

## PENSAMIENTO PROPORCIONAL. UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Ivan Castro de Almeida, Leonora Díaz Moreno

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

icabsb@gmail.com, leonoradm@yahoo.es

Campo de investigación: Pensamiento variacional

Chile

Nivel: Básico, Medio

**Resumen.** *Se aborda, desde una perspectiva socioepistemológica, la construcción del conocimiento y el desarrollo del pensamiento proporcional buscando generar espacios de reflexión y de interacción con el profesorado y el estudiantado que posibiliten la resignificación del conocimiento institucionalizado. Recurre entre otras fuentes y técnicas, al análisis de textos didácticos clásicos y contemporáneos, con el objeto de visualizar la naturaleza y evolución de los saberes matemáticos y escolares en juego, y, decidir aspectos necesarios a los diseños de secuencias didácticas en orden a favorecer la significación de fracciones, razones y proporciones como conceptos-herramientas en el estudiantado en el ámbito de la proporcionalidad. Tiene el objetivo de comprender de qué manera las prácticas que toman lugar en el aula, contribuyen al desarrollo del pensamiento proporcional de los estudiantes, en los niveles 5º al 10º de la escolaridad obligatoria.*

**Palabras clave:** Pensamiento proporcional, fracciones, razones, socioepistemología.

### Antecedentes

Chile da una gran importancia al estudio de las proporciones en las escuelas básicas y medias, como ocurre en muchos de los países. Lo expresa en su estructura curricular, y en los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios (MINEDUC, 2002) iniciando su aprendizaje formal en el 7º grado de la educación básica y siguiendo hasta educación media. La propuesta de planes y programas aún privilegia el carácter instrumental y estático de la razón matemática y de las proporciones. Esto se pone en evidencia en los lineamientos de los programas de estudios oficiales del MINEDUC (2004).

David Block (2001) en su tesis de doctorado afirma que el desaparecimiento de la razón matemática del discurso escolar ha sido progresivo, y está relacionado con la tendencia, principalmente, a partir del siglo XIX, de la formalización del álgebra y del análisis ampliando sus dominios hacia nuevos objetos y trivializando los teoremas relativos a razones y proporciones (p. 10). En el sistema escolar, la pérdida de importancia ocurre, según este autor, principalmente, en las décadas de los años 60 y 70, con las reformas curriculares ocurridas en América Latina a través del movimiento de la “matemática moderna”, dirigido hacia al desarrollo de recursos matemáticos

considerados más eficientes, como la función lineal y el formalismo algebraico. El aspecto relacional de la proporcionalidad, su faceta dinámica y funcional no se hace presente, por lo menos explícitamente, como propuesta para el desarrollo del pensamiento proporcional. El tratamiento estático de la proporcionalidad ha conducido a una centración en lo operativo en detrimento de lo funcional, en el resultado en detrimento al proceso, como han mostrado varios estudios realizados por Díaz (1998, 2006, 2008). En Brasil, Carraher, Carraher, Schliemann y Ruiz (1986) y Oliveira y Santos (2000) han mostrado también esta limitación en el estudio de la proporcionalidad en el ciclo básico. La importancia de la proporcionalidad en el desarrollo del pensamiento matemático no es reciente. Piaget (Inhelder y Piaget, 1958) en sus estudios acerca del desarrollo del pensamiento matemático en los niños, mostraron el carácter abstracto y el orden cognitivo superior que exige el aprendizaje de las proporciones. Varios autores consideran al pensamiento proporcional como el fundamento en la construcción de varios conceptos matemáticos avanzados, como por ejemplo la función lineal y la derivada. Para Díaz (2008) constituiría un eje transversal al desarrollo del pensamiento variacional. Behr, Lesh y Post (1988) consideran a este razonamiento como el anclaje de todo pensamiento algebraico y que deviene del aprendizaje de fracciones, cocientes y razones. Malloy, Steinhorsdottir y Ellis (2004) afirman que debe haber acuerdo acerca de la importancia del entendimiento de razones y proporciones como crucial en la enseñanza de la matemática básica. La conceptualización de las proporciones, a su vez, pasa por una multiplicidad de enfoques, que les dan cuerpo y vida en el desarrollo de la matemática elemental. Estos autores testifican la complejidad de su aprendizaje al evidenciar que el pensamiento proporcional no es la suma de sus partes (cómo igualdad de razones) sino una idea mayor. Para ellos, usualmente, hay una tendencia a centrarse apenas en sus componentes, y de ahí establecer la proporcionalidad. Esta complejidad, propia de la episteme del pensamiento proporcional, sugiere la necesidad de desarrollar una diversidad de problemas prácticos que actúen a favor del aprendizaje integral y significativo de los estudiantes. Cada uno de estos conceptos-herramientas comporta en efecto varias propiedades, cuya pertinencia es variable según las situaciones a tratar. Algunas se pueden comprender muy pronto, otras mucho más tarde en el transcurso del aprendizaje. Por ejemplo, la idea de parte-todo es mucho más simple que la idea de equivalencia de fracciones, esta última, depende de la idea de categorización (es decir, cada clase de equivalente, corresponde a una categoría de número racional, o simplemente un número racional). La definición pragmática de un concepto pone, por tanto, en juego al conjunto

