EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA COMO UN PROCESO COMPLEJO, SOBRE UN SISTEMA AUTOPOIÉTICO Y ADAPTATIVO

Herbert Mendía A
CIMACIEN (Guatemala)
omendia@cimacien.org.gt, omendia@itelgua.com

Resumen. La variedad de respuestas a preguntas en exámenes de respuesta abierta sugieren que los estudiantes parten y organizan la experiencia matemática de forma autopoiética. El reconocimiento de bloques constructivos y de las relaciones entre estos, de manera autónoma, guían la manera de enfrentar los problemas. La interacción con el ambiente, sus pares y profesores provee realimentación para su adaptación (aprendizaje), aunque puede ser incorrecta. La falta de una adecuada realimentación y de maneras de verificación de las acciones que ejecutan, llevan al incorrecto aprendizaje de la matemática.

Palabras clave: bloques constructivos, adaptación, autopoiética, partición

Abstract. The variety of responses to questions in test of opened answers, suggest students parse and organize the mathematical experience so autopoietic. Recognition of building blocks and establishment of relationships among them, in an autonomous way, guide the way to confront that problems. Interaction with environment, their peer and teachers, give necessary feedback to adaptation (learning), even though it may be incorrect. The lack of an adequate feedback and validation means for their actions, result in wrong mathematical learning.

Key words: building blocks, adaptation, autopoietic, parse

Entre los años 1999 y 2001 algunos grupos de estudiantes fueron sometidos a exámenes de admisión, en el área de matemática, usando pruebas de respuesta abierta con el propósito de encontrar distractores para las pruebas de respuesta cerrada de uso masivo. Los evaluados, recién graduados de diversificado de diferentes establecimientos educativos, con edades cercanas a los 18 años, en su mayoría no lo superaron. Lo que llamó la atención fue la gran diversidad de sus respuestas, y surgieron las preguntas: ¿Porqué tantas respuestas diferentes a una misma pregunta? ¿Porqué hay respuestas tan "inesperadas"? ¿Las respuestas revelarán de algún modo los procesos utilizados en su resolución?

Fue interesante listar todas las respuestas obtenidas, contando cuántas veces se repite la misma. La primera impresión apuntaba a que las respuestas eran construidas al azar, sin razones que las originaran. Un estudio más amplio, suponiendo que las experiencias, ideas, conceptos, imágenes, creencias, reglas, relaciones entre todas éstas y lo demás que se considera forma parte de la red de conocimientos de un ser humano, y que se considera constituye un sistema (que llamaremos RPP); conjuntamente con los conceptos de Sistema Adaptativo Complejo (CAS por sus siglas en inglés) de Holland (1995), de organización Autopoiética de Maturana y Varela (1996) y de Complejidad de Robert Rosen (2009), sugiere que no es este el caso. Con lo anterior, la aspiración de este escrito es proporcionar algunas ideas para explicar esa diversidad.

Holland (1995) ejemplifica varios sistemas complejos (CAS), tales como una ciudad, el sistema inmunológico humano, el sistema nervioso central, un ecosistema. Tales sistemas mantienen su coherencia en el tiempo e indica que a pesar que entre ellos difirieren en los detalles, todos son caracterizados por 4 propiedades: agrupación, no linealidad, flujo y diversidad, y 3 mecanismos: bloques constructivos (building blocks), modelos internos y etiquetado; otra de sus características es la gran cantidad de elementos interactuantes que los constituyen. Además introduce el concepto de "agente" que no es más que alguno de los elementos o grupos de elementos del CAS que interactúan entre sí y su entorno, e indica que "esos agentes se adaptan cambiando sus reglas conforme la experiencia se acumula"(p.10). Adaptación y experiencia acumulada son otras maneras de referirse al aprendizaje.

Maturana y Varela (1996) caracterizan la organización de los sistemas vivos como "[aquellos] que se producen continuamente a sí mismos" y a la organización que los define la llaman "organización autopoiética", y que sus "componentes ...... están dinámicamente relacionados en una continua red de interacciones" (p.25), ejemplificándola con la célula, que cuando "interactúa con una molécula X incorporándola a sus procesos, lo que ocurre a consecuencia de dicha interacción no está determinado por las propiedades de la molécula X, sino en la manera cómo tal molécula es ¨vista¨ o tomada por la célula al incorporarla en su dinámica autopoiética" (p.32). Añaden que "los cambios que resultan de la interacción entre ser vivo y medio son desencadenados por el agente perturbante y *determinados por la estructura de lo perturbado*", es decir, esos sistemas son auto organizados y las estructuras internas, formadas con elementos incorporados, son determinadas por sí mismos.

