

TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA PARTICIPAR EN EL PROCESO DE ADQUISICIÓN DE CONOCIMIENTOS CONCEPTUALES EN EL TEMA DE SUCESIONES REALES

Elvira Borjón Robles, Otilio B. Mederos Anoceto

Universidad Autónoma de Zacatecas, Universidad Autónoma de Coahuila

(México)

eborjon@mate.reduaz.mx, omederosa2081@yahoo.es

Resumen. En este trabajo se indican los conceptos, teniendo en cuenta las necesidades al operar con ellos, mediante un cuádruplo (E, C, R, S) ; donde por E se denota la colección, que llamamos extensión, de todos los objetos que corresponden al concepto, por C su contenido, o sea, un conjunto, $\{P_i\}$, $i \in I$ (I es un conjunto), de propiedades esenciales P_i de objetos, cuyo cumplimiento es suficiente para dado un nuevo objeto determinar si pertenece o no pertenece a la extensión del concepto, por R las representaciones de los objetos de E y por S los significados asociados a estos objetos. El objeto de estudio de esta investigación son las sucesiones reales. Se presta especial atención en este trabajo a los resultados de la utilización de diferentes registros de representación por los estudiantes para establecer las relaciones exactas, entre las extensiones de diferentes conceptos subordinados al concepto de sucesión real. Por ejemplo, sucesiones acotadas superiormente, sucesiones acotadas inferiormente, y los conceptos contrarios a estos conceptos.

Palabras clave: sucesión, conceptos subordinados, contenido, extensión, representaciones

Abstract. In this work the concepts are described by a quadruple (E, C, R, S) where, E denotes the collection of all the objects, which we call the extension of the concept, C is the content, i.e. a set $\{P_i\}$, $i \in I$ (I is a set), of essential properties P_i such that if an object satisfies the properties of C then it belongs to E , and do not belong to E in any other case, R means the representations of objects of E and S stands for the meanings of these objects. The study objects of this research are the real sequences and the use of different registers of representation by students, to establish the exact relations between the extensions of different subordinate concepts to the concept of real sequence: upper bounded sequences, lower bounded sequences, and contrary concepts to the last ones.

Key words: sequence, subordinate concepts, content, extension, representations

Algunas ideas sobre los conceptos

En el aprendizaje de las matemáticas es primordial que los individuos aprendan los conceptos, pues estos juegan un papel muy importante en su desarrollo y son considerados parte esencial de su conocimiento. Es en esta dirección que de manera general se ha desarrollado nuestra investigación, tomando como fundamentación los resultados de la psicología educativa:

los conceptos constituyen un aspecto importante de la teoría de asimilación debido a que la comprensión y la resolución significativa de problemas dependen en gran parte de la disponibilidad en la estructura cognoscitiva del alumno tanto de conceptos supraordinados (en la adquisición inclusiva de conceptos) como de conceptos subordinados (en la adquisición supraordinada de conceptos) (Ausubel, Novak y Hanesian, 2000, p.86)

Por otro lado relacionado con los conceptos matemáticos se plantea:

Distinguir el “concepto” de su construcción no es fácil, y quizás, no es ni posible ni deseable: un concepto se halla, por así decirlo continuamente en fase de construcción y en esta misma construcción se halla la parte más problemática y por lo tanto más rica de su significado. Podríamos llamar a tal construcción, como hace otros autores: conceptualización. ¿Qué es o cómo se da la conceptualización? Sigue siendo fundamentalmente un misterio... (D’Amore, 2003, p. 28).

Desde el punto de vista de D’Amore no importa lo que se entienda por concepto sino más bien ¿de qué manera se adueña el individuo de los conceptos? En el caso de conceptos de extensión infinita, como es el caso de los conceptos fundamentales del cálculo y, particularmente el concepto de sucesión, constantemente se hallan en la fase de ampliar la colección de los elementos conocidos de su extensión.

Es de importancia para nuestra investigación tener claro lo que se entiende por concepto, existen diversas propuestas de definiciones, por ejemplo en (Ausubel *et al*, 2000, p.88) se menciona “para nuestros propósitos, definiremos a los conceptos como objetos, acontecimientos, situaciones o propiedades que **poseen atributos de criterios** y que están diseñados en cualquier cultura dada mediante algún **signo o símbolo** aceptado”.

