CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS: DE LA INTUICIÓN A LA FORMALIZACIÓN. EL CASO DE LAS CÓNICAS

Efrén Marmolejo, Gema Moreno, Silvia Hernández, Amín Bahena
Universidad Autónoma de Guerrero México
efrenmarmolejo@yahoo.com, alejandrigemath@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento Geométrico Nivel: Medio

Resumen. *Nuestra propuesta, la cual es resultado de una investigación en proceso, se encuentra inserta en el nivel Medio Superior y es relativa a la Geometría Analítica, específicamente a la construcción de las cónicas. Se nutre del plegado de papel y del uso de un software de geometría dinámica (Cabri Geomètre II) como recursos didácticos. Su referencia teórica está basada en los niveles del razonamiento geométrico de Van Hiele.*
Caracterizamos, así, la construcción geométrica en tres momentos: la intuición a través del plegado de papel; la visualización vía un software de geometría dinámica como herramienta didáctica argumentativa; y por último formalizando las argumentaciones y conjeturas establecidas al analizar las cónicas vía la técnica del Debate Científico.
Palabras clave: construcción geométrica, cónicas, intuición matemática

Introducción

¿Qué es construir un concepto matemático?, ¿qué procesos tienen lugar durante esta construcción? Específicamente en el campo de la Geometría Analítica, ¿cómo motivar la construcción de las cónicas?

Contestar estas preguntas ha conducido a la exploración de recursos estratégicos que permitan transitar entre los niveles de razonamiento geométrico. Este escrito corresponde a una investigación en proceso que descansa en la búsqueda de un camino hacia la construcción de objetos geométricos, para el caso específico del estudio de las cónicas. El objetivo es construir una propuesta de aplicación en el aula que pueda extenderse a otros tópicos matemáticos.

Nuestra investigación toma los niveles del razonamiento geométrico de Van Hiele (Van Hiele, 1990) como marco para el aprendizaje, vía sus aportaciones acerca de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, lo cuáles van desde el razonamiento visual hasta el formal y abstracto. Nuestro trabajo se encuentra inserto en el nivel Medio Superior y es relativo a la Geometría Analítica.

Es ampliamente compartido que una de las dificultades en el aprendizaje de la geometría es la articulación entre los procesos de visualización y los procesos de justificación. El discurso escolar, a este respecto, debe llevar de una argumentación informal que se apoya fuertemente en la visualización -y por lo tanto es de carácter descriptivo- a una organización discursiva formal que encadena proposiciones usando reglas lógicas.

Por ello, la metodología que hemos desarrollado se alimenta de dos recursos para la enseñanza: el plegado de papel y el uso de un software de geometría dinámica. Se parte entonces, de la *intuición* a través del doblado de papel, seguida de la *visualización* vía un software de geometría dinámica como *herramienta didáctica argumentativa* (Larios, 2007) y por último la *formalización* de las argumentaciones y conjeturas establecidas al analizar las cónicas vía la técnica del *Debate Científico* (Legrand, 1993/2006). Caracterizando así, la construcción geométrica en tres momentos: intuición, argumentación y formalización.

Apelando a la Intuición

Es a través del doblez de papel que introducimos la fase manipulativa de "palpar" conceptos, visualizar y modelar propiedades. La "manipulación" facilita la comprensión de conceptos geométricos, dota de significado a los alumnos y propicia el descubrimiento de propiedades, desarrolla la intuición, fomenta la creatividad y se nutre el carácter lúdico. Así, la técnica del plegado de papel, como una estrategia para la enseñanza de la Geometría, proporciona un medio eficaz para la manipulación de los objetos geométricos.

En este contexto, las líneas serán dobleces y los puntos serán intersección de dobleces o puntos marcados con el lápiz. Como preliminar, es imprescindible dedicar una sesión de trazos básicos previo al desarrollo de la construcción de las cónicas (línea perpendicular, línea paralela, mediatriz y punto medio de un segmento, punto simétrico, línea simétrica, bisectriz de un ángulo, etc.).

Por lo tanto, en nuestra propuesta para el desarrollo de las construcciones de las cónicas (parábola, elipse, hipérbola), explotamos la idea de rectas tangentes como envolventes de las curvas cónicas, mediante el plegado de papel (García, s.f.). En cada actividad son discutidas las razones que sustentan tal construcción, enfatizando los argumentos intuitivos que las validan.

