COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA APOE

Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. La investigación se sitúa en el estudio del concepto combinación lineal de vectores, que concierne al álgebra lineal, bajo un enfoque cognitivo donde se utiliza la teoría APOE como marco teórico y metodológico. Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación determinan la estructura general del estudio. En la parte empírica de esta investigación se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 8 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), que dieron información respecto a las construcciones que realizaron los estudiantes. Esta investigación ha sido financiada parcialmente por el proyecto DM 03/10/I.IMA

Palabras clave: teoría APOE, combinación lineal

Abstract. The investigation presented below focuses on the study of the concept of linear combination of vectors, a central topic of linear algebra, under a mental approach where APOS theory is used as theoretical and methodological frame. The three proposed components by this cycle of investigation determine the general structure of the study. In the empirical part of this investigation a questionnaire was designed and applied to interview 8 students of the undergraduate program of Mathematics at the Pontifical Catholic University of Valparaiso (Chile) which provided information about the constructions students accomplished. This investigation has been partially financed by project DM 03/10/I.IMA

Key words: APOS theory , linear combination

Introducción

El concepto de combinación lineal de vectores está inmerso en el tópico de Espacios Vectoriales del dominio del Álgebra Lineal, que es básico y central para la construcción de otros conceptos no menos fundamentales, vectores linealmente dependientes e independientes, espacio generador, base de un espacio vectorial, transformaciones lineales, entre otros; todos conceptos importantes que resuelven problemas en el campo de la Física, la Química, la Ingeniería, la Economía, la Ecología, la Informática, etc. -constantemente los cursos de álgebra lineal son básicos para una gran variedad de disciplinas-. Sin embargo, a pesar de eso la enseñanza del Álgebra Lineal es comúnmente percibida como una experiencia de fracaso (Carlson, 1993, Hillel, 2000).

En 1997, Dubinsky declaró que la Didáctica del Álgebra Lineal es un campo de investigación muy reciente, y también habló de la insuficiencia de la enseñanza del Álgebra Lineal, "No hay un cuerpo de investigación que proporcioné la evidencia que convencería a un escéptico de la carencia del éxito de un curso de Álgebra Lineal" (Dubinsky, 1997, p. 86). Hoy en día, realmente la Didáctica del Álgebra Lineal no es así Dorier y Sierpinska (Dorier, 2000; Dorier y Sierpinska, 2001) certifican la fortaleza del campo. Particularmente Dorier y Sierpinska propusieron una clasificación de estudio más avanzados: (1) análisis histórico epistemológico (Dorier, 2000), (2) análisis de los lenguajes del Álgebra Lineal (Dorier, et al., 2000; Hillel, 2000), (3) análisis de las características del pensamiento requerido para la comprensión del Álgebra Lineal (Alves-Diaz y Artigue, 1995; Sierpinska, 2000) y (4) estudios de práctica de enseñanza y experimentos de enseñanza del Álgebra Lineal (Harel, 2000; Rogalski, 2000). Más trabajos se han desarrollado, que afirma bien la síntesis antes dicha: Sierpinska y Nnadozie (2001), Uhlig (2002), Gueudet (2004), Trigueros y Oktaç (2005), Maracci (2008).

La investigación que se reporta a continuación, se realiza desde un enfoque cognitivo, donde se utiliza la teoría APOE (proviene de los términos: Acción, Proceso, Objeto y Esquema). El proceso de investigación en esta teoría conlleva el realizar un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir el concepto matemático en cuestión (en este caso el de combinación lineal de vectores), llamado descomposición genética (Dubinsky, 1991). La realización de este modelo forma la primera componente de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por dicha teoría (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996). En la descomposición genética que se diseña para el concepto combinación lineal de vectores, se describen: las construcciones mentales que se consideran prerrequisitos, las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y asimilación) que determinan un camino mediante el cual un estudiante puede construir de manera adecuada dicho concepto. Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de enseñanza y colección, análisis y verificación de datos, determinan la estructura general de la investigación. Para testear la viabilidad de la descomposición genética se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 8 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), que dieron información respecto a las construcciones que realizaron los estudiantes. Algunos hallazgos de la investigación dan información respecto a las operaciones de un espacio vectorial.

Marco teórico: Teoría APOE

El uso de la Teoría APOE para explicar la construcción de los conceptos de Álgebra Lineal es reciente (Trigueros y Oktaç, 2005; Oktaç, Trigueros y Vargas, 2006; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008; Parraguez y Oktaç, 2010; Roa y Oktaç, 2010), aunque este acercamiento teórico ha sido usado con éxito en investigaciones relacionadas con el aprendizaje de conceptos matemáticos en Cálculo, Análisis, Álgebra Abstracta, Matemática Discreta y Lógica. La Teoría APOE está interesada en las construcciones mentales que los estudiantes hacen cuando ellos están aprendiendo un concepto matemático.

