UNA VINCULACIÓN ENTRE LA PROBABILIDAD Y LAS PRIMERAS NOCIONES DE TOPOLOGÍA: LOS TRABAJOS DE GAUSS Y WEIERSTRASS

lianggi Espinoza Ramirez, Ricardo Cantoral Uriza
PUCV Chile
Cinvestav–IPN México
leanggi@gmail.com, rcantor@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El discurso matemático escolar ha hecho que el conocimiento matemático se divida en diversos compartimientos de saberes. Mostraremos en esta investigación cómo dos áreas de la matemática, que viven sin aparente vinculación entre ellas en el sistema escolar actual, están significativamente relacionadas en su contexto de origen. Al confrontar la significación histórica con la escolar, evidenciamos las diferentes significaciones que tiene el conocimiento en cada uno de estos escenarios. Con esto identificamos conflictos epistemológicos existentes en la enseñanza de la convergencia uniforme. Concluimos que el rediseño del discurso matemático escolar debe considerar las diferentes "maneras de ver" al conocimiento matemático en los diferentes escenarios, ya que esto nos brindará una mirada más profunda de la dimensión sociocultural.*
Palabras Clave: Discurso matemático escolar, Significación, construcción social

INTRODUCCIÓN

La socioepistemología ha sostenido por años que el principal problema del aprendizaje de las matemáticas no está en las formas de enseñanza ni en las metodologías de organización curricular, sino está en la forma en que se entiende y presenta a la matemática en el ambiente escolar. Esta ideología compartida por los actores del sistema educativo se ha denominado en este marco como discurso matemático escolar (Cantoral, 2001b) El discurso matemático escolar actual divide en diversos compartimientos de conocimientos a la matemática escolar, lo reorganiza en un conjunto de temas y lo secuencia de lo más fácil a lo más complejo. De esta manera segrega cada área del saber, las cuales viven desvinculadas entre sí en el sistema escolar.

Este discurso asume que si un individuo se incorpora a un sistema de difusión institucional y estudia al conocimiento matemático compartamentalizado y secuenciado, logrará después de años de reorganizar estos conocimientos en un todo coherente que pueda utilizarlo dentro y fuera de la escuela. ¿Pero en realidad lo logran? La mayoría de los estudiantes no aprenden conocimiento matemático; este es sólo accesible para una élite intelectual. Aparentemente el causante de este problema es en gran parte esta ideología, el discurso matemático escolar. (Cantoral, 2001b)

¿Tendrá alguna relación la teoría de aproximación de funciones arbitrarias mediante polinomios con la probabilidad de espacios muestrales no finitos? (Figura 1)

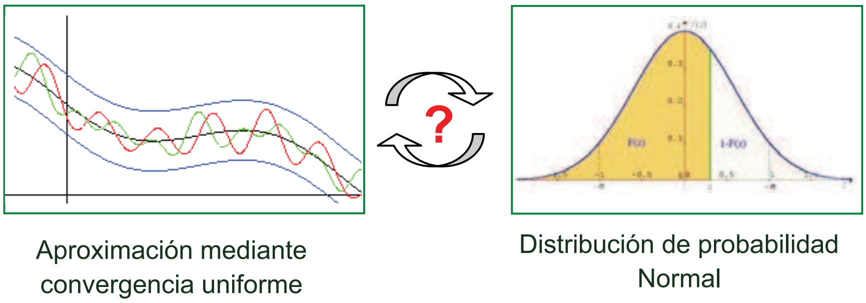


Figura 1

Desde la mirada del discurso matemático escolar actual diríamos que el primer problema pertenece al cálculo y el segundo a la estadística, las cuales son áreas del conocimiento diferentes. De hecho, estás áreas del conocimiento se estudian de manera separada en muchas instituciones educativas de nivel superior. Pero si miramos desde la mirada de los autores llegaremos a una conclusión diferente.

Weierstrass demuestra en 1885 la posibilidad de representar mediante series de funciones polinómicas cualquier función continua de variable real. Éste fue uno de los resultados más importantes de su época en el área del análisis matemático, al punto que se desarrollaron numerosas pruebas y generalizaciones al teorema (Pinkus, 2000). Es más, su teorema marca el inicio de una nueva disciplina matemática, la topología.