Hacia la visualización dinámica

En esta fase, la construcción de las cónicas se realiza de forma semejante a la realizada con el doblado de papel, pero haciendo uso de un software de geometría dinámica (Cabri Geomètre II). Sin embargo, aquí se acentúa la acción de proporcionar impulsos que motiven la argumentación de los estudiantes.

Escogimos el uso de un software debido a las siguientes características del medio geométrico dinámico (Ministerio de Educación Nacional, 2004):

a) La capacidad de arrastre de las figuras construidas que favorece la búsqueda de rasgos que permanecen vivos durante la deformación.

b) El uso extensivo del lugar geométrico y traza (huella que deja una figura geométrica cuando se le arrastra) que permite visualizar y descubrir hechos geométricos.

c) La animación de figuras permite presenciar el proceso constructivo de un hecho geométrico.

El papel que juegan las construcciones geométricas realizadas en el entorno de la geometría dinámica es fundamental, pues se convierten en los objetos de “experimentación” sobre la teoría, sin utilizar de manera directa el discurso. La manera de reaccionar ante los estímulos proporcionados por el individuo y los instrumentos utilizados para proporcionar tales estímulos, se pueden convertir en herramientas para que el individuo exprese sus observaciones, conjeturas o argumentaciones. De esta forma, se contribuye a superar uno de los obstáculos principales del aprendizaje de la geometría, las tensiones entre *los procesos de visualización y su potencial heurístico* en la resolución de problemas y los *procesos de justificación y su potencial pedagógico* para dar sentido a la organización deductiva del conocimiento matemático.

Consecuentemente, explotamos la capacidad dinámica que tiene un software de geometría dinámica, como un mediador entre el conocimiento geométrico y el individuo. El objetivo es que los estudiantes sistematicen sus observaciones, conjeturas y argumentaciones para que las refinen, e inducir un acercamiento a la construcción de las cónicas.

Formalización

En esta última etapa, hacemos uso, con mayor énfasis, la técnica del Debate Científico (Legrand, 1993/2006). El Debate Científico es entendido como aquel que se instaura entre los estudiantes a partir de situaciones problemáticas introducidas por el profesor, o a propósito de cuestiones o conjeturas que los mismos estudiantes aportan. El debate científico es aquel en el que los enunciados que se trabajan son conjeturales y todo alumno puede someter sus propias conjeturas al grupo de trabajo, cabe mencionar la importancia de un ambiente que permita esta apertura sin temor a que las aseveraciones que se revelen finalmente equívocas no produzcan malestar entre quien las evocó.

En ese sentido, dentro de esta metodología, se caracterizan las formas de comportamiento del alumno y del profesor, así como el establecimiento de los roles que desempeñan.

El *juego del alumno*. Se da una negociación didáctica en la que éste va a atender y analizar las aseveraciones y propósitos de sus iguales y, por otra parte, debe convencerlos de que sus participaciones son aceptables. Lo que se busca es NO centrar el trabajo alrededor de la opinión del instructor.

Existe pues un *fundamento epistemológico de la didáctica del debate científico* se hace necesario tomar en cuenta las conjeturas, como el encadenamiento de ideas que van a considerarse como verdaderas, las pruebas personales para que pueda persuadirse a los demás de la veracidad de tales conjeturas. En este sistema, el "*alumno-matemático*" tiene por interlocutor a su mini-comunidad, es decir, conjunto de personas con las que interactúa.

El *juego del profesor.* Exige jugar simultáneamente un triple juego: epistemológico, didáctico y social.

- Desde el punto de vista *epistemológico*, a fin de que perciba los diferentes niveles de argumentación que se presenten y ayude al microuniverso a captar lo que está fundamentalmente en juego.
- En el juego *Didáctico*, se trata primordialmente de permitir a los estudiantes introducirse en problemáticas científicas difíciles conservando un sentido imparcial, construyendo un historial de las ideas fuertes, llevando una bitácora personal, de tal forma que permaneciendo neutro, forme una memoria de la clase.

- En el sentido *Social*, se toman dos perspectivas, por un lado, se hace necesaria su presencia a fin de organizar las participaciones de los asistentes, y evitar un descontrol; por el otro, el coordinador debe redefinir su estatus social y hacer a un lado la imagen tradicional como especialista; en pocas palabras, debe renegociar el contrato habitual.

