PREDICIENDO CON LA REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Ricardo A. Cantoral Uriza, Marcela Ferrari Escolá y Diana R. Lluck Soberanis
Cinvestav-IPN, UAGro, CBTis 14 México
rcantor@cinvestav.mx, marcela_fe@yahoo.com.mx, dianalluck@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio

Resumen. *En este reporte se discute, desde la socioepistemología, una experiencia realizada con estudiantes de bachillerato respecto de la Regla de los signos de Descartes, aquella que permite determinar el número de raíces positivas que una función polinómica podría presentar. El diseño de la secuencia de aprendizaje requirió el uso de la Ingeniería Didáctica como metodología, aunque no buscábamos validar la actividad de aprendizaje, sino analizar las herramientas que los estudiantes evocaran o construyeran en la experiencia.*
Palabras clave: Socioepistemología, predicción, raíces, función polinómica

Introducción

La Regla de los signos de Descartes (Descartes, 1637), aquella que se utiliza para determinar el número de raíces de una función polinomial analizando el cambio de signo de sus coeficientes, se encuentra a la baja en el terreno educativo. En general, reflexiones alrededor de la regla de signos se hallan en libros utilizados en Álgebra Superior, en el apartado de ecuaciones (Hall y Knight, 1980) y con menor proporción en algunos libros para Precálculo (Sullivan, 1989) así como en algunos de Álgebra Básica (Uspensky, 1995), todos aún en uso. Efectivamente, la búsqueda y localización de raíces así como su cálculo aproximado, va perdiendo terreno ante la irrupción de la tecnología, invitándonos a reflexionar sobre los argumentos que van quedando atrás, así como la evolución de las herramientas matemáticas que los sustentan.

Realizar un estudio socioepistemológico nos permite profundizar sobre el origen de estas nociones al rastrear las prácticas sociales que sustentan su emergencia, adosadas a las herramientas y argumentos que se transforman a la par, afectándose y evolucionando indefectiblemente. Analizar el caso de la regla de los signos (ver Cantoral y Ferrari, 2004), es particularmente interesante pues nos restringimos a estudios intramatemáticos, es decir, aquellos argumentos y herramientas sumergidos en la práctica social de la predicción, pero dentro del mundo matemático, en búsqueda de un lenguaje algebraico conciso.

La búsqueda de raíces de ciertas funciones, aquellas entendidas hoy como el lugar donde una curva cruza el eje de las abscisas, se percibe desde los primeros esbozos del álgebra donde “la cosa” fuera reemplazada con el tiempo por “la incógnita”, en esa época donde, según investigadores como Youschkevitech (1995), lo variable todavía no había aflorado y donde se deseaba determinar un valor específico, argumentos regidos por una manipulación geométrica de magnitudes distantes aún de una manipulación algebraica de números que requeriría quiebres particulares en el discurso matemático. Siglos después, el acercamiento entre geometría y álgebra, planteado y desarrollado por varios matemáticos, confluyen en una obra especial como *Geometrie* de Descartes (1637) con ideas que denotan una evolución de argumentos al distanciarse de las magnitudes y priorizar lo algebraico, por tanto, de lo simbólico que aún se estaba consolidando. Hallamos así, en esa obra una interesante manera de determinar el número de raíces de un polinomio, que sólo fuera enunciada y sustentada con ejemplos bajo el supuesto que la sencillez del argumento no ameritaba una demostración formal pues en palabras de Descartes, era suficiente hacer varios ejemplos para convencerse de su veracidad. Sin embargo, la demostración de la regla de los signos se convirtió en un desafío para los matemáticos de la época, encontrándose varios acercamientos a la misma, incluso evidencias de los límites que el primer enunciado presentaba (ver Bartolozzi y Franci, 1993).