Por otro lado también tenemos que en Bruning y Schraw (2006) aparece: “los conceptos son las estructuras mentales mediante las que representamos categorías significativas”. Específicamente en la matemática ¿De qué forma se adquieren los conceptos? Según las teorías existentes, hay tres formas de adquirir los conceptos, a saber:

1. Teoría regida por reglas. Según Bourne (1982), la pertenencia a una clase conceptual se determina aplicando un conjunto de reglas, que se pueden aprender mediante la instrucción o la experiencia de ejemplos positivos o negativos.
2. Teoría basada en prototipos o patrones. Los teóricos de los prototipos, Rosch y Mervis (1975) y Rosch (1978) sostiene que la pertenencia a una clase la determina el grado de similitud del ejemplo con uno conocido que se halle en la memoria y que parezca que constituye la mejor ejemplificación del concepto.
3. Teorías probabilísticas. Wattenmaker, Dewey, Murphy y Medin (1986) afirman que en el aprendizaje de los conceptos juegan un papel importante las probabilidades. Ellos sostienen que el sujeto que está aprendiendo cuando se enfrenta a un ejemplo nuevo busca sus atributos característicos, pero no los toma como definitorios; ya que lo que determina que ese ejemplo sea positivo es la suma de los rasgos en la memoria.

Mientras más supera la suma el valor crítico, más rápidamente tiene lugar la clasificación.

En la matemática la utilización de la *teoría regida por reglas*, parece ser la que más facilita la utilización del aparato lógico deductivo para determinar nuevas propiedades de los conceptos.

D'Amore (2005) menciona relacionado con los conceptos y muchos investigadores en matemática educativa muestran preocupación por los procesos internos que un individuo realiza para asimilar los conceptos

En las investigaciones relacionadas el aprendizaje del cálculo y del análisis se dejan entrever problemáticas relacionadas con el aprendizaje del concepto de función (Hitt, 1996), este uno de los elementos que estaremos poniendo en juego en nuestra investigación.

Un concepto es un modelo mental, generalizado, de determinados rasgos o propiedades de objetos, o relaciones entre objetos agrupados en una clase; así como de los objetos con esas características agrupados en otra clase. El concepto como resultado es una idea compleja, es la suma de un conjunto de proposiciones e inferencias anteriores que determinan tanto elementos como propiedades de éste.

Teniendo en cuenta las opiniones de D'Amore, de Ausubel y lo señalado en el párrafo anterior en este trabajo consideraremos a un concepto como un cuádruplo (E, C, R, S) , donde por E se denota la colección, que llamamos extensión, de todos los objetos que corresponden al concepto, por C su contenido, o sea, un conjunto, $\{P_i\}$, $i \in I$ (I es un conjunto), de propiedades esenciales P_i de objetos, cuyo cumplimiento es suficiente para dado un nuevo objeto determinar si pertenece o no pertenece a la extensión del concepto, por R las representaciones de los objetos de E y por S los significados asociados a estos objetos. La extensión y el contenido son características lógicas y las representaciones y los significados características psicopedagógicas.

Por ejemplo, si se define el concepto de función real de variable real con dominio A y codominio R como una relación f , $f \subseteq A \times R$, que satisface las propiedades: $f_1)$ Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$, $f_2)$ Si $(a,b_1) \in f$ y $(a,b_2) \in f$, entonces $b_1 = b_2$; resulta que el contenido de este concepto es el conjunto C , $C = \{f_1, f_2\}$, y la extensión E es la colección de todas las relaciones r que satisfacen las dos propiedades del contenido. En el trabajo se indica la extensión de este concepto por $F(A)$.

El objetivo de nuestro trabajo es determinar como el uso de diferentes registros de representaciones facilita la participación de los estudiantes en el aprendizaje del concepto de

sucesión y de conceptos subordinados al mismo, y al mismo tiempo permite la determinación de las relaciones exactas entre sus extensiones

El concepto de sucesión numérica

En el trabajo se considera que las sucesiones son funciones reales cuyo dominio es N , por tanto el contenido C de este concepto es el conjunto $\{p\}$, donde p es la propiedad: el dominio de la función es el conjunto N . Su extensión la forman todas las funciones que satisfacen la propiedad p , y se indica por $S(N)$. En el concepto de sucesión intervienen los conceptos de dominio, codominio, grafo, imagen, variable independiente y variable dependiente, por tanto la utilización de registros de representaciones de los elementos de la extensión del concepto de sucesión requiere de la utilización de registros de representaciones de los conceptos que en el intervienen. En la figura 1 aparece la representación mediante un diagrama de una sucesión a ,

