LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN EL AULA: IDEAS FUNDAMENTALES COMO BASE DE UN PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

María Teresa Carballo Riva Palacio; Ana María Ojeda Salazar
DME, Cinvestav del IPN — México
carivpa@yahoo.com.mx; amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística; Formación de profesores — Nivel: Básico

Resumen. *El presente documento reporta los resultados de un estudio dirigido realizado con docentes sobre estrategias y experiencias de enseñanza de estocásticos en primaria, con base a once sesiones de investigación para estudiar y reconocer los elementos de estocásticos implicados en la propuesta institucional, y algunas maneras en que la docencia los lleva al aula. Advirtiendo las nociones e ideas que sobre probabilidad y azar refieren los profesores al poner en juego los contenidos del eje La predicción y el azar del Plan y programas de estudio (Secretaría de Educación Pública [SEP], 1993) y las sugerencias dadas en guías y libros de texto para su planteamiento y comprensión de sus elementos constitutivos en la propuesta de enseñanza.*

Palabras clave: estocásticos; epistemología; docencia; primaria

Introducción

El estudio partió del reconocimiento del perfil del docente en cuanto a su propuesta de enseñanza de los contenidos programáticos asignados al eje de *La predicción y el azar* de la *propuesta institucional* (Secretaría de Educación Pública [SEP], 1993) y a los argumentos otorgados a los términos: azar, aleatorio, probabilidad, posibilidad, en los que se hallaron sesgos del pensamiento para referirse a ellos como: indiferenciación entre lo aleatorio y lo determinista; su enjuiciamiento de las actividades propuestas en este eje temático como de "pasatiempo y recreación", y del alumno como incapaz de estudiar estos contenidos programáticos, entre otros. La información sugirió la necesidad de investigar sobre la experiencia directa del docente en el *aula,* después de las de *estudio dirigido*, en cuanto a cómo interpretan la *propuesta institucional* en acciones deliberadas de su enseñanza en diferentes escuelas del Distrito Federal, en las modalidades de escuela regular pública y de educación especial privada, a fin de confrontar si el perfil de formación les permitía dar respuestas basadas en un pensamiento probabilístico cuando el azar interviene.

Referentes sobre la constitución de la idea de azar

De acuerdo al estudio epistemológico “La génesis de la idea de azar en el niño” (Piaget & Inhelder, 1951), el proceso intelectual del individuo para la constitución de la idea de azar parte de la diferenciación entre lo imprevisto y lo imprevisible; lo imprevisto proviene de la incertidumbre, como incomprensión de lo *posible* a falta de un sistema operatorio que dé cuenta de él. Lo imprevisible resulta de la distinción entre lo observado y lo *necesario*, por medio de operaciones de *clasificación* y *seriación* que permiten describir y ordenar las cualidades y propiedades de lo indeterminado, al advertir las disyunciones concretas que implican lo *posible* de un cierto resultado en relación a otros.

El ordenamiento de estas cualidades se rige por la propiedad de *transitividad*, en la cual el sujeto establece relaciones entre los elementos que tienen diferencias en algún aspecto para ordenar esas diferencias al relacionar un elemento de la serie con el siguiente, y éste con el posterior, de tal manera que se puede deducir la relación entre el primer y el último elemento de esa serie.

Concerniente a la *reciprocidad*, se considera a cada elemento, salvo el primero y el último de una serie ordenada de manera creciente o decreciente, como menor que el anterior y mayor que el siguiente. Esto es, partiendo de las relaciones de *inclusión* y *pertenencia*, relativas a la *clasificación*, “puede comprender que un elemento ***x*** puede estar en cualquiera de los agrupamientos aditivos que conforman un todo **B**, esto es, **B** = **A** + **A´**, aún de manera inversa **A** = **B** – **A´** y **A´** = **B** – **A**, pero para que identifique que **B** está en **A** o en **A´,** y la consecuente indeterminación, es necesario que establezca la relación de *disyunción concreta* entre estos elementos, distinguiendo, así, lo *posible* y lo *necesario*, es decir, comprender que si ***x*** está en **B,** puede estar en **A** o en **A´ ”**(Piaget, Inhelder 1951, pp. 217, 218). Se desarrolla, entonces, una *lógica de clases*, porque se reúnen las cualidades de los objetos o de los conjuntos en *clases* o *subclase*s para relacionarlos entre ