autor es un fin en el tiempo, por lo cual, lo que no es susceptible a ser ubicado temporalmente, como los entes matemáticos, no podrían caer en la clasificación de finito o infinito.

Por último considera el planteo de la psicología racional:

> *También en la psicología racional llamamos infinita a una capacidad cognoscitiva si existe un conjunto de verdades infinito (por ejemplo el que contiene a las que enuncian la serie infinita de los dígitos de la representación decimal de la cantidad* $\sqrt{2}$ *), independientemente de que se alcance o no la omnisciencia (Bolzano, 1991, p. 49)*

No pueden conocerse los términos de esa serie, aún cuando pueda comprenderse el significado de los mismos y la capacidad de las personas de conocer sea limitada. Como última definición, Bolzano presenta la más generalizada según lo que escribe.

> *[...] lo infinitamente grande es aquello más grande que cualquier cantidad dada o asignada. Lo que aquí se requiere es, en primer lugar, una determinación precisa del pensamiento que las palabras 'asignada' o 'asignable' sugieren. ¿Significan únicamente que algo es posible, que puede tener realidad o que no es contradictorio? (Bolzano, 1991, p. 49)*

Esta distinción del término asignado es la que lo lleva a explicar las dificultades que acarrea esta definición. En el primer caso, de lo que es posible o real, toma en consideración lo que dice Fries, entendiendo al infinito como lo *no completable.* Sin embargo, se habla de infinito en relación a cosas que no poseen existencia, como las verdades absolutas. Si en cambio se considera asignable a lo que no resulta contradictorio, entonces surge para el autor otro problema que concluye en el absurdo.

> *Si, por otra parte, se entiende por asignable sencillamente a todo aquello que no resulta contradictorio, entonces en la definición misma del concepto se sugiere que el infinito no existe, pues una cantidad que ha de ser mayor que cualquiera que no se contradiga debería ser mayor que sí misma, lo que resulta claramente absurdo (Bolzano, 1991, pp. 49-50)*

Sobre esta definición Bolzano encuentra un significado más para el término asignable, que es "simplemente aquello que, de alguna manera, se presenta ante nosotros; es decir, aquello que puede convertirse en un objeto de nuestra experiencia" (p. 50). El problema se traslada a la naturaleza de la infinitud de un objeto, si se lo considera una característica interna del objeto, entonces no tiene que ver con que sea o no objeto de nuestra experiencia. El infinito entendido en relación a la posibilidad de ser comprendido o conocido resultaría poco provechoso para la ciencia.

La percepción de finitud e infinitud, sin embargo, están presentes en el infinito sociocultural del que hablábamos en (Lestón, 2008). Lo que no logramos enumerar, conocer, determinar el fin, resulta infinito, aún cuando se sepa que no lo es. Fuera de la matemática, la clasificación depende de la sensibilidad, de lo que podemos absorber a través de nuestros sentidos. Igual que encontramos en el extracto de Cantor, Bolzano no nos da una definición para saber si algo es o no infinito, pero sí nos dice los conflictos que se presentan con las definiciones que se dan habitualmente.

Sobre estas ideas, se preparará para esos capítulos una guía de análisis que será aplicada a alumnos de tercer y cuarto año del Profesorado en Matemática, cuyo objetivo es comenzar a comprender qué es lo que ellos traen de su paso por la escuela media y qué han logrado construir en sus años de formación superior.

Conclusiones

La matemática escolar es, en la mayoría de los casos, producto de la historia y políticas educativas que se ha constituido como cuerpo de saber autónomo (Cantoral, 1995). Sin embargo, este proceso hace que en algunos casos se pierda percepción de lo que se está haciendo o sus razones o motivos. Además, la escuela al constituirse como institución transmisora del saber se ha ido alejando del grupo o comunidad del cual es resultado, perdiendo de vista cómo se construye. Tenemos por lo general, escuelas que niegan y rechazan lo que es construido en escenarios socioculturales no académicos, y eso hace que pierda el lugar que ocupara en el pasado. La pérdida de hegemonía que en algún momento la escuela compartía con la familia en la transmisión de cultura está originada, en parte, “por causa de una escuela que sigue exigiendo a los alumnos dejar fuera de ella su cuerpo y su alma, sus sensibilidades, sus experiencias y sus culturas” (Barbero, 2008, p. 68). Quienes ingresan a la escuela viven en una comunidad de la que heredan cultura y en la que construyen su identidad, y quienes salen de la escuela deben llevar consigo una serie de conocimientos que resulten de utilidad para esa comunidad a la cual se “reinsertan” como personas formadas, ciudadanos racionales que con sus herramientas pueden comprender y modificar la realidad que los rodea. Tenemos entonces que hacer que los futuros docentes vean cómo deben construir un discurso que permita que sus alumnos logren construcciones que sean respetuosas y útiles para sus comunidades.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.), *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp. 65 – 99). Buenos Aires: Siglo XXI Editores.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito.* México: Mathema.

Cantor, G. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta.* J. Ferreirós (Ed.), Barcelona: Crítica.

Cantoral, R. (1995) Matemática Educativa*. Pedagogía 10 (5),* 4-13

Castañeda, A. (2006) Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra De L´Hopital y María G Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 9* (2), 253-265.

Castañeda, A., Buendía G., Crespo, C. Lezama, J., Molina, J., Montiel, G., Martínez, G., Rosas, A. y Sánchez, M. (2008). *Las líneas de investigación en el Programa de Matemática Educativa del CICATA-IPN.* Documento interno, Prome-Cicata-IPN. México.

Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en matemática educativa. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1145-1154. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Lestón, P. y Crespo Crespo, C. (2008). El infinito escolar. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1117-1126. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G., Castañeda, A. y Lezama, J. (2007). Investigación e innovación en educación a distancia en línea para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa, pp. 581-602.