ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL SALÓN DE CLASES. UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Guadalupe Cabañas-Sánchez, Ricardo Cantoral-Uriza
Universidad Autónoma de Guerrero, Cinvestav-IPN México
gcabanas.sanchez@gmail.com, rcantor@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado, socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El estudio analiza desde las interacciones en el salón de clases, los usos del área que ponen en funcionamiento estudiantes universitarios, al realizar transformaciones analíticas vinculadas al concepto de área como integral. Asimismo, de cómo las intervenciones del profesor orientan la actividad matemática del salón de clases en diversos momentos: al introducir una situación de enseñanza, durante la actividad independiente de los estudiantes y al trabajar en pequeños grupos. Los resultados indican que aparecen cinco formas de usos del área: se utiliza para comparar, conservar, medir, calcular y representar superficies. Las intervenciones del profesor se orientaron a apoyar la actuación de los estudiantes, y se observaron en tres distintos: al introducir la situación de enseñanza; durante la actividad individual y en equipo. En algunos momentos sus intervenciones actuaron a modo de criterio de autoridad durante la actividad de los estudiantes.*
Palabras clave: Actividad matemática, usos del área, interacciones en el aula

Introducción

La discusión que se presenta en este escrito es parte de una investigación más amplia que estudia cómo se resignifica la integral definida en el salón de clases. La problemática que en ella se asume, es la articulación escasa que se establece —desde el punto de vista de la didáctica— entre el concepto de área como objeto geométrico y como integral definida. Su resignificación se instituye a dos niveles: a) a nivel de una situación de aprendizaje, y; b) a nivel de la puesta en funcionamiento de dicha situación en el aula de matemáticas. La situación de aprendizaje se conformó de actividades, que tomaron como marco de referencia un estudio de usos del área en la matemática en un contexto estático (véase Cabañas y Cantoral, 2008a). Asimismo, los diversos procedimientos que se ponen en juego en el funcionamiento de tales usos. Las actividades se organizaron y desarrollaron en tres etapas: Etapa 1. *Elementos geométricos del área*; Etapa 2. *Aspectos geométricos y analíticos del área (en el proceso de definición del concepto de integral definida)*. Etapa 3: *Aspectos analíticos del área*. La primera se orientó a aproximar a los estudiantes al concepto de área a través transformaciones geométricas, en el que se vincularon diversos usos del área. En la segunda, a que construyesen la definición del concepto de área como integral definida a partir de los usos del área ya explorados. La última etapa, se orientó a que los estudiantes pusieran en funcionamiento los usos del área mediante transformaciones analíticas. La actividad matemática que aquí se discute, se ubica en la etapa 3. Es así que en este manuscrito se busca dar respuesta a las preguntas siguientes: *¿Qué usos del área ponen en juego los estudiantes al realizar transformaciones analíticas? ¿Qué efectos didácticos producen en los estudiantes las actuaciones del profesor al momento en que decide intervenir durante el desarrollo de la actividad matemática en el salón de clases?*

Visión socioepistemológica en la resignificación del área como integral definida

La investigación de la cual emerge este escrito está basada en la Socioepistemología, marco teórico que se interesa por explicar los fenómenos didácticos producidos en el campo de las matemáticas, mediante el examen del papel que desempeña la construcción social del conocimiento desde un enfoque sistémico (Cantoral y Farfán, 2003). Incorpora para ello cuatro componentes: la cognitiva, la epistemológica, la didáctica y la social. Las componentes cognitiva, didáctica y epistemológica, contribuyen en la explicación del funcionamiento didáctico, con la componente social se busca afectar el sistema educativo en el rediseño del discurso matemático, al abordar el estudio de prácticas, previo a la construcción de conceptos.

Una resignificación del área como integral desde la Socioepistemología, se sustenta en los usos que le ha dado la humanidad al concepto de área, resultado de un análisis *a priori,* acerca del área como objeto geométrico y como integral, y que fueron reportados en Cabañas y Cantoral (2008a, 2008b). Estos usos se organizaron alrededor de la noción de la conservación del área como una función normativa de la actividad de los estudiantes y un profesor durante la explicación de la integral en situación escolar. Es decir, como una *práctica social* que norma la actividad del salón de clases en un momento específico. Se evidencian en una situación de aprendizaje.

El estudio centrado en los usos se apoya en la tesis de que las entidades matemáticas además de conceptos y afirmaciones tienen usos, mismos que han sido puestos en funcionamiento o utilizados por los grupos humanos en y ante situaciones y contextos diversos (Cabañas y Cantoral, 2009). Del mismo modo, por la importancia que tiene tanto para la didáctica como para nuestra investigación, el atender a una significación de los objetos matemáticos centrados en los usos del conocimiento matemático de manera funcional. Los usos a su vez, están asociados a contextos situacionales distintos, así como a determinados procedimientos (Cabañas y Cantoral, 2008a, 2008b).