La manera en que el agente perturbante es "visto" por el sistema, puede tomarse como lo que significa para él, tomando lo que dice Eco (1972): "significado es solamente la *disposición del aparato para responder de cierta manera al significante*" (p.51), así cada problema propuesto tiene un significado diferente para cada estudiante.

En la página dedicada a la complejidad de Rosen (Rosennean Complexity) (2009) se indica: "A system is *simple* if all its models are simulable. A system that is not simple, and that accordingly must have a nonsimulable model, is c*omplex*." Como consecuencia algunas características de un sistema complejo son: a) contener aspectos no fraccionables por ejemplo, intentar separar en un proceso qué es analógico y qué es inductivo; b) ser impredecible; c) contener aspectos semánticos; d) tener ciclos cerrados de relaciones.

Lo que se intenta mostrar abajo es que los estudiantes producen continua y autopoiéticamente su red de conocimientos, mediante la construcción personal de los bloques constructivos y de las relaciones entre ellos. Y que a pesar de los 5 años de estudio sin importar el colegio o escuela, la adaptación (aprendizaje) no ha sido adecuada.

Es claro que las situaciones matemáticas propuestas para resolver que enfrentan los estudiantes son, con alta probabilidad, siempre diferentes, tanto que podemos decir que todo problema propuesto es nuevo para ellos, la novedad es casi permanente. Si cada problema es nuevo, ¿cómo ayuda la experiencia acumulada a enfrentar lo nuevo? Para reducir la novedad de la experiencia matemática deben distinguir los elementos familiares, llamados por Holland (1995, p.34) bloques constructivos, en escenas no familiares y reconocerlos en cada nueva aparición, cada nueva escena. Para este reconocimiento uno de los procesos importantes es la analogía.

Maturana y Varela (1996, p. 24) indican que "El acto de señalar cualquier ente, objeto, cosa o unidad está amarrado a que uno realice un acto de distinción que separa a lo señalado como distinto de un fondo." y añadiendo que esa es una situación enteramente cotidiana y permanentemente; así, por ejemplo, reconocemos a una persona en particular separándola de fondo, que es todo lo demás, en un salón de clase.

La partición de la experiencia es un acto de creación personal, usando criterios de distinción también personales y no necesariamente los adecuados para una escena en particular, pero que cambian, se adaptan (entendiendo adaptarse como: cambiar los bloques constructivos, las relaciones entre ellos y, las acciones que sugieren y producen), al producir acciones que llevan a respuestas erróneas y se ven obligados a corregir lo actuado al enterarse de su incorrección. La corrección de la partición de la experiencia es verificada gracias a la realimentación recibida.

En las respuestas de los 149 estudiantes evaluados podemos observar las diferentes maneras de partir el problema propuesto y la cadena de acciones asociadas. En la tabla 1 se consignan: la respuesta dada por el estudiante y el número de estudiantes (No.) con la misma respuesta. La respuesta correcta está indicada con un (ok) a la par.

Pregunta: El resultado de efectuar $3\times 8-6\times 4+2\times 5+12$ es:

Respuesta	No.	Respuesta	No.	Respuesta	No.
En blanco	2	22	89 (ok)	-12	1
94	1	342	1	-10	1
222	1	392	1	28	1
282	1	318	1	36	1
		28 x	1	-1x + 20	1
16	2	18	2	70	2
382	34	612	3	24	3

Tabla 1

En la tabla 2 están algunas formas de cómo los evaluados llegaron a algunas de las respuestas, después de reconstruirlas y hacerlas presentables.

<table>
<tr><th>Error 1. 382</th><th>Error 2: 612</th><th>Error 3: 24</th><th>Error 4: -1x + 20</th></tr>
<tr>
<td>----------------------------→
$3 \times 8 - 6 \times 4 + 2 \times 5 + 12$
$24 - 6 \times 4 + 2 \times 5 + 12$
$18 \times 4 + 2 \times 5 + 12$
$72 + 2 \times 5 + 12$
$74 \times 5 + 12$
$370 + 12$
382</td>
<td>$3 \times \underline{8 - 6} \times \underline{4 + 2} \times \underline{5 + 12}$
| | |
$3 \times 2 \times 6 \times 17 =$

612</td>
<td>$3 \times 8 - 6 \times \underline{4 + 2} \times \underline{5 + 12}$
| |
$24 \underline{- 6 + 6} \times 17$
|
$24 \underline{- 0 \times 17}$
|
$24 - 0 = 24$</td>
<td>$3 \times 8 - 6 \times 4 + 2 \times 5 + 12$

$3x - 6x + 2x = -1x$

$8 \times (5 - 4) + 12 = 20$

respuesta $= -1x + 20$</td>
</tr>
</table>

Tabla 2

El error 1 es una lectura "textual" de la expresión, partiéndola en bloques que se muestran [3 × 8] [– 6] [× 4] [+ 2] [× 5] [+ 12] en donde los [ ] indican los limites de las partes.