de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, así como al conjunto de los esquemas construidos por los sujetos en estas situaciones.

### Marco teórico

Distintas concepciones acerca del desarrollo del aprendizaje matemático tienen distintos efectos en la visión de la relación sujeto-objeto matemático. Una concepción, propia de la psicología cognitiva identifica con la “actividad matemática” a la manipulación de conceptos y teoremas asociados al objeto matemático. Otra concepción identifica a las situaciones y prácticas en que las personas realizan una tarea matemática, con la “actividad humana”. En este caso, los conceptos son herramientas para la acción. Situación, en este contexto, se entiende en sentido amplio, considerándola no sólo como una clase de objetos materiales o mentales, sino también, como sucesos o fenómenos, problemas, teoremas, y teorías. Lo que interesa es la funcionalidad de los conceptos, como herramientas en la construcción del conocimiento matemático, con base en prácticas sociales que posibilitan su reconstrucción y resignificación en el seno escolar (Cantoral, 2001). Este acercamiento teórico, de carácter socio-histórico, denominado socioepistemología, considera toda la complejidad del pensamiento matemático, sistémicamente, en sus componentes, didáctica, epistemológica, cognitiva y socio-cultural, normadas por prácticas sociales que les dan cabida. En este contexto, el concepto de resignificación del conocimiento se hace presente como unidad de análisis básico para su comprensión. Se refiere a la idea del conocimiento en evolución, en que el saber matemático determina y cambia el entendimiento del estudiantado según los escenarios o situaciones didácticas en que este saber opera. Es decir, el saber matemático, no es ajeno al proceso de su construcción, de la interacción con el estudiantado y el profesorado. Como ejemplo, se puede citar el trabajo de Montiel (2005) sobre funciones trigonométricas, en que ella muestra que el “seno de algo”, asume significaciones distintas según las prácticas históricas de referencia que ella ha identificado: de la matematización de la astronomía (práctica de anticipación) de la física (práctica de predicción) y del calor (práctica de formalización) todas ellas bajo la práctica social de “predicción”, analizada, inicialmente, por Cantoral (2001), en su estudio sobre la didáctica y construcción de la noción de predicción. Considerar a la matemática una construcción sociocultural lleva a analizar la evolución socio-histórica de conocimientos matemáticos, para comprender y describir los diversos escenarios

socioculturales en que dicho conocimiento se ha desarrollado. Según Crespo (2007) este análisis tiene por objetivo comprender *cómo, para qué y por qué* surgió cada concepto, así como *qué* significado tuvo en ese escenario. De esta manera, los componentes epistemológico, cognitivo, didáctico y sociocultural, aparecen involucrados de modo sistémico en este tipo de investigación, y, las ideas y pensamientos matemáticos, por este carácter sociocultural, son el reflejo y producto de un escenario específico. Así, el individuo reconstruye los significados a partir de determinadas prácticas desarrolladas intencionalmente para eso, desde una situación didáctica intencional. Los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan, entonces, un papel importante en la explicación del conocimiento desde la matemática educativa (Martínez, 2005). En este contexto, es relevante, la caracterización de los procesos de construcción del conocimiento matemático, y bajo qué condiciones las personas ponen en funcionamiento los conocimientos matemáticos ante las situaciones exigidas. Para Martínez (2005) *“son las circunstancias de construcción de conocimiento las que determinan o condicionan la emergencia de este conocimiento funcional”* (p. 198). En términos de Arrieta (2003) para aprender ciencia, en particular matemática, es necesario aprender cómo se reconstruye esta experiencia en el discurso escolar científico. Reconstruir esta experiencia dialécticamente, situarla en contextos argumentativos, donde las prácticas promueven la construcción del conocimiento científico en el contexto social en que ellos ocurren, son componentes centrales en su acercamiento teórico.