Se analiza el concepto de combinación lineal de vectores, teniendo como objetivo principal diseñar una descomposición genética, que muestre un camino viable que describa en detalle los aspectos constructivos del concepto, en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que un estudiante pueda seguirlo para tener buen éxito en el aprendizaje de él. Con esto en mente se plantean las siguientes preguntas: ¿Qué papel juegan algunas nociones del álgebra lineal específicas para que los estudiantes logren una comprensión profunda del concepto de espacio vectorial? En la pregunta inmediatamente anterior, cuando decimos *"comprensión profunda",* estamos pensando que las siguientes construcciones estarían involucradas: interiorizar acciones para llegar a una concepción proceso; coordinar dos o más procesos y encapsular varios procesos para construir nuevos objetos.

La posición en esta investigación fue abordar el concepto de combinación lineal de vectores desde su definición matemática formal ¿pero cuál definición? Ya que es muy importante declarar, qué definición se espera que los estudiantes alcancen y las proyecciones de la misma en el aprendizaje de la matemática.

Uno de los textos guía de los estudiantes del curso en el cual se realizan las entrevistas y cuestionarios, da la siguiente definición de combinación lineal de vectores: "sean $u_1, \ldots, u_n$ elementos del espacio vectorial U. Se dice que v en U es combinación lineal de estos vectores si existen escalares $c_1, \ldots ,c_n$ en K tales que: $v = c_1u_1,+ \ldots + c_nu_n$ (Hoffman y Kunze, 1979, p. 31). Una característica que se puede observar en la definición anterior, es considerar la construcción de la combinación lineal como una igualdad de vectores, por un lado v y por otro $c_1u_1,+ \ldots + c_nu_n.$

Cabe aclarar que en lo que sigue, las descripciones que se hacen de la construcción de conceptos involucrados son en términos cognitivos. Por ello para dar respuesta a la pregunta de investigación se formularon los siguientes objetivos particulares: identificar y analizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes al construir el concepto de combinación lineal de vectores, mediante la metodología de investigación planteada por la teoría APOE.

Descomposición genética del concepto combinación lineal de vectores, como objeto

El concepto de combinación lineal de vectores fue estudiado en el libro Learning Linear Algebra with ISETL (Weller et al., 2002) por los miembros del RUMEC. En dicho estudio se explicita que la condición que determina la combinación lineal de vectores, no se puede averiguar mediante una concepción acción del concepto espacio vectorial, ya que se requiere representar mentalmente todos los vectores de un espacio vectorial. Estos autores consideran que con una concepción proceso un individuo puede programar un algoritmo al que han llamado "fun LC" que supondrá que el "name_vector_space" ha sido dirigido. Eso aceptará dos inputs SK y SV, donde SK denota una sucesión de escalares, y SV representa una sucesión de vectores de la misma longitud, eso devolverá un vector construido tomando la combinación lineal de SV con respecto a SK; es decir, la combinación formada primero por multiplicar cada vector en SV por su correspondiente SK y luego sumar juntos los vectores resultantes. La encapsulación de esto ocurre cuando el estudiante construye una acción o proceso para ser aplicada al concepto, por ejemplo al aplicar el algoritmo a cualquier sucesión de cuatro vectores no cero y cuatro escalares no cero, del espacio vectorial $V = (Z5)^6$.

La descomposición genética del concepto combinación lineal se basa en la construcción del concepto espacio vectorial, que es construido fundamentalmente por la relación de tres esquemas: conjunto, operación binaria y axioma. La coordinación de los procesos relacionados con las operaciones de suma de vectores y multiplicación por escalar juega un papel importante para que emerja un nuevo objeto, llamado espacio vectorial (Parraguez & Oktaç, 2010)