Efectivamente, Descartes establece que: …*podemos determinar el número de raíces verdaderas que cualquier ecuación pueda tener, como sigue: una de + a – o de – a +; y tantas raíces falsas como el número de veces que se encuentran en sucesión dos signos + o dos* - (Descartes, 1637 p. 373). Siendo el ejemplo con el que explica sus ideas el siguiente: $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ donde {+ **- -** + **-**} es la combinación de signos que denota que existen tres cambios de signos y una permanencia y por tanto de las cuatro raíces de esta ecuación una o tres podrían ser “verdaderas” es decir “positivas” en la terminología actual. En realidad, Descartes construye el ejemplo desde las raíces pues multiplica los siguientes factores (x-2)(x-3)(x-4)(x+5).

Recién en 1828 aparece una demostración robusta de la mano de Gauss al agregar una raíz para desequilibrar la sucesión de signos, idea ya explorada por Segner en 1756. Luego de esta demostración, se desarrollan otras ideas, incluso se muestra la fragilidad de la primera definición de esta regla pues se daba por transparente que se trata de que la expresión polinomial esté ordenada, así como que es extendible a las raíces negativas en cuanto a permanencias, la cual sería falsa sino estuviera completa (Ver Cantoral y Ferrari, 2009).

Una actividad para visualizar la regla de Descartes

Luego de reflexionar sobre los significados alrededor de raíces y funciones que podrían haber construido estudiantes de bachillerato en cursos de Álgebra y Geometría Analítica en los cuales han sido instruidos respecto a funciones lineales y cuadráticas fundamentalmente, diseñamos una actividad donde buscamos enriquecer estos argumentos desde el estudio de derivadas sucesivas, que calculadas en el cero particularmente, nos permite reescribir las funciones utilizando el polinomio de Taylor como interesante herramienta para la predicción.

En general, en los programas de Bachillerato, encontramos que se trabaja con las expresiones algebraicas: $y = mx + b$ así como $y = ax^2 + bx + c$ con mayor detalle que otras polinomiales. Con estas expresiones se les presenta, en general, el término libre "*b*" de la expresión analítica de una función lineal como la ordenada al origen, así como la pendiente "*m*" de esa recta como la inclinación. En cambio, en la función cuadrática generalmente tratada como "parábola" se les reafirma el papel que juega la ordenada al origen, introduciéndolos también en el estudio del signo del parámetro correspondiente al término cuadrático, informando sobre si la curva abre hacia arriba o hacia abajo, pero sin trabajar con el parámetro "*b*" del término lineal.

En el diseño respetamos este orden iniciando entonces las tres actividades de aprendizaje con la correspondiente a la función lineal $y = mx + b$ y la posibilidad de reescribirla como $y = f'(0)x + f(0)$, expresión que describirá en toda función polinomial, a la recta tangente a la curva en el punto $(0, f(0))$ y que nos permite visualizar algunas características de las mismas. Sin embargo, la atención se desvía a los cambios de signo que presentan estas constantes de la función lineal, y por ende de la posibilidad o no de tener una raíz positiva. Todos estos, argumentos muy trabajados en clases de matemáticas desde la secundaria.

En la segunda actividad se les invita a reflexionar sobre la función cuadrática, donde aparece ahora la segunda derivada. Por tanto, además de conocer la recta tangente en $(0, f(0))$, emerge la concavidad de la misma ya que $f''(0) > 0$ indica que la parábola se abre hacia arriba, en caso contrario, hacia abajo. En la tercera y última actividad de aprendizaje, se les propone analizar las funciones cúbicas, presentando en la tabla sólo las gráficas correspondientes a $f'''(0) > 0$. Esta información nos permite asegurar que la curva recorre el plano cartesiano desde $-\infty$ dirigiéndose hacia $+\infty$ a medida que *x* tiende a $+\infty$, en tanto que las demás derivadas de orden menor anunciarán las "jorobas" que posee o su ausencia. Cerramos esta actividad, preguntándoles sobre qué habría que hacer para agregar una raíz positiva; lo cual los llevaría a reflexionar sobre funciones de mayor orden desde el argumento de que la sucesión de signos presente cuatro cambios, pudiendo ser uno del tipo $\{+,-,+,-,+\}$.