Al estudiar la versión original del teorema nos preguntamos sobre cómo entendió Weierstrass su teorema. Hoy lo significamos a través de la convergencia uniforme de funciones, argumento muy utilizado en los cursos de análisis matemático. Pero Weierstrass no tenía estos recursos visuales y tecnológicos. ¿Cuáles fueron las ideas germinales del teorema? ¿Qué medios utilizó el autor para darle significado? Fuimos a estudiar la publicación original (Weierstrass, 1886) y encontramos lo siguiente:

EL TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS

Karl Weierstrass, matemático alemán, publica en 1885 en los informes de las reuniones de la academia de ciencias de Berlín un artículo titulado “Sobre la posibilidad de una representación analítica de funciones arbitrarias de una variable real”. Para demostrar esto comienza considerando una función f(x) uniformemente real y continua, tal que su valor absoluto tenga límite superior finito. Enuncia la siguiente ecuación

$$\lim_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

(Weierstrass, 1886, p.105)

El autor *considera esta igualdad como verdadera sin dar mayor explicación al respecto*. Generaliza esta expresión de la siguiente manera:

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

(Weierstrass, 1886, p.105)

Esto lo hace considerando a $\psi(x)$ como una función par ($\psi(-x)=\psi(x)$), en donde la integral $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx$ conserve un valor finito w.

Después de esto demuestra que el límite de la función $F(x,k)$ cuando k tiende a cero es $f(x)$. De esta manera, el autor consigue, para cualquier función $f(x)$ continua, una representación $F(x)$ que es una función analítica por las condiciones de la función $\psi(x)$ (Espinoza, 2009). Al ser $F(x)$ una función analítica, construye una función polinomial $G(x)$ tal que $|G(x)-F(x)|<\varepsilon$

utilizando el desarrollo de funciones en series de Taylor en un intervalo cerrado. Con esto logra una representación polinomial $G(x)$ de la función arbitraria $f(x)$.

Al comienzo fue difícil entender cómo estaba entendiendo el autor a su teorema. Nos interesó el *por qué Weierstrass asumió la primera ecuación como verdadera.* Al estudiar la ecuación en detalle, nos dimos cuenta que era un resultado conocido de la época.

LA TEORÍA DE PROBABILIDAD DE GAUSS

La ecuación es la esperanza de una distribución normal. ¿Estaría pensando Weierstrass en distribuciones de probabilidad cuando veía su teorema? Para responder esto estudiamos la publicación original de este tema, la cual encontramos en (Gauss, 1823) en su obra titulada "*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*". Descubrimos una relación significativa entre la teorización del error que hace Gauss con las ecuaciones utilizadas por Weierstrass para demostrar su teorema.

Gauss modela funcionalmente el error. Para esto representa mediante una función $\varphi(x)$ a una clase fija de observaciones. Considera la probabilidad del error entre los límites infinitésimos x y $x+dx$ como $\varphi(x)dx$. Después caracteriza el comportamiento del error, encontrando condiciones para $\varphi(x)$:

- La función fuera de los límites posibles del error será cero
- Se podrá asumir que los errores positivos y negativos son de igual magnitud, por lo que considera $\psi(-x)=\psi(x)$
- Un pequeño error es más probable a ocurrir en cantidades grandes, por tanto $\varphi(x)$ tendrá su valor máximo en mayor en $x=0$ y decrecerá continuamente cuando x crezca (Gauss, 1823, p.4).

Después concluye que el valor de la integral $\int \varphi x.dx$ entre $x=-\infty$ y $x=\infty$ representará la probabilidad total del error, cuyo valor será siempre (Gauss, 1823, p.7).

Como se puede observar, existen muchas similitudes entre las matematizaciones de (Gauss, 1823) y (Weierstrass, 1885) (Figura 2).