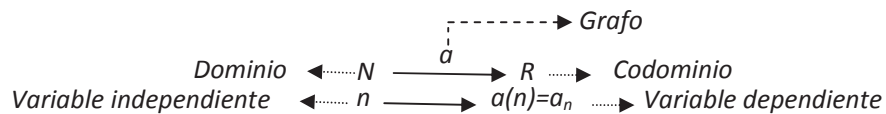


Fig. 1. Algunos de los conceptos que intervienen en el concepto de sucesión

El grafo de la función es el subconjunto a de $N \times R$ definido por $a = \{(n, a_n) : n \in N \text{ y } a_n \in R\}$. Téngase presente que con el símbolo a se indica tanto la sucesión como su grafo. La imagen de una sucesión a es el subconjunto del codominio que se indica por Imf y se define por $Imf = \{y \in R : \text{existe un } n \text{ de } N \text{ tal que } a_n = y\}$. Para utilizar una representación gráfica en un plano cartesiano de una sucesión a hay que representar gráficamente su dominio N , el conjunto $N \times R$, el grafo a y la imagen Imf . De la presentación gráfica de una sucesión en un plano cartesiano es importante que los estudiantes aprendan que el dominio y la imagen de la sucesión son las proyecciones del grafo sobre el eje de las X y de las Y , respectivamente.

El grupo de estudiantes

Las actividades didácticas diseñadas se aplicaron a un grupo de seis estudiantes de primer semestre de la carrera de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Se trabajó en horario extra clase durante cuatro semanas, dos veces por semana, dos horas. En esta investigación se puso en práctica el aprendizaje activo y a través de la mediación del docente con explicaciones breves sobre el contenido y las extensiones a tratar en la sesión correspondiente.

Descripción de las actividades diseñadas y de los resultados de los estudiantes

Sobre las actividades didácticas

Se diseñaron dos hojas de trabajo. En la primera hoja de trabajo las actividades que se le presentaron y realizaron los estudiantes estuvieron encaminadas a que participaran en: 1. La construcción de representaciones gráficas de sucesiones finitas y de relaciones con dominio N que no eran sucesiones. 2. La determinación de la imagen de una sucesión como la proyección de la representación gráfica del grafo de la sucesión sobre el eje de las Y . 3. El paso de representaciones tabulares a representaciones gráficas y viceversa. 4. La determinación de las características del grafo y la imagen de sucesiones acotadas, acotadas superiormente y no acotadas inferiormente y acotadas inferiormente y no acotadas superiormente. A continuación realizamos algunos comentarios sobre las tareas 1, 2 y 4.

Tarea 1. Al iniciar el tema de sucesiones el profesor construyó el mapa de las extensiones $R(A)$ y $F(A)$ de los conceptos de relación y función real con dominio A , figura 2. Los estudiantes construyeron representaciones gráficas de elementos de $S(N)$ y de $R(N)\setminus S(N)$, donde $R(N)$ y $S(N)$ indican las extensiones de los conceptos de relación con dominio N y sucesión. El profesor con estos resultados y con la participación de los estudiantes construyó el mapa de la figura 3.



Fig. 2. Mapa de las extensiones $R(A)$ y $F(A)$

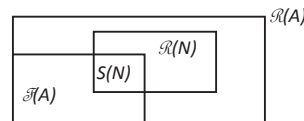


Fig. 3. Mapa de las extensiones $R(A)$, $F(A)$, $R(N)$ y $S(N)$

Tarea 2. Se presentaron a los estudiantes actividades mediante las cuales tenían que representar el grafo de sucesiones y encontrar su imagen mediante la proyección del grafo sobre el eje de las Y .

Tarea 3. En las actividades correspondientes a esta tarea, los estudiantes tenían que determinar las características geométricas de las representaciones geométricas del grafo y la imagen de sucesiones acotadas (grafo en una semibanda e imagen en un intervalo acotado), acotadas superiormente y no acotadas inferiormente (el grafo no está contenido en ninguna semibanda, pero sí en un semiplano, la imagen no está contenida en ningún intervalo acotado, pero sí en un intervalo del tipo $[a, +\infty)$). Al terminar estas actividades el profesor conjuntamente con los estudiantes construyó el mapa de las extensiones $S(N)$, $S_a(N)$, $S_s(N)$ y $S_l(N)$, de los conceptos de

sucesión, sucesión acotada, sucesión acotada superiormente y acotadas inferiormente,

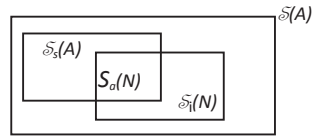


Fig. 4. Mapa de las extensiones $S(N)$, $Sa(A)$, $Ss(N)$ y $Si(N)$

respectivamente, que se muestra en la figura 4.