Con este tipo de metodología, se busca que una parte de las conjeturas propuestas por los alumnos, después de ser probadas, se conserven; seleccionando entre las intuiciones espontáneas que son profundas y que van a proporcionar afirmaciones y aquellas que son muy intuitivas y que desembocan en resultados falsos. Se presenta por lo tanto un triple problema: lo que es falso, la identificación de procedimientos para conservar lo probado como verdadero y la adquisición de un sentido crítico.

Lo anterior implica, que con la implementación del Debate Científico por medio de la construcción y discusión de ideas generales, los razonamientos en ello utilizados sean necesarios, accesibles y naturales, buscar que los alumnos, puedan manipular las matemáticas, para que finalmente a partir de enunciados generales les atribuyan sentidos compatibles con los del matemático profesional y finalmente el acceso a una forma de discurso que confiere a aquellos que la dominan cierta autonomía de pensamiento.

Hacemos uso de esta técnica con el objetivo de conducir los argumentos empleados por los estudiantes, en la construcción de las cónicas, hacia la definición como lugar geométrico y su definición analítica.

Conclusión

En el aula, deben desarrollarse experiencias que permitan al estudiante transitar de sus creencias personales a las concepciones aceptadas como válidas, con el propósito de generar convicciones y permitir eliminar ambigüedades en el proceso de elaboración colectiva del conocimiento matemático, es decir, validar sus aseveraciones.

Invitamos a la reflexión acerca de las concepciones y creencias, sobre los distintos modos de actuar en el aula y de los distintos momentos que atraviesa un estudiante en el camino a la construcción de las cónicas. Presentamos la propuesta de un camino de acceso a la construcción de las cónicas, vía el reconocimiento de las herramientas heurísticas del estudiante rescatando aquellas ideas elementales que conforman la definición de los conceptos matemáticos involucrados, reflexionando sobre el proceso propio de la construcción.

Consideramos pertinente que la actividad de enseñanza sobre la construcción de conceptos geométricos, debe tomar la precaución de llevar al estudiante a la generalización, sin brindar conceptos y definiciones concluyentes de forma inmediata, procurar que se identifique gradualmente con los métodos de la ciencia y desarrollar su independencia de pensamiento mediante la realización de tareas creadoras.

Referencias bibliográficas

García, J., (S.f.) *Construcciones geométricas con dobleces de papel*. Obtenido en noviembre 12, 2006, del sitio Web del Proyecto Estímulo del Talento Matemático: http://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/.

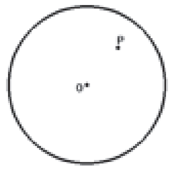
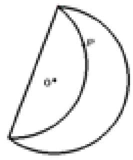
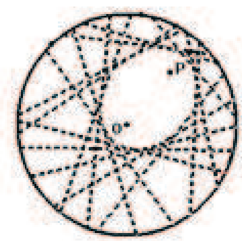
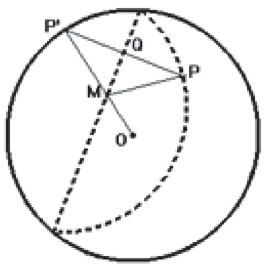
Larios, V. (2007) El software para geometría dinámica como mediador semiótico entre la geometría y el alumno. *Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* (pp.281-288) Querétaro, México.

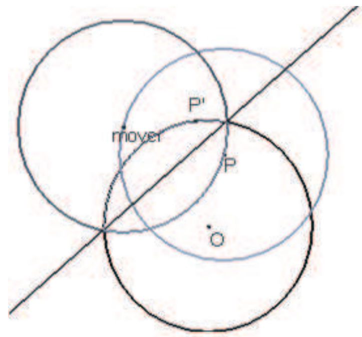
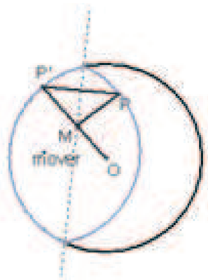
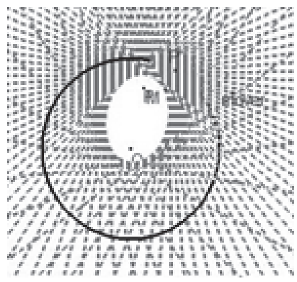
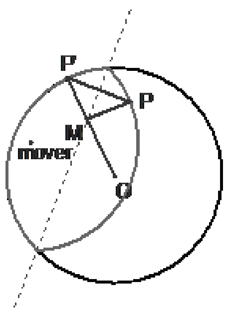
Legrand, M. (2006) *Debate científico en cursos de matemáticas y especifidad del análisis* (E. Locia)Traducción no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México. (Trabajo original publicado en 1993).