Intentamos entonces que los estudiantes resignifiquen las funciones polinomiales utilizando la Regla de los signos de Descartes para determinar el número de raíces positivas utilizando como herramienta al polinomio de Taylor. Esto conlleva trabajar con las derivadas sucesivas de una función para reescribirla. Por tanto, nos interesa enriquecer el universo gráfico de los estudiantes, particularmente en las funciones polinomiales, propiciar la emergencia de la Regla de los signos de Descartes y utilizar los significados construidos para cada derivada sucesiva, calculadas en el cero, para determinar el mayor número de raíces positivas de la función polinomial.

Discutiendo los resultados de la actividad

En búsqueda de evidencias sobre cómo propiciar el desarrollo de una red de argumentos, en estudiantes de bachillerato, alrededor de predecir el número de raíces positivas de los polinomios desde sus derivadas sucesivas, invitamos a seis muchachos de 16 años a interactuar con nosotros en tres sesiones. Se presentaron siete y se conformaron dos equipos de trabajo: uno, al que llamaremos Equipo 1, compuesto por cuatro compañeras del área de alimentos y el otro, Equipo 2, compuesto por una muchacha de informática, otra de electrónica y un estudiante del área de contabilidad. El Equipo 1 había trabajado sobre funciones y sus derivadas así como la interpretación gráfica de las mismas en su curso de Cálculo. Los integrantes del Equipo 2 en cambio, no se conocían entre sí y sólo habían trabajado ciertos elementos respecto a la derivación de funciones de manera mecánica y sin apoyo gráfico lo que marcó una gran diferencia entre los argumentos de unos y otros.

Sesión 1: Prediciendo raíces de funciones lineales

Se inicia la sesión con la pregunta: *¿reconocen esta expresión?*, *¿qué tendríamos que graficar para representarla?,* luego de haber escrito $y = ax + b$ en la pizarra. Se percibe cierto desconcierto pues contestan: *Pero… no tiene valores…* proponiendo graficar entonces: *f*(*x*)=*x+1* desde una tabla eligiendo 3, 2, 1, 0, -1, -2 y -3 para las abscisas, generando una lectura de la gráfica de derecha a izquierda, elemento que genera incertidumbre a la hora de conversar sobre si la función crece o decrece al estudiar el signo de la primera derivada. Continúa la discusión solicitándole que verifiquen que *f*(*x*)=a*x*+b puede reescribirse como: *f*(*x*) = *f'*(*0*) *x* + *f*(*0*). La primera respuesta que escuchamos en la discusión general fue: *f*(*0*)=*x*, y ante la pregunta ¿por qué?, no logran articular un argumento ya que alguien comenta: "*no… es igual a b… ya está arriba ¿no?*", utilizando así lo que se quería discutir. Se observa que pese a que habían determinado varias ordenadas de una función "con valores" al construir una tabla minutos antes, no extrapolan las ideas a esta expresión general. Recordarles esa instancia permitió arribar a *f*(0) = *b*, sin antes dejar de pasar por *f*(0) = *a* en su particular manera de "tantear" respuestas.

Para derivar, se desconciertan. Intentan recordar lo trabajado en clases, esbozando por ejemplo "*u*(*v*)=*v*(*u*) *era algo así ¿no?"…* por lo que se les guía desde el pizarrón recordando algunas de las fórmulas que evidenciaban haber conocido como recetario. El Equipo 1 recupera lo discutido con la pizarra en su informe de clase como se puede observar en la Figura 1, donde asocian el "cambio" de signos con la posibilidad de encontrar una raíz.