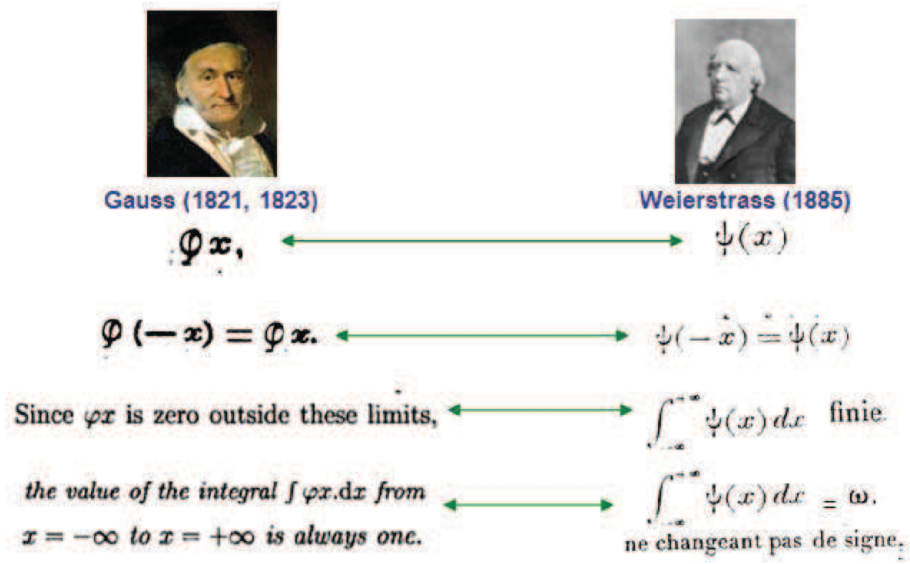


Figura 2

Notemos que incluso el orden de redacción de las ideas es el mismo. Weierstrass estudió la obra de Gauss. La relación académica es significativa. Al estudiar la época nos dimos cuenta que Gauss fue maestro de Gudermann (1798-1852), el cual a su vez lo fue de Weierstrass. Weierstrass utilizó la esperanza de una distribución normal de Gauss para demostrar su teorema. Con esto, postulamos que la interpretación que le dio Weierstrass a su teorema es la siguiente:

$$\mathrm{F}(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

(Weierstrass, 1886, p.105)

El autor generaliza la expresión de la esperanza de una distribución de probabilidad de Gauss. La saca de su contexto probabilístico, pero mantiene la significación de aproximación. La función $\psi(x)$ es una abstracción de una distribución de probabilidad. Ésta conserva una propiedad importante de las distribuciones de probabilidad: cuando la desviación estándar (k en la ecuación de Weierstrass) tiende a cero, todos los valores de la distribución se acumulan en la media aritmética x. Ésta es una idea central en el estudio de la probabilidad. Si esta igualdad se cumple para todo x, se concluye que $F(x,k)$ será igual a $f(x)$ cuando k tienda a cero. El medio de significación utilizado por Weierstrass es el estudio de la probabilidad.

LOS POLINOMIOS DE BERNSTEIN

Esta significación probabilística no es sólo de Weierstrass, es de su época. Bernstein desarrolla una demostración alternativa del teorema de Weierstrass en 1913 en un breve artículo titulado *"Démostration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités"* (Bernstein, 1913). Aquí utiliza la misma idea de Weierstrass pero utilizando una distribución de probabilidad binomial. Considera una función arbitraria que es igual a la esperanza matemática de un experimento para todos los valores de x.

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} F\left(\frac{m}{n}\right) . C_n^m x^m (1-x)^{n-m} .$$

(Bernstein, 1913, p.1)

Bernstein, además de demostrar de una manera más sencilla el teorema, brinda una manera de encontrar los polinomios. Éste es el motivo por el cual su trabajo es conocido actualmente en física.

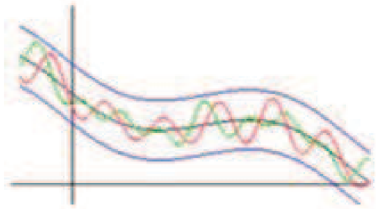
CONFRONTACIÓN ENTRE LAS SIGNIFICACIONES HISTÓRICA Y ESCOLAR

Hasta este momento hemos dado un ejemplo de la significativa relación en sus contextos de origen de conocimientos matemáticos que en la actualidad aparentan no tener vinculación. Investigaciones han brindado ejemplos que permiten ver como el conocimiento matemático no es compartamentalizado en el momento de su producción (Cantoral, 2001ª; Montiel, 2005). El caso presentado en esta investigación se encuentra, a diferencia de los citados, en una época en donde la matemática se constituyó como ciencia autónoma. Aún en las matematizaciones más rígidas del siglo XIX, el conocimiento matemático no se compartamentaliza. Fue utilizado por los matemáticos de la época como un todo integrado y relacionado.

Ante nuestra crítica al discurso matemático escolar, proponemos un rediseño de éste. ¿Cómo hacerlo? Con base en (Espinoza, 2009) planteamos lo siguiente: para desarrollar un rediseño del discurso matemático escolar, es necesario entender las diversas significaciones del conocimiento matemático en los diferentes escenarios en que vive. Estos contextos pueden ser: su origen histórico, el escolar, el uso de este conocimiento en las ciencias y en el cotidiano. Presentaremos aportaciones considerando los dos primeros.

El teorema de aproximación de Weierstrass es un resultado matemático muy importante, tanto en el momento de su producción como en la matemática de frontera de nuestros días. Provee una vinculación interesante entre el cálculo, el análisis matemático y la topología matemática. ¿Por qué un resultado matemático tan importante aparece en el discurso matemático escolar actual como un simple ejemplo o ejercicio en medio de muchos otros teoremas, o incluso es inexistente? Para entender esto entendamos la significación que tiene este conocimiento en el discurso escolar.

El teorema de aproximación de Weierstrass aparece en el discurso escolar en la teoría de aproximación y en las introducciones a la topología matemática. Su significación se centra en la idea de la aproximación polinomial mediante la convergencia uniforme (Figura 3). La atención se centra en la función que se desea aproximar o representar mediante polinomios, y en la serie de funciones polinómicas que converge a tal función.