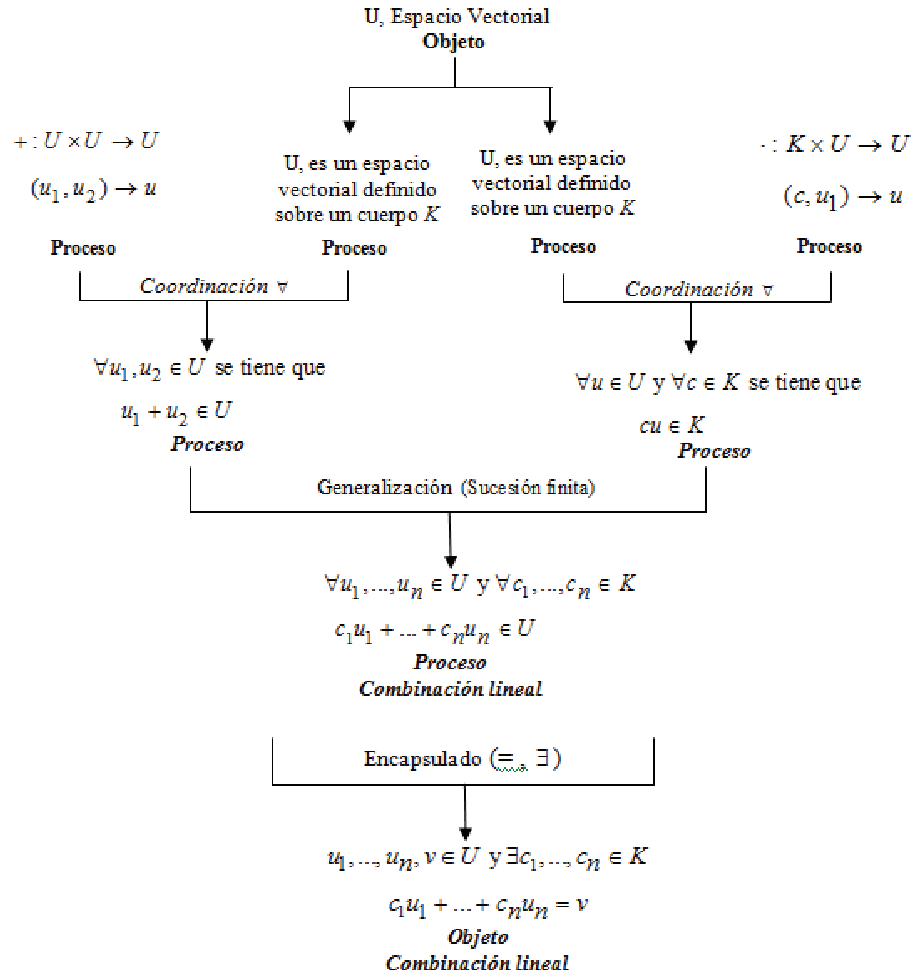

Figura 1. Descomposición genética del concepto combinación lineal de vectores.

En base a los antecedentes entregados por el grupo RUMEC (Weller et al., 2002), en la experiencia como profesor y aprendiz de este tema, y resultados de investigaciones previas que están disponibles (Roa & Oktaç, 2010), se presenta una descomposición genética del concepto combinación lineal de vectores: (Figura 1).

Esta coordinación se presenta específicamente cuando un estudiante considera que al multiplicar un vector cualesquiera u de *U*, y un escalar cualesquiera *c* de *K*, el vector resultante cu está en *U* (por ser *U* espacio vectorial). Una vez que un estudiante logra una concepción proceso proveniente de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial *U*, éstos deben generalizarse para una sucesión finita de vectores y para una sucesión finita de escalares, resultando un nuevo proceso de combinación lineal, $c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$ que será encapsulado en el objeto combinación lineal a través de la resultante de la suma de: $c_1u_1, \ldots, c_nu_n$ en un vector *v* de *U*. Una vez que el estudiante logra la construcción objeto de la combinación, sólo entonces puede comparar dicho objeto combinación $c_1u, + \ldots + c_nu_n$

con el objeto *v*, a través de la igualdad de vectores y de la existencia de los escalares $c_1,\ldots,c_n \in K$; resultando un nuevo objeto llamado combinación lineal de vectores, que se lee: *v* es combinación lineal de $u_1, \ldots, u_n$.

Ejemplo de la entrevista

Con el fin de mostrar un ejemplo de construcción del concepto combinación lineal como objeto, se presenta a continuación una parte del trabajo realizado por un estudiante durante la entrevista.

El estudiante 7 (ES7) trabaja el siguiente problema, sin percatarse de la contradicción que hay en su sistema de ecuaciones lineales. Miremos para ello la argumentación que realizó en la pregunta 5 de la entrevista:

Pregunta 5 de la entrevista

Sea $\mathbb{P}_2[x]$ el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado a lo más dos incluyendo el polinomio nulo, y *V* un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_2[x]$. ¿El vector $-5+7x-x^2 \in V$ es combinación lineal de los vectores $x+2x^2$ y $-1+x+x^2$?