### Propósito

Esta investigación aborda, desde la perspectiva antes descrita, la construcción del conocimiento y del desarrollo del pensamiento proporcional, buscando generar espacios de reflexión y de interacción con el profesorado y el estudiantado que posibiliten la resignificación del conocimiento institucionalizado. Recurre entre otras fuentes y técnicas, al análisis de textos didácticos clásicos y contemporáneos, con el objeto de visualizar la naturaleza y evolución de los saberes matemáticos y escolares en juego, y, decidir aspectos necesarios a los diseños de secuencias didácticas en orden a favorecer la significación de fracciones, razones y proporciones como conceptos-herramientas, es decir, la disponibilidad funcional de estos conceptos en el estudiantado. Tiene el objetivo de comprender de qué manera las prácticas de aula, contribuyen al

desarrollo del pensamiento proporcional de estudiantes del 5º al 10º años de la escolaridad obligatoria.

### Elementos metodológicos

El estudio cuenta con la participación regular del profesorado de la escuela objeto de la investigación, según la espiral autorreflexiva que incluye la planificación, acción, observación y reflexión, con las cuales se pretende lograr el perfeccionamiento docente en la acción; la mejora de los aprendizajes estudiantiles; y, el diseño de secuencias de enseñanza validadas científicamente. En el estudio, docentes, estudiantes e investigadores interactúan de forma que comparten un conocimiento acerca de los conceptos, permitiendo que se transformen en herramientas matemáticas eficaces en la solución de situaciones problemáticas. Se parte de la idea de que este saber no se limita a un conjunto de procedimientos formales con la pretensión de explicar el fenómeno de la proporcionalidad, tal como se le presenta, sino que busca comprenderlo en profundidad, identificando sus diversas realidades, mismas que se van construyendo históricamente y en el seno escolar, en orden a dotar al estudiante de los recursos necesarios para el uso de estas herramientas matemáticas en el proceso de formación de su pensamiento proporcional. La investigación propone la comprensión de prácticas sociales que concurren a las prácticas escolares, teniendo como fuente primaria los entendimientos de los docentes y del estudiantado. Para eso, se ha trabajado con docentes de la educación básica y con estudiantes de pedagogía en matemáticas, y con sus estudiantes, con quienes ocurre la interacción didáctica en el desarrollo de las diversas facetas del pensamiento proporcional, incluyendo el estudio de las fracciones, razones y proporciones. Se recurre a la Ingeniería Didáctica, instrumento metodológico para la enseñanza y para la investigación, que permite desarrollar una acción racional sobre el sistema educativo, intentando captar la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje en situación escolar. Sigue un esquema experimental de ocurrencias didácticas en el aula. Se concibe, realiza, observa y analizan secuencias de enseñanza. Su validación es interna con base en la confrontación de los análisis a priori y a posteriori (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1998; Díaz, 2006). Como metodología de investigación comprende cuatro fases de actividades: análisis preliminares; análisis a priori, que incluye el diseño de secuencias didácticas y la elaboración de conjeturas acerca de estas secuencias didácticas antes de

ponerlas en funcionamiento; experimentación en el aula con el estudiantado; y, análisis a posteriori; este último que confronta las conjeturas establecidas durante el análisis a priori con las producciones estudiantiles y levanta elementos para el rediseño de las secuencias puestas en la escena del aula (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1998). Al recurrir a la Ingeniería Didáctica para develar estos imaginarios, se pretende, a la vez, identificar prácticas sociales que concurren, con las prácticas escolares, al aula en el desarrollo del pensamiento proporcional, y generar transformación en las prácticas didácticas, a través de la actividad reflexiva desde y con el profesorado y el estudiantado en la emergencia de secuencias específicas que potencien el aprendizaje significativo por parte del estudiantado.