Significación escolar del teorema
Figura 3

Sin embargo, la significación que encontramos en su producción histórica es diferente. Como mostramos, la idea de la época se sustenta en la esperanza matemática. La significación basada en la aproximación polinomial apareció recién en 1885 con su teorema. Ésta es la última de una cadena de significaciones relativas al problema de la analiticidad de las funciones (Espinoza, 2009). La probabilidad fue un recurso metodológico que utilizó Weierstrass para demostrar su teorema.

Sin embargo, la significación del problema se encuentra en una peculiar manera de mirar su producción que plasmó en su obra.

El problema de la analiticidad consistió en saber cuáles eran las funciones que podían ser estudiadas por las reglas del análisis matemático. Euler (1707-1783), Lagrange, Fourier, Cauchy, Dirichlet y muchos otros, abordaron el problema. Weierstrass aborda este problema y le pone un punto final, al afirmar que todas las funciones continuas son susceptibles a ser estudiadas por las reglas del análisis. En otras palabras, existe la posibilidad de representar analíticamente cualquier función continua.

Para demostrar esto Weierstrass dejó de mirar a la función como el objeto de estudio y miró al conjunto de todas las funciones. Su intención fue caracterizar a todas. Cambió la manera de ver el problema, de mirar a la función como el objeto de estudio a utilizarla como un medio que le permitió describir la naturaleza topológica del espacio de funciones continuas.

Aquí identificamos una confrontación entre la significación escolar y la de la producción histórica. La significación escolar, centrada en la función y la serie convergente, o en la función y la existencia de un polinomio en una vecindad de la función, no permite observar que el gran resultado de este teorema es la descripción de la naturaleza topológica del espacio de funciones continuas, y no meramente la aproximación de una función arbitraria. Por otra parte, la significación histórica no centra la atención en la aproximación polinomial, sino en la representación analítica (mediante una función infinitamente diferenciable en todos sus puntos). No se busca una aproximación polinomial, sino la representación de una función por otra que sea susceptible a ser estudiada por las reglas del análisis matemático. Esta confrontación puede permitirnos explicar las dificultades de los estudiantes al estudiar estos temas.

CONCLUSIONES

La socioepistemología ha detectado al discurso matemático escolar en gran parte como el causante de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas (Cantoral, 2001b). De aquí que nuestras aportaciones no se limitan a proveer mejores métodos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, sino que se amplían a estudiar el estatus epistemológico del conocimiento matemático escolar. Para esto estudiamos las diversas significaciones que tiene el conocimiento matemático en los diversos escenarios en los que vive.

De aquí que nos interesamos en la dimensión sociocultural del conocimiento matemático, la cual nos permite estudiar los procesos de construcción del significado. Este proceso está situado a las condiciones contextuales y a los escenarios socioculturales en los que el conocimiento está inmerso. Nuestro estudio en el escenario histórico nos proveyó información relevante sobre el estatus epistemológico de los conocimientos matemáticos. Desviando nuestra atención de los objetos matemáticos, ponemos atención a las prácticas asociadas a la construcción social del conocimiento. Con éstas aportamos epistemologías alternativas a las del discurso matemático escolar que buscan democratizar el aprendizaje de las matemáticas.

Situamos la aportación de esta investigación en este nivel. Brindamos elementos epistemológicos que aspiramos puedan ser utilizados para un rediseño del discurso matemático escolar. Este rediseño no deberá limitarse a un cambio de contenidos, sino deberá incluir el cambio de mirada que le dio Weierstrass a la matemática. Con base a la evidencia histórica y a la epistemología desarrollada en (Espinoza, 2009), consideramos que este cambio de mirada es fundamental para entender la naturaleza epistemológica del cálculo y el análisis matemático y las vinculaciones que tienen las diversas áreas del conocimiento matemático que el discurso matemático escolar actual ha segmentado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernstein, S. (1913) “Démostration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités" Comm. Soc. Math. Khauhov., 13, 1-2.

Cantoral, R. (2001a). Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R. (2001b). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitia (Ed.), Universidad de Panamá, Ciudad de Panamá, Panamá: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14(1), 64 – 75.

Espinoza, L. (2009). Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico. Tesis de maestría no publicada. México: CINVESTAV.

Gauss, C. (1823). Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Carl Friedrich Gauss Werke 4 3-93.

Montiel, G. (2005) Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis doctoral. México: Cicata-IPN.

Pinkus, A. (2000) Weierstrass and approximation theory. J. Approx. Theory. 107, 1-66.

Weierstrass, K. (1886) Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions d

ites arbitraires d'une variable réelle, J. Math. Pure et Appl. 2, 105-113.