En el error 2 primero separa la suma y resta 3 × [8 – 6] × [4 + 2] × [5 + 12] y después efectúa las multiplicaciones.

En el error 3 separa primero el 4 + 2 y el 5 + 12 para obtener un 0 y un 17, que luego multiplicará y sumará al primer 24.

En el error 4, interpreta el signo de multiplicación como la variable x y separa operaciones con variable y sin variable.

Nótese que los estudiantes reconocen los mismos números y los signos de operación, pero dividen la expresión de maneras diferentes. Note también que al efectuar las operaciones con los números de dos en dos lo hacen correctamente, es decir, no se equivocan al sumar, restar ni multiplicar. Los datos anteriores muestran que:

1. La mayoría de los evaluados se consideró con capacidad para efectuar la operación, porque sólo 2 no la respondieron,
2. es una pregunta que muchos responden correctamente, aproximadamente un 60 %, (marcada con ok),
3. la respuesta incorrecta más común de 34 de ellos (23 %) es obtenida al efectuar las operaciones de izquierda a derecha, sin considerar la jerarquía de las operaciones, tal como se realiza la lectura de un texto en español,
4. las respuestas incorrectas repetidas por 2 ó 3 participantes (5 respuestas diferentes) se asume no pueden deberse a errores de cálculo operatorio en las sumas o multiplicaciones, por ejemplo equivocarse con 3 × 8 y hacerlo = 26, o que en lugar de

escribir 24 se escriba 22, dada la baja probabilidad de que varios cometan la misma equivocación al azar. Al parecer llegaron a la misma respuesta por la manera en como interpretaron la expresión y las acciones que realizaron,

5. hay respuestas en las que se lee una intención muy particular, como las dos respuestas obtenidas **28*x*** y **–1*x* + 20**, que muestran que los signos de multiplicación × fueron reconocidos como la variable ***x***, a pesar de la tipografía y la corrección sintáctica,
6. la mayoría de respuestas incorrectas generadas una sola vez no se pueden atribuir sólo a equivocaciones, como las mencionadas arriba, sino a la manera en que experimentan, interpretan y desarrollan la expresión,
7. todos escribieron UNA sola respuesta.

De igual manera para otro examen efectuado a 68 estudiantes, se muestran los resultados de dos de las preguntas y se registran en las tablas 3, 4, 5 y 6. Las respuestas producidas por procesos semejantes, excepto por los signos resultantes, están agrupadas con sombreados o sin sombra.

Pregunta: El resultado de factorizar 4x 2 – y 2 + 2x – y es:

Respuesta	No.	Respuesta	No.	Respuesta	No.
En blanco	15	$(2x - y)(2x + y + 1)$	2 (ok)	$4x^3y^3$	1
$6x^3 - 2y^2$	2	Otras respuestas	21	$8x^2$	1
$6x^3 + 2y^2$	1	$x\,(4x + 2)\,y\,(y - 1)$	1	$17x$	1
$8x^3 - y^3 = 0$	1	$x^2 + y^3 + 2x$	1		
$8x^3 - y^3$	1			$2x^2$	1
$6x^3 + y^3$	1	$(2x + y)\,(2x - y)$	1	$2x$	1
$6x^3 - 2y^3$	2	$(2x - y)^2$	3	$2x - y$	1
$6x^3 - y^3$	4	$(2x - y)^2 + 2x - y$	3	$2x + y$	3

Tabla 3

Error 5: $6x^3 + y^3$ o $6x^3 - 2y^3$ o $6x^3 - y^3$	Error 6: $8x^3 - y^3 = 0$	Error 7: $2x - y$ o $2x + y$
$\underline{4x^2} - y^2 + \underline{2x} - y$	$\underline{4x^2} - y^2 + \underline{2x} - y$	$\underline{4x^2 - y^2} + 2x - y$
$4x^2 + 2x = 6x^3$	$4x^2 + 2x = 8x^3$	$\underline{(2x - y)}\,(2x + y) + \underline{(2x - y)}$
$-y^2 - y = 2y^3$ ó y^3	$-y^2 - y = y^3$	$= 2x + y$

Tabla 4

En el error 5 separa las variables y realiza de una manera particular la suma de positivos y negativos. Dependiendo de cómo trate los signos obtiene respuestas con + ó –. Además no factoriza, parece que pretende efectuar, pero en realidad el estudiante entiende la instrucción "factorizar" como un objetivo particular para él, que no tiene nada que ver con el hecho de factorizar la expresión dada.