La manera en que se explora la conexión que los estudiantes establecen entre el concepto de área con el de integral definida, se concibe mediante los usos del área que pusieron en juego en ese proceso, así como en las explicaciones escritas, verbales o gestuales. En algunas de sus explicaciones aparecen aspectos como *forma*, *tamaño* y *posición relativa* de las representaciones en el plano involucradas en la actividad. Igualmente, de los procedimientos llevados a cabo para realizar las transformaciones correspondientes.

Métodos y participantes

Desde el punto de vista metodológico es un estudio cualitativo, con carácter interpretativo. El estudio involucró a Martín, un profesor de matemáticas y a sus estudiantes. Los datos son resultado de las observaciones realizadas durante la puesta en funcionamiento de la situación de enseñanza y fueron recolectados a través de videograbaciones.

Los estudiantes

Participaron veintisiete estudiantes de una licenciatura en Matemáticas (21-24 años) durante un curso de Cálculo Diferencial e Integral —al momento en que la integral definida era objeto de enseñanza—, así como el profesor titular de la asignatura, quien se hizo cargo de poner en funcionamiento la situación de aprendizaje bajo la cual se resignificó a la integral definida. Los antecedentes académicos de los estudiantes fueron tópicos relativos a Geometría y Cálculo Integral, particularmente geometría euclidiana e integral definida. Esto nos aseguraba al menos hipotéticamente, que disponían de los conocimientos previos requeridos para llevar a cabo el estudio.

El profesor Martín

Martín es un profesor con una formación en una licenciatura y una maestría en Matemática Educativa. Se ha desempeñado por seis años como profesor de matemáticas en los programas de licenciatura que ofrece la institución en la que labora. Sus actividades están centradas en dictar cursos de Geometría, Cálculo, Variable Compleja y Análisis Matemático, y en proporcionar asesorías a sus estudiantes. Cuando se le invitó a colaborar en el proyecto aceptó con mucho entusiasmo, pues lo consideró como una oportunidad para desarrollar nuevos roles. El rol de Martín en esta actividad, además de poner en funcionamiento la situación de aprendizaje, consistió de organizar y dirigir la actividad matemática. Y aun cuando no será objeto de discusión en este artículo, vale la pena señalar que a Martín se le invitó para que resultado de su actividad en el aula, así como de sus intervenciones, la construcción del concepto de integral se diera por los propios estudiantes.

La situación de enseñanza

El estudio se fundamenta en el análisis de la actividad matemática que se desarrolló en el salón de clases al momento en que los estudiantes trabajaron sobre una situación de enseñanza referida a funciones de la forma $f(x) = kx^n$ con $k > 0$, $n \in Z$ sobre un intervalo cerrado. La situación que se discute en este reporte es la siguiente:

> Bosqueja las gráficas de las expresiones: $f(x) = 4$, $g(x) = ax$, $h(x) = bx^2$. Encuentra los valores de *a* y *b* de manera que la región formada por la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo [0, 4] tenga la misma área.

La situación de enseñanza se articula a las transformaciones analíticas. Se discutió una vez que la integral definida fue objeto de estudio. Está centrada en el *uso* explícito o implícito de la conservación del área, como una *norma* de las actividades que llevaron a cabo los estudiantes. A su vez, de conceptos asociados como la comparación, representación y cálculo del área, de las regiones que representan las funciones algebraicas.

Formas de organización e interacción en el salón de clases

La forma de organización de la actividad en el aula se pensó de tal manera, que contribuyera a que los estudiantes interactuasen con la situación en tres momentos diferentes: (a) trabajo individual, (b) trabajo en pequeños grupos y (c) discusión de toda la clase, en la que se esperaba que presentaran y discutieran las actividades que llevaron a cabo en el proceso de solución de la situación. La actividad del salón de clases se describe a partir de las consideraciones siguientes:

I. La actividad del profesor al momento en que introduce la situación. Ello involucró sus explicaciones, las orientaciones o ayudas que ofreció a los estudiantes.

II. Las interacciones del profesor y los estudiantes durante el trabajo individual y durante el trabajo en equipo.

La actividad matemática en el salón de clases

I. La actividad del profesor (P) al introducir la situación

El profesor inicia con una lectura de la situación de enseñanza (primer renglón). Enseguida, para ayudar a los estudiantes a aproximarse a la solución de dicha situación, en su lectura orienta a una reflexión —así lo indica y se exhibe desde sus explicaciones— sobre varios aspectos: a) El grado del exponente de las funciones objeto de estudio; b) la forma de la gráfica de las funciones, según el grado de su exponente, y; c) el intervalo en el que se estudiará a las funciones. Por ejemplo, menciona que la función $g(x)$ es de primer grado y $h(x)$, de segundo grado. A su vez, hace notar que las gráficas de tales funciones pueden aludir ya sea a rectas o a curvas. Al final de su intervención en esta etapa de la actividad matemática, el profesor les recuerda cuál es el intervalo en que se estudiarán dichas representaciones.

Se muestra mediante el párrafo siguiente cómo el profesor introduce la actividad en la clase.

> [58] Profesor: ...Sobre el intervalo cero coma cuatro....que tengan la misma área... empiecen a trabajar la ... la actividad . . .
>
> [...] Se escuchan voces de los estudiantes, quienes intentan involucrarse en la actividad. Sin embargo, el profesor continua con su lectura y explicación.
>
> [59] Profesor: Después de que trabajen con la actividad. . . vamos a conversar sobre la pregunta... se pide que... *en el caso de la función g(x)* ... igual a *ax*... *equis está elevado al*

exponente uno... ¿no? Entonces pueden ustedes reflexionar acerca de que... *pase lo que pase con los valores de a*... del parámetro *a*... pueden ustedes más o menos... representar gráficamente... cómo es la. . . la curva de esa función... o si no es una curva... o si es una recta. Y en la tercera función es $h(x) = bx^2$ ... *fíjense que la variable x está elevada a la dos* ... ustedes *pueden analizar cómo es el comportamiento gráfico... de las funciones de segundo grado*... ¿sale?... para el caso anterior, cómo es el comportamiento de las funciones de primer grado?... *obviamente nos piden representarlas en el intervalo que va de cero a cuatro ... que es donde queremos estudiar ciertas condiciones...*

En su lectura, Martín exhibe implícitamente, qué es lo que los estudiantes deben explorar y analizar de la situación. Se entremezcla a manera de lectura y explicación.

II. Las interacciones del profesor y los estudiantes en la discusión que se presenta durante el primero y segundo momento de interacción con el saber [Discusión individual y la discusión en equipo].

Como resultado de las acciones de los estudiantes sobre la actividad —tanto en el trabajo individual como por equipo—, se observó que un *primer uso del área* que aparece como parte de sus acciones sobre la situación, fue la representación del área de la región (a manera de bosquejo) debajo de las gráficas de las funciones involucradas, en el intervalo [0,4]. Para el caso de la primera, representaron un cuadrado, para la segunda, una recta y exhibieron la porción de área objeto de análisis, que la ubicaron sobre un triángulo. Igualmente para el caso de la tercera, representaron una parábola. Un segundo *uso* que se presentó fue *el cálculo* del área de la región. Aquí aparecieron procedimientos basados en la fórmula para calcular el área de un cuadrado, del triángulo y en la integral definida. Un tercer uso que se exhibe desde las explicaciones de los estudiantes es el *uso de la comparación* de regiones de área, al momento en que se les sitúa a explorar las representaciones de las regiones de área respectivas.

Por otra parte, se observó cómo en algunos momentos de la actividad individual por parte de los estudiantes, el profesor persuade a alguno de ellos para que se apoyen en la integral definida para calcular el área de las regiones involucradas. Comentamos a continuación el caso de María, una chica que para determinar el área de la región que representa de la función $f(x) = 4$ en el intervalo [0,4], se apoya en la fórmula para calcular el área de una cuadrado y así se lo hace saber al profesor cuando la cuestiona al respecto.

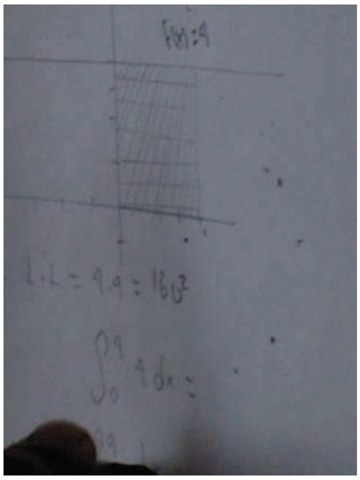

Figura 1. María calcula el área del cuadrado por medio de la integral definida, a partir de la intervención del profesor.

> [76] Profesor: Aquí cómo le hiciste para calcular el área de éste (el profesor se refiere a la función $f(x) = 4$)
> [77] María: Es un cuadrado... usé lado por lado
> [78] Profesor: ¿Y si en ese momento no tuvieses presente la fórmula de lado por lado?
> [79] María: Pues aplicaría la derivada...
> [80] Profesor: ¿Cómo sería la derivada?
> [81] María: ¡La integral!
> [82] Profesor: ¿De qué función?
> [83] María: De cuatro
> [...] María se apoya en la integral para calcular el área del cuadrado (ver figura 1)

La intervención del profesor actúa como un criterio de autoridad en María y se refleja al momento en que ella decide calcular el área del cuadrado, apoyándose en la integral definida. Sin embargo, se observó que se le presentan dificultades para trabajar con ese algoritmo y el profesor intervino en diversos momentos, fin de que ella reorientara sus explicaciones.