Ministerio de Educación Nacional (2004) *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Proyecto de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. Colombia. Obtenido en abril 12, 2006, de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

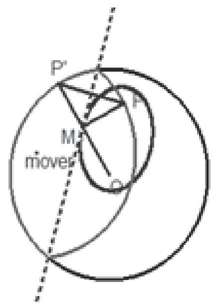
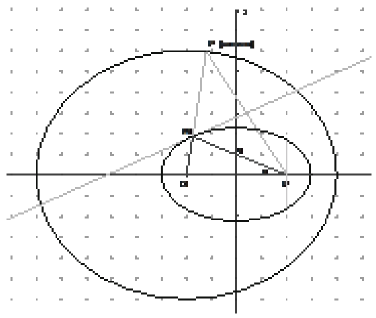
Van Hiele, P.M. (1990). *El problema de la comprensión, en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la Geometría* (De problematiek van het inzicht, gademonstreed aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde - leerstof). Tesis doctoral. Universidad de Utrecht, Holanda.

El caso de la Elipse

Instrucción	**Construcción**
Apelando a la intuición	
Toma un recorte en forma de círculo y marca un punto **P** distinto del centro **O**. Marca el punto y el centro por los dos lados, para facilitar la visión al doblar.	
Dobla el círculo de forma que la circunferencia pase por **P** y desdobla.	
Repite la operación variando el doblez de forma que vaya girando por los puntos de la circunferencia. *¿Qué figura delimitan los dobleces?, ¿Qué papel desempeñan el punto **P** en la figura, la circunferencia y **O**? ¿Es simétrica la figura? De ser así, ¿cuántos ejes de simetría tiene? ¿Cuál es la relación de éstos con los puntos **P** y **O**?*	
Supongamos el radio de la circunferencia es **r** y fijémonos en un doblez. Marca el punto **P’** que al doblar cae sobre **P** y desdobla y remarca con un lápiz la línea del doblez. Une con lápiz **P’** con el centro (así **OP’** = **r**) y llama **M** al punto de intersección de **OP’** con la línea marcada por el doblez. *¿Qué podemos decir de **P’M** y **MP**?, ¿Cuánto suma **OM** + **MP**?, ¿Qué argumento geométrico valida tu respuesta**?,** ¿Sucederá lo mismo con otros dobleces?*	

Hacia la visualización dinámica	
Haciendo uso del software, en un círculo con centro **O**, escogemos un punto **P** arbitrario y diferente del centro. Con el compás, se traza una circunferencia de igual radio que la primera y con centro en **P**, con centro (mover) en esta segunda circunferencia se traza otra de igual radio. Al igual que en el doblado de papel, se busca que esta tercera circunferencia al rotar, siempre toque el punto **P**. Se traza una recta que pasa por la intersección de la primera y la tercera circunferencia.	
Ocultando los trazos innecesarios tendría una apariencia similar a la del doblado de papel.	
Le damos traza a la recta y animación al punto mover y podemos ver la figura que describen las rectas.	
Usando simetría axial se encuentra el simétrico **P’** de **P**. La recta es mediatriz del segmento **PP’**, se traza el radio **OP’**. A la intersección del radio y la recta le llamamos **M**. Como el triángulo **MPP’** es isósceles **MP’=MP**, el radio **OP’** = **OM+MP’= OM+MP**, así la suma de las distancias de **MO** y **MP** es siempre constante, igual al radio **OP’**. *¿Qué puedes decir de los segmentos PM y P’M?, ¿Qué importancia tiene los puntos M y O?, ¿Y el radio de la circunferencia?*	

<table>
<tr><td>Le damos traza al punto M y animación a mover, y obtenemos la imagen de una elipse.

¿Qué pasa si acercamos P a O?, ¿Qué puedes decir de la longitud de los segmentos MP y MP’?, ¿Cuál es la longitud de OP’?, ¿Cuál es la suma de las longitudes de OM y MP?</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Hacia la formalización</td></tr>
<tr><td>Se hace la identificación del triángulo característico y de las propiedades intuitivamente construidas dando paso mediante su ubicación en el plano cartesiano. Finalmente, se construye la ecuación correspondiente a $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, a partir de los conceptos de distancia y de la ubicación de puntos previamente del dominio del estudiante.</td><td></td></tr>
</table>