Las actividades de la segunda hoja de trabajo se diseñaron con el objetivo de que los alumnos participaran en el paso de un tipo de representación a otro, teniendo en cuenta la afirmación que hace Duval (1998) en el sentido de que se conceptualiza, cuando se es capaz de transitar entre las diversas representaciones de un concepto. En la tabla I se muestran los tipos de representaciones y el orden en las que debía pasar de una a otra.

Tabla I. Tránsito por las representaciones en cada actividad

Actividad	Orden de aparición de las representaciones			
	Analítica	Tabular	Gráfica	Verbal
I	1	2	3	
II	4	2	3	I
III	4	3	2	I
IV	3	1	2	
V	3	2	1	

Sobre los resultados de los estudiantes

Resultados de la hoja de trabajo I

Se detecta que en algunos casos no se refleja el dominio del concepto de partida; el de función, a un valor natural asigna dos valores reales (ver figura 2) Algunos alumnos presentan problemas para reflejar geoméricamente los elementos básicos del contenido del concepto de sucesión, tales como el grafo de la sucesión y el conjunto de los números naturales como dominio de las sucesiones.

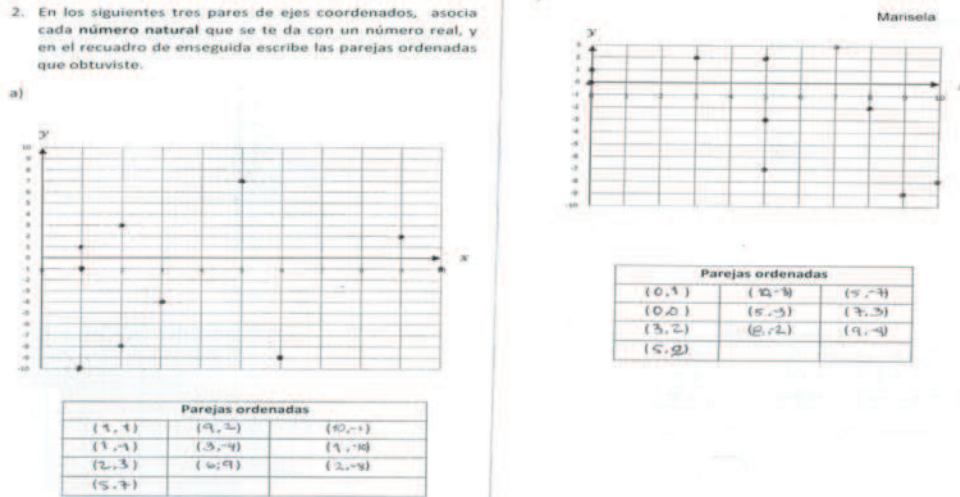


Figura 5. Parte de la hoja de trabajo que refleja la respuesta no esperada de una alumna *Resultados de la hoja de trabajo 2*. Cinco de los seis alumnos realizan el tránsito adecuadamente entre las representaciones, de esos cinco, dos (Gema y Karen) unen las gráficas con curvas continuas y un alumno no logra el tránsito adecuadamente. En algunas ocasiones no realizaron correctamente el tránsito entre la representación tabular y la gráfica (Luis Ernesto y Gema de la tabular a la gráfica), pero la analítica si la expresaron. La alumna Karen no presentó resultados en la actividad cinco y los resultados de la cuatro son parciales.

Conclusiones

Por primera vez, los estudiantes participaron en tareas de paso de una representación gráfica a una analítica. Su experiencia anterior correspondía fundamentalmente al paso de una representación analítica a una gráfica o tabular.

Consideramos muy buenos los resultados de la utilización de representaciones gráficas para que los estudiantes participaran en el proceso de adquisición de los conceptos de grafo e imagen de una sucesión, mediante la comprensión de sus características gráficas y, posteriormente, mediante su traslado a propiedades analíticas. Los estudiantes que participaron en la investigación adquirieron significados sobre la imagen y el grafo que otros estudiantes no tienen.