En el error 6 la partición de la expresión es semejante al error 5, pero introduce un objetivo adicional, establecer una ecuación.

En el error 7, efectúa una adecuada partición en el inicio, factorizando la diferencia de cuadrados, pero el siguiente reconocimiento para la cancelación es inapropiado.

Note, de nuevo, que la partición de la expresión es diferente para cada estudiante, y las reglas de manejo de los signos, las operaciones y las variables también es personal. Sin embargo, no se equivocan en las tablas de la suma, resta ni multiplicación con los números.

Pregunta: El resultado de efectuar $m - m\ (m + 3)$ es:

Resultado	No.	Resultado	No.	Resultado	No.
En blanco	6	$-m^2 - 2m$	11	$+ m\ (m^3)$	1
$-m^2 + 2m$	1	Otras Respuestas	12	$- 3m - m$	1
$m^2 + 3m$	1	$- 3m^3$	1	4	1
$m^2 - 2m$	2	m^3	2	$4m$	1
$m^2 + 2m$	1	$-2m + 3$	1	$- 4m$	1
$m = -3$	1	$m - 3$	1	$- 3m$	1
0	5	$m + 3$	7	$3\ m$	10

Tabla 5

Error 8: 0 ó $m = -3$	Error 9: $m + 3$ ó $m - 3$ ó $-2m + 3$	Error 10: $\pm\ 3m$ ó $\pm\ 4m$ ó 4
$\underline{m - m}\ (m + 3)$ $0\ (m + 3) = 0$ $m + 3 = 0,\ m = -3$	$\underline{m - m}\ (m + 3)$ $m - m(m + 3) = m + 3$	$m - 3m^2 = 3m$ $m + 3 = 3m$

Tabla 6

Los diferentes resultados evidencian que cada uno de los estudiantes parte (fragmenta, divide) lo que observa de manera diferente, reconociendo diferentes configuraciones (bloques constructivos y sus relaciones), además usan o inventan diferentes reglas, reconocen diferentes metas (errores 6 y 8).

Estos otros dos ejemplos muestran cuáles son sus bloques para reconocer términos semejantes. Las mismas variables, sin importar sus exponentes en el primer caso, Fig. 2, o bien, sin importar que uno sea denominador de una fracción. Incluso encierra los coeficientes numéricos, Fig. 3.

17. Encierre en un círculo los términos que son semejantes entre sí

$$-3x^2z \quad + \quad \frac{2}{5}\frac{x^3z^2h}{xzh} \quad -3xz^2 \quad + \quad \frac{3}{5}xzh \quad - \frac{1}{7}\frac{1}{x^{-2}z^{-1}}$$

Figura 1

17. Encierre en un círculo los términos que son semejantes entre sí

$$-3x^2z \quad + \quad \frac{2}{5}\frac{x^3z^2h}{xzh} \quad -3xz^2 \quad + \quad \frac{3}{5}xzh \quad - \frac{1}{7}\frac{1}{x^{-2}z^{-1}}$$

Figura 2

A pesar de que lo presentado a todos los evaluados es lo mismo: números, variables, operaciones, signos de agrupación y un objetivo; lo que reconocen, que ya forma parte de su RPP, es diferentes. Los bloques constructivos, las relaciones entre ellos, los objetivos que se proponen, las acciones asociadas (los significados), son construidos de manera autónoma; la RPP completa fue organizada de manera autónoma, autopoiéticamente; dependiendo de su historia personal; por lo que es una "invención" de cada estudiante. Sin embargo, esa red ha sido sometida a adaptación, a cambios, a aprendizaje (aunque sea incorrecto), por la realimentación de profesores, pares y demás influencias durante 5 años, pero no garantiza su corrección puesto que los cambios en un sistema autopoiético no son dirigidos ni determinados por la perturbación, sino por el sistema mismo. Las perturbaciones del exterior desencadenan los cambios pero las consecuencias de ellas dependen de cómo la red las interpreta.

La secuencia de pasos para llegar desde la pregunta a la respuesta que cada estudiante da, ya sea correcta o no, se puede concebir como seguir un camino en una red, en la que cada vértice (nodo) es un estado en la resolución y cada arista es la acción que ha decidido ejecutar.