### **Elementos precursores del análisis preliminar ya realizados en el marco de la Ingeniería**

#### **Didáctica.**

El cotidiano es vehiculado por la actividad de medir: estudios (Soto, 1992; Rouche, 2006) muestran que el pensamiento y sistemas de medida son recursos importantes para integrar la matemática cotidiana en la escuela en el desarrollo de la proporcionalidad. Este recurso se muestra aun más importante, dado que nuestras actividades con estudiantes de 6<sup>to</sup> básico y de pedagogía en matemática, ha mostrado que la *raya* en la representación de las fracciones y de la razón matemática es entendida por la mayoría del estudiantado como una “operación de dividir”, limitando de esa manera su uso en otros contextos en que la división no juega un rol central, como en la comparación y relación entre magnitudes, esencial para el desarrollo del pensamiento variacional, desde la proporcionalidad. Eso tiene mucho que ver con la propia práctica docente, que hace de la faceta parte-todo de las fracciones una actividad central y casi única, cuando este saber matemático es puesto en juego en el aula. Así que el funcionamiento del triángulo didáctico en acción en el aula, requiere estudiar las fracciones, razones y proporciones de forma integrada como estrategia para el desarrollo del pensamiento proporcional. En este sentido, es fundamental escuchar las voces del estudiantado y ponerlos en comunicación con las de los docentes (el estudiantado tiene en su mayoría percepción de fracciones, razones y proporciones desde su cotidiano). Cambiar el contrato didáctico (Oliveira y Santos, 2000) – y, portanto, el funcionamiento del triángulo didáctico – ha favorecido la emergencia de otras epistemes de la proporcionalidad en el estudiantado. Reforzar su aspecto cualitativo ha sido fundamental para que

el estudiantado establezca un vínculo adecuado entre la matemática cotidiana, que es fuertemente cualitativa, con la escolar, que tiende a ser naturalizada a través de algoritmos repetitivos que poco contribuyen al desarrollo del pensamiento proporcional. Ruiz y Valdemoros (2006) mostraron la importancia de establecer un vínculo en los aspectos cualitativos y cuantitativos de la proporcionalidad, y de su reconstrucción desde el cotidiano de las personas, para lograr resignificaciones que fortalecen las elaboraciones matemáticas de los sujetos. Es interesante observar como, en muchas situaciones cotidianas, podemos identificar que la “percepción” de proporcionalidad es eminentemente cualitativa. Muchas veces las personas “comparan”, por ejemplo, grados de “salinidad” o de “concentración” de una comida o de un jugo, parafraseando a Lamon (2005) por experimentación y aproximaciones sucesivas. En una actividad realizada con docentes de educación básica en el marco del proyecto, les propusimos que analizaran la razón y la proporcionalidad en este contexto. La actividad arrojó evidencias de que efectivamente, antes de cuantificar, la “idea” de la proporcionalidad estaba cualitativamente presente en su discurso. Todavía, el profesorado, mantiene el análisis cualitativo despegado del cuantitativo, como ejes de entendimientos independientes. Nuestra secuencia se desarrolla hacia el reconocimiento de una relación dialéctica entre lo cualitativo y lo cuantitativo en el desarrollo del pensamiento proporcional, mismo que nos parece fundamental tanto para el profesorado como para el estudiantado, en orden a lograr que los aprendizajes sean significativos. El discurso curricular no ha favorecido el desarrollo del pensamiento proporcional. Barbe, Espinoza, Gálvez, Olfos y Ruiz (2006) entre otros, constatan una fragmentación en las propuestas de planes y programas y materializada en los textos escolares, con unidades de enseñanza independientes, con vida propia, sin comunicarse entre ellas, como si cada una fuera ajena a otra, y no parte del mismo proceso para el desarrollo del pensamiento integral de la proporcionalidad. Los textos escolares, base para más de 80% de las escuelas chilenas, privilegian el enfoque estático y su aprendizaje fragmentado. Las razones, por ejemplo, se subordinan al desarrollo de las proporciones, perdiendo visibilidad propia. Cabe señalar que, más tarde, en carreras técnico-profesionales, las razones reasumen su rol específico. Block (2001) ha comprobado también esta tendencia. Esta investigación preliminar, tanto con docentes de la educación básica como con el estudiantado, ha mostrado que el uso de prácticas de medición en el aula, posibilita establecer un diálogo entre las matemáticas cotidianas y las escolares, aportando elementos precursores de un

pensamiento proporcional, como resultado de esas propias prácticas. Afirman los equipos de la experiencia de Díaz (2009) que:

*La enseñanza de Razones y Proporciones en la escuela es una de las tareas difíciles para los maestros y maestras... se manifiesta en el alto porcentaje de alumnos que presentan problemas al confundir fracciones con razones matemáticas. Uno de los aspectos que determina este problema es la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar". Y también que "profesores y estudiantes reconocen acepciones cotidianas de la razón y desconocen la razón matemática (p 22).*

Concluyen que "existe una deficiencia en el conocimiento general de Razones y Proporciones, no solo por parte de los alumnos, sino también, en alguna medida, por parte de los Profesores, lo cual conlleva a requerir un esfuerzo conjunto para mejorar..." (p25). El primer equipo diseñó la secuencia didáctica "Desde la Razón Cotidiana a la Razón Matemática" que atiende a las concepciones de la razón cotidiana y procura que los estudiantes se apropien del concepto matemático de razón. El segundo equipo se propuso entender causas que originan la confusión entre la razón y la fracción en el estudiantado. Sus estudiantes distinguieron fracción de razón sobre la base de la medición de longitudes, en un trabajo contextualizado con material concreto.

### Referencias bibliográficas

Arrieta, J (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. Cinvestav - IPN, México.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1998). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Una empresa docente. GEl.

Barbe, J., Espinoza, L., Gálvez, G., Olfos, R. y Ruiz, R. (2006). *Análisis didáctico en torno a la proporcionalidad en los distintos niveles de enseñanza del sistema educativo*. Extraído el 20/09/2008 de [www.sochiem.cl/jornadas2006/ponencias/41.pdf](http://www.sochiem.cl/jornadas2006/ponencias/41.pdf)

Behr, M. Lesh, R. & Post, T. (1988) Proportional Reasoning. In Hiebert & Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades (pp 93–118)* L.E. & NCTM, USA.



Block, D. (2001) *La noción de razón en las matemáticas de la Escuela Primaria. Un estudio didáctico*. Tesis Doctoral no publicada, Cinvestav – IPN, México.

Cantoral, R. (2001) *Matemática Educativa: un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Carraher, T., Carraher, D. Schliemann y Ruiz, E. (1986) Proporcionalidade na educação científica e matemática: quantidades medidas por razões. *RBEP*, 67(155), 93-107

Crespo C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav – IPN, México.

Díaz, L. (1998) *Reflexiones didácticas en torno a fracciones, razones y proporciones*. Módulo de matemáticas, GPT-Mineduc. Publica Programa MECE/Educación Media. Chile.

Díaz, L. (2006) Diálogo de Imaginarios de Estudiantes, Profesores y Saberes matemáticos. Una Línea de Investigación en Matemática Educativa. Artículo extenso en las *Actas Electrónicas de las XIII Jornadas de Educación Matemática*. Viña del Mar, Chile.

Díaz, L. (2009) *Representaciones docentes de la matemática del cambio*. Proyecto de Investigación Diumce 38/06. Extenso en Biblioteca de CPEIP, Lo Barrechea, Chile.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1958) *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books, USA.

Lamon, S. (2006) *Teaching fractions and ratios for understanding*. London: LEA Publishers. Mahwah

Malloy, C., Steinhorsdottir, O. & Ellis, M. (2004) *Middle school students` understanding of proportion*. Paper presented at the Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Toronto, Canada, Oct 21<sup>st</sup>. Extraído el 20/10/08, desde [www.allacademic.com/meta/p117622\\_index.html](http://www.allacademic.com/meta/p117622_index.html)

Martínez, G. (2005) Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (2), 195-218.

MINEDUC (2002) *Currículum de la Educación Básica: Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios. Actualización 2002*, MINEDUC, Chile.

MINEDUC (2004) *Planes y programas de la educación básica*. Mineduc. Chile.

Montiel, G. (2005) *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis Doctoral no publicada, CICATA – IPN, México.

Oliveira, I. y Santos M. (2000) *O ensino fundamental e a resolução de problemas de proporção simples: uma análise das estratégias*. Extraído el 15/09/08, de [www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1913T.pdf](http://www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1913T.pdf)

Rouche, N. (2006) *Du quotidien aux mathématiques : nombres, grandeurs, proportions*. Ed. Ellipses, Paris, France.

Ruíz, E. y Valdemoros, M. (2006) Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9 (2), 299-324.

Soto, I. (1992) *Mathématiques Dans la vie quotidienne de paysans chiliens. Vol I*. Louvain-la-Neuve, Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur Spécial en Pédagogie des Mathématiques. Bélgica.