Los estudiantes, participantes en la investigación, como resultado de la utilización de representaciones gráficas, identifican las sucesiones acotadas, las acotadas inferiormente, las acotadas inferiormente no acotadas, las acotadas superiormente y las acotadas superiormente no acotadas mediante los rasgos geométricos que se presentan en la tabla 2.

Mediante la transformación de las características geométricas en características analíticas los estudiantes adquirieron caracterizaciones analíticas de la imagen y el grafo. En las tablas 3 y 4 se expresan estas características utilizando inclusiones y desigualdades, respectivamente.

Tipo de sucesión	Características geométricas	
	Imagen contenida en un intervalo	Grafo contenido en
Sucesión acotada	<i>acotado</i>	<i>Una semibanda</i>
Sucesión acotada inferiormente	<i>Acotado inferiormente)</i>	<i>Un semiplano superior</i>
Sucesión acotada inferiormente no acotada	<i>Acotado inferiormente y en ninguno acotado</i>	<i>Un semiplano superior y en ninguna semibanda</i>
Sucesión acotada superiormente	<i>Acotado superiormente</i>	<i>Un semiplano inferior</i>
Sucesión acotada superiormente no acotada	<i>Acotado superiormente y en ninguno acotado</i>	<i>Un semiplano inferior y en ninguna semibanda</i>

Tabla 2. Características geométricas de la imagen y el grafo de conceptos subordinados al concepto de sucesión

Tipo de sucesión	Características analíticas de una sucesión $\{x_n\}$	
	De la imagen, que se indica por Imx	Del grafo, que se indica por $grafx$
Sucesión acotada	$Imx \subset (r, s)$	$grafx \subset N \times (r, s)$
Sucesión acotada inferiormente	$Imx \subset (r, +\infty)$	$grafx \subset N \times (r, +\infty)$
Sucesión acotada inferiormente no acotada	$Imx \subset (r, +\infty)$, y $Imx \not\subset (r, s)$ para todo r y s reales	$grafx \subset N \times (r, +\infty)$, y $grafx \subset N \times (r, s)$ para todo r y s reales
Sucesión acotada superiormente	$Imx \subset (-\infty, s)$	$grafx \subset N \times (-\infty, s)$
Sucesión acotada superiormente no acotada	$Imx \subset (-\infty, s)$, y $Imx \not\subset (r, s)$ para todo r y s reales	$grafx \subset N \times (-\infty, s)$, y $grafx \not\subset N \times (r, s)$ para todo r y s reales.

Tabla 3. Características analíticas de la imagen y el grafo de conceptos subordinados al concepto de sucesión

Tipo de sucesión	Características analíticas mediante desigualdades
	Imagen
Sucesión acotada	<i>Existen números reales r y s tales que $r \leq x_n \leq s$</i>
Sucesión acotada inferiormente	<i>Existe un número real r tal que $r \leq x_n$</i>
Sucesión acotada inferiormente no acotada	<i>Existe un número real r tal que $r \leq x_n$ y no existe número real s tal que $x_n \leq s$</i>
Sucesión acotada superiormente	<i>Existe un número real s tal que $x_n \leq s$</i>
Sucesión acotada superiormente no acotada	<i>Existe un número real s tal que $x_n \leq s$ y no existe número real r tal que $r \leq x_n$</i>

Referencias bibliográficas

- Ausubel, D. P., J.D. Novak y H. Hanesian. (2000). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Bourne, L. E. (1982). Typicality effects in logically defined categories. *Memory Cognition*, 10, 3-9.
- Bruning, R. H. y Schraw G. (2006). *Psicología cognitiva y de la instrucción*. Madrid: Pearson Educación.
- D'Amore (2005). *Bases Filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Reverté.
- Duval, R., (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Hitt, F. (1996). Sistemas Semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En Hitt F. (Ed), *Investigaciones en matemática educativa I* (pp. 245-264), México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rosch, E. (1978). Principles of categorization. In E. Rosch y B. B. Lloyd (Eds.) *Cognition and categorization* (pp. 28-48), Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Rosch, E. y Mervis, C. (1975). Family resemblance: Studies in the internal structure of categories. *Cognitive Psychology* 7, 573-605.
- Wattenmaker, WD, Dewey, GI, Murphy, TD, y Medin, DL. (1986). Linear separability and concept learning: Context, relational properties, and concept naturalness. *Psychonomic Bulletin & Review* 10, 141-148.