La discusión de todo el grupo, la originó el profesor a partir de los resultados que mostraron los estudiantes en su trabajo en equipo. El profesor observó por ejemplo, dos formas de trabajar con la actividad: una que se apoyó sólo en la integral definida y otra que usó tanto a la integral definida como las fórmulas para calcular el área del cuadrado y del triángulo (referidas a las regiones de área representadas por las funciones $f(x) = 4$ y $g(x) = ax$). Y es que para el caso de la función $h(x) = bx^2$, los estudiantes argumentaron que solo mediante la integral definida podrían determinar el valor del parámetro *b*. La intervención del profesor en esta etapa, fue para invitar a los integrantes de dos equipos, que presentaran y discutieran con sus compañeros, las acciones que realizaron en el proceso de solución de esta actividad. A manera de ejemplo, se muestra cómo un equipo explica las acciones que llevaron a cabo para trabajar con la actividad (con la función $f(x)=4$), en la que usaron a la integral definida.

> [91] Rubén: Bueno, el primer ejercicio que hicimos fue bosquejar las gráficas de las funciones... esta es la función $f(x)=4$. Nosotros pensamos que la gráfica era así... que va del intervalo 0 a 4... de 0 a 4... y como tiene un valor de 4 pensamos que era un cuadrado... y así nos da... entonces para ... para sacar el área de esta región... 4*x* de 0 a 4..

La primera acción que Rubén lleva a cabo es la representación de la gráfica de la función. Enseguida representa el área correspondiente, se apoya para ello en el intervalo [0,4]. Posteriormente escribe el algoritmo mediante el cual determinará el área de esa región y lo resuelve. Nuevamente aparecen aquí, dos usos del área, su representación en el plano cartesiano y el cálculo del valor correspondiente. La comparación como un uso se presenta durante la discusión de las formas de las representaciones de áreas de cada región. Durante la discusión con todo el grupo, el profesor hace ver a los estudiantes que los procedimientos para determinar el valor de los parámetros no son únicos, y como ejemplo, los remite a las explicaciones que exhibieron los integrantes de los dos equipos que participaron en la discusión en grupo. Interesa señalar aquí, que si bien la actividad requirió determinar el valor de los parámetros *a* y *b*, la discusión tanto por los estudiantes como por el profesor, se dio alrededor del área de las regiones: de cómo se calcula, se conserva y se representa. La comparación se evidencia al momento en que se analizan tanto la medida del área como su respectiva representación.

Discusión final

Se evidenciaron cinco tipos de usos del área desde los procedimientos de los estudiantes: El área es susceptible de ser conservada, comparada, representada, calculada y medida mediante diversos procedimientos. Los procedimientos que pusieron en juego los estudiantes para calcular el área fueron de tipo algorítmico, particularmente fórmulas, en algunos casos, como parte de las intervenciones del profesor. Para representar el área se apoyaron del plano cartesiano. La comparación de áreas se identificó al momento en que visualizaron las regiones de área representadas, así como entre las funciones algebraicas y la medida del área, la cual se conservó.

Las intervenciones del profesor se orientaron a *apoyar* la actividad de los estudiantes, y se observaron en tres etapas distintas: a) al introducir la actividad, b) durante la actividad individual, y; c) durante la actividad en equipo. En la primera etapa por ejemplo, al leer la actividad enfatizó en el grado de las funciones algebraicas involucradas en la situación, a fin de centrar la atención de los estudiantes en ese aspecto —se entremezcla a manera de lectura y explicación—. Durante la segunda y tercera etapa, sus intervenciones se orientaron a persuadir a los estudiantes al uso de determinados algoritmos, tal es el caso de la integral definida, aún cuando no se requería.

Referencias bibliográficas

Cabañas, G. Cantoral, R. (2008a). Estudio socioepistemológico del área y la integral. *Abstracts of the History and Pedagogy of Mathematics, The HPM Satellite Meeting of ICME 11*, p. 29. México, D.F. 14-18 July, 2008.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2008b). Studying arguments in mathematics classroom. A case study. *Topic Study Group 24: Research on Classroom Practice*. México: Icme-11. July, 2008.

Cabañas-Sánchez, G., Cantoral-Uriza, R. (2009). Representación de los conceptos de área e integral definida en la didáctica. En G. Buendía (Ed), *Memoria de la Escuela de Invierno en Matemática Educativa XII* (pp.314-326).

Cantoral, R., Farfán, R.M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(1), 27-40.