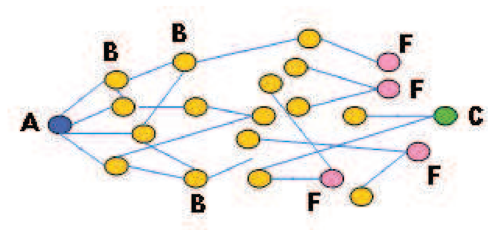

Figura 3

Diferentes estudiantes toman diferentes caminos. Esa red (Fig. 3) es el *posible espacio de resolución del problema,* y puede ser enorme. El círculo A representa el estado inicial o pregunta planteada, el C la respuesta correcta, los F los resultados incorrectos y los B son las etapas intermedias en la resolución del problema.

No está de más indicar que para llegar al estado final C (respuesta correcta), el camino puede pasar por resultados parciales incorrectos. Para transitar de un estado a otro, el estudiante debe reconocer un patrón, una configuración particular (un bloque de objetos particular) y luego elegir aplicar alguna regla, una propiedad matemática, de las varias que sabe puede usar. Lo que haga dependerá de cómo es "visto" el problema y del objetivo que identifique, aunque la pregunta sea clara para quien la elaboró.

La interconexión entre los diversos dominios de conocimiento de la RPP se manifiesta cuando se trasladan reglas de un dominio a otro, como en el caso de las reglas de manejo de signos en la multiplicación que se traslada a las potencias, por ejemplo, el error que se comete en la figura 4 en la que se manifiesta que el signo más de la base por el signo menos del exponente da el signo negativo del resultado de la potencia negativa.

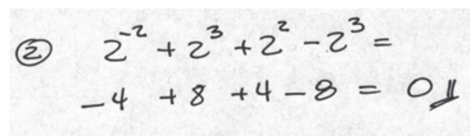

Figura 4

O cuando se trasladan reglas de otros dominios que no sean de la matemática, como en el caso del error 1, analizado al inicio de este escrito, en donde se lee la expresión de izquierda a derecha como cuando se lee un texto en español.

La RPP es el modelo del mundo, el concepto de modelo interno de Holland (1995), de cada persona, es lo que vive y con lo que actúa en consecuencia. Esta red es construida mediante procesos complejos, en el sentido de Rosen (2009).

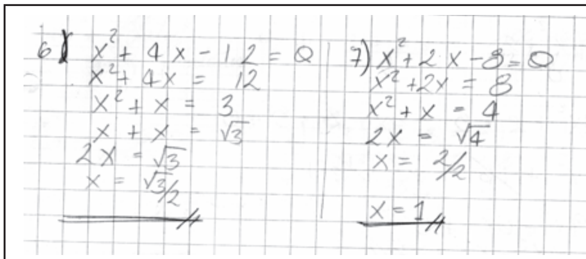
Figura 5

La RPP, además, manifiesta consistencia como se muestra en la figura 5. Se observa que si hay una multiplicación, se debe dividir: como el 4 multiplica a la *x* debe dividir al 12 (el 2 en el problema 7 debe dividir al 8), si la incógnita está elevada al cuadrado, se debe extraer raíz cuadrada y así resuelve la ecuación.

La modificación de la RPP, es decir, su adaptación implica aprendizaje, aunque no sea el correcto. Y la tarea del profesor es proveer la realimentación para desencadenar esos cambios. Además debe verificar la corrección de los cambios en la RPP puesto que la corrección en los mismos no está garantizada.

Dado que la construcción de la red de conocimientos es autopoiética, personal y compleja, también es necesario proveer a los estudiantes de maneras de verificación de la corrección de sus acciones. Podemos añadir que la historia de la matemática muestra que darle significado a las expresiones matemáticas, apoyan los procesos de validación autónoma de la corrección tanto de los bloques constructivos elegidos, las relaciones entre ellos y los objetivos de los procesos; por ejemplo, los griegos verificaban la corrección de algunos de sus procesos y construcciones matemáticas vía la corrección geométrica y la conservación del área.

Referencias bibliográficas

Eco, H. (1972). *La Estructura Ausente. Una introducción a la semiótica.* España: Editorial Lumen.

Holland, J. (1995). *Hidden Order. How Adaptation Builds Complexity*. New York: Helix Books.

Maturana, H. y Varela, F. (1996). *El Árbol del Conocimiento. Las bases biológicas del entendimiento humano.* Chile: Editorial Universitaria.

Rosennean Complexity and others interests. (sf). Recuperado el 15 de noviembre de 2009 de http://www.panmere.com/?page_id=16