El ES7 inicia su respuesta, suponiendo que $-5+7x-x^2$ es combinación lineal de los vectores $x+2x^2$ y $-1+x+x^2$ (ver Figura 2a). A partir de lo cual genera un sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz asociada esta representada en la Figura 2b.

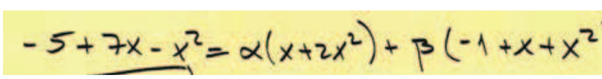

Figura 2a: Combinación Lineal

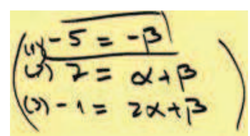

Figura 2b: Matriz Asociada

Posteriormente el ES7 resuelve el sistema a través de la matriz asociada, concluyendo que la combinación lineal del vector $-5+7x-x^2$ en los vectores $x+2x^2$ y $-1+x+x^2$, no es única (Ver Figura 3).

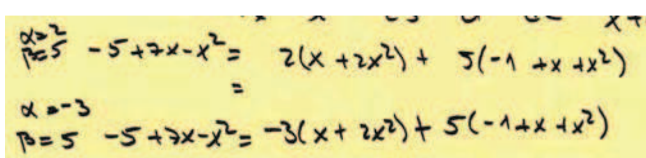

Figura 3: Respuesta del estudiante 7, a la pregunta 5 de la entrevista.

A manera de conclusión

Un resultado importante que arrojó esta investigación, es que las operaciones filas que realizan los estudiantes sobre la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales, está totalmente descoordinada de las operaciones suma de vectores y multiplicación por escalar que definen al espacio vectorial. Para estos estudiantes, la matriz asociada es una herramienta de trabajo "un algoritmo" que se utiliza con operaciones suma y multiplicación por escalar usuales, y que resuelven cuestiones que se relacionan con la combinación lineal de vectores.

Así también, otro aspecto relevante es que los estudiantes no sitúan los vectores de la combinación lineal en un espacio vectorial específico, es decir, no se cuestionan si los vectores $x+2x^2$ y $-1+x+x^2$ pertenecen a *V*. En términos de la descomposición genética propuesta, puedo señalar que el estudiante 7 no ha construido el objeto espacio vectorial *V*, por ende no puede desencapsularlo, ni mirar los vectores que están el él; y trabaja los vectores $x+2x^2$ y $-1+x+x^2$ simplemente como polinomios de segundo grado, es decir, como elementos de $\square_2[x]$.

Referencias bibliográficas

Alves Dias, M., & Artigue, M. (1995). Articulation problems between different systems of symbolic representations in Linear Algebra. *Proceedings of PME 19*. Recife, Brezil, 2, 34–41.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds) *Research in collegiate mathematics education,* Vol. 2 (pp. 1-32), Providence: American Mathematical Society.

Carlson, D. (1993). Teaching linear algebra: must the fog always roll in? *College Mathematics Journal, 24(1)*, 29–40.

Dorier, J-L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski M. (2000). The meta lever. In: J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra (pp. 151–176)*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J-L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In: D. Holton (Ed.), *The teaching and learning in mathematics at university level: an ICMI study* (pp. 255–273). The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level, resources for teaching Linear Algebra. *MAA Notes*, 42, 85–106.

Gueudet G. (2004). Roˆle du ge´ome´trique dans l'enseignement de l'alge`bre line´aire. *Recherches en didactiques des mathe´matiques*, 24(1), 81–114.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In: J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra (pp. 177–189)*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In: J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra (pp. 191–207*). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hoffman, K., y Kunze, R. (1979). *Álgebra lineal*. Prentice-Hall International, Bogotá Colombia.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Educación Matemática*, *20(2),* 65-89.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector space theory. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *40(2),* 265-276.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces: a viewpoint from APOS theory. In D. Hughes-Hallett, I. Vakalis y H. Arikan (Eds) *CD-ROM Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*, Estambul, Turquía: John Wiley & Sons Inc.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, *432(8),* 2112- 2124.

Roa, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13(1)*, 89-112.

Rogalski, M. (2000). The teaching experimented in Lille. In: J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra (pp. 133–149)*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In: J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra (pp. 209–246)*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., & Nnadozie, A. (2001). Methodological problems inanalyzing data from a small scale study on theoretical thinking in high achieving linear algebra students. In *Proceedings of* *the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Utrecht, The Netherlands, 4, 177–184.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 157-176.

Uhlig, F. (2002). The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra. *Educational Studies in Mathematics, 50(3),* 335–346.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL.* Version. Disponible en http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/.