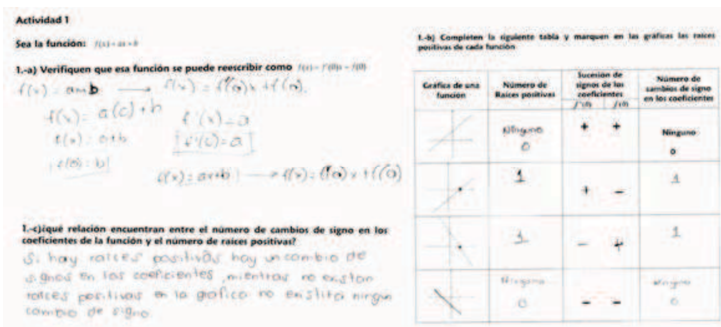


Figura 1: Reporte de primera sesión del Equipo 1

A diferencia del Equipo 1, el Equipo 2 muestra cierta debilidad de leer las gráficas dependiendo su análisis de asignarle una expresión algebraica a cada recta para asegurar la cantidad de raíces y su signo, demostrando no haber desarrollado una mirada global. Sin embargo, fijan la raíz (x=2) para las ecuaciones del tipo 2x+3=k y, asignando signos al 2 y 3 calculan el valor de k, punto que dibujan en el eje de las ordenadas y que utilizan para graficar las funciones implicadas, observándose así que no asocian los signos con la pendiente y la ordenada al origen (ver Figura 2).

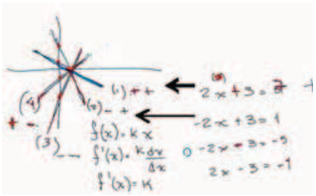


Figura 2: Confusión entre pendiente y raíz (Equipo 2)

Sesión 2: Prediciendo raíces de funciones cuadráticas

Constatar, en la sesión anterior, que sólo habían trabajado con la idea de derivar desde “la regla de los cuatro pasos”, provoca que se inicie discutiendo con el grupo el significado de las derivadas sucesivas convocadas en la actividad. Se conversa entonces sobre que $f(0)$ indica la intersección de la función con el eje de ordenadas, que $f'(0)$ nos anuncia el tipo de crecimiento así como que $f''(0)$ se vincula con la concavidad.

Luego de explorar las gráficas presentadas en el diseño, similar al utilizado en la primera sesión, se discute sobre el número de raíces al observar que: *¿Aquí hay tres? O Aquí “cero”… “una”… “dos”… ¿qué ponemos?* Dudas que aparecen al haberse graficado tres funciones (una con dos raíces distintas, una con una raíz de multiplicidad 2 y una sin raíces reales) y que las lleva a discutir en grupo el sentido de cada derivada, ideas que aplican para determinar los signos correspondientes solicitados en la tabla.

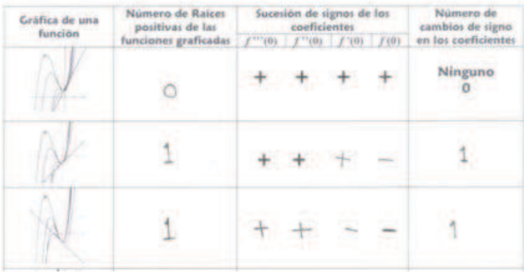
Equipo 1	**Equipo 2**
En una gráfica de funciones (parábolas en este caso) el número de raíces positivas (+), encontradas, va a ser igual al número de cambios de signos en los coeficientes	
Es decir, si no hay raíces positivas (+) no hay cambios de signos;	*Cuando no hay cambio de signo en los coeficientes no hay ninguna raíz positiva en las funciones graficadas;*
Si hay una raíz positiva (+), hay un cambio de signo;	*Cuando existe un cambio de signo, hay una raíz positiva:*
Si hay dos raíces positivas (+) hay dos cambios de signos. Con esta conclusión, deducimos que tanto en las funciones lineales como en las funciones cuadráticas se cumple con este argumento	*Cuando existen dos cambios de signo en los coeficientes, existe la posibilidad de obtener dos raíces o ninguna dependiendo del origen de las gráficas.*

Tabla 1: Conclusiones de la segunda sesión

Se observa que el Equipo 1 presta atención al número de raíces para determinar el cambio de signo (ver Tabla 1) siguiendo el orden de la tabla que deben completar, en tanto que el Equipo 2 reflexiona más cercano al enunciado de la regla de Descartes, al centrar su conclusión al número de cambios de signos para predecir raíces.

Sesión 3: Prediciendo raíces de funciones cúbicas

En la tercera sesión se les deja trabajar solos sin gran apoyo ante una de las funciones menos trabajadas por ellos en la escuela. Sin embargo, demuestran no tener problemas para rellenar las dos últimas columnas ($f'(0)$ y $f(0)$) utilizando los argumentos ya utilizados en las anteriores sesiones. Como se esperaba, se desconciertan con las dos primeras columnas ($f''(0)$ y $f'''(0)$). Luego de discutir sobre cómo asignar "+" o "-" a las derivadas argumentando desde el comportamiento de las "jorobas", observan el número de raíces positivas para determinar el número de cambios, utilizando así la regla de los signos de Descartes, para encontrar la combinación de los signos y por tanto, el signo de las derivadas en cero. El Equipo 1, nos sorprende con la interpretación que le dan a la tercera derivada al observar la variación de las concavidades.



Gráfica de una función	Número de Raíces positivas de las funciones graficadas	Sucesión de signos de los coeficientes				Número de cambios de signo en los coeficientes
		$f'''(0)$	$f''(0)$	$f'(0)$	$f(0)$	
	0	+	+	+	+	Ninguno 0
	1	+	+	+	−	1
	1	+	+	−	−	1

Figura 4: Parte de la tabla completada por el Equipo 1

Conclusiones

Ante un grupo de estudiantes especiales, logramos enriquecer su universo gráfico, así como su red de significados alrededor de las derivadas sucesivas. Aferrarse a tablas y valores para decidir los signos de las derivadas, desequilibró a uno de los grupos, asociaban inicialmente los puntos de corte con los ejes para determinar si la pendiente de la recta tangente era positiva o negativa, empantanándose un poco en lo algebraico. En tanto que el Equipo 1 acepta rápidamente el desafío de "leer" gráficas y por tanto hablar de "*variaciones*"… "*crece… decrece*"… hay un "*valle*"… acercándose a lo analítico.

En lugar de utilizar estos elementos para "predecir" raíces, y así "mostrar" la veracidad de la Regla de los signos de Descartes, emerge su uso para establecer el signo de las derivadas sucesivas en x=0 y explicarse así la forma de la curva, que parecía no haber estudiado con anterioridad. Efectivamente, la conclusión a la que arriba el Equipo 1 es: "*nos dimos cuenta que podíamos completar la tabla basándonos en nuestro argumento presentado en las funciones lineales, cuadráticas en nuestra teoría de que el número de cambios de números* (se refieren a signos) *habrá el mismo número de raíces. Nos basamos en la lógica y en la información ya dada en el ejercicio. De esta forma, posteriormente pudimos lograr saber, que nos indicaba cada uno de las derivadas con más facilidad*".

Referencias bibliográficos

Bartolozzi, M. y Franci, R. (1993). La Regola del Signi dall'Enunciato di R. Descartes (1637) alla Dimostrazione di C. F. Gauss (1828). *Archive for History of Exact Sciences 45*(4), 335 – 374.

Cantoral, R. y Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica 2* , 33–70.

Cantoral, R. y Ferrari, M. (2009). La predicción y la regla de lo signos de Descartes. Primera parte: Argumentos y demostraciones. *Revista Premisa 11*(41), 3-20.

Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. Francia: Ediciones J. Gabay.

Hall, H. S. y Knight, S. R. (1980). *Álgebra Superior*. México: Unión tipográfica editorial hispano americano.

Sullivan, M. (1989). *Precalculus*. México: Maxwell Macmillan International Editions.

Uspensky, J. V. (1995). *Teoría de las ecuaciones*. México: Limusa.

Youschkevitech, S. (1995). The concept of function up to the midde of the 19^{th} century. (R. Farfán, trad.). En: R. M. Farfán (Ed.), *Antologías 1* (pp. 81-185). Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN: México. (Reimpreso del *Arch. Hist. Exact. Sci. 16*, pp. 37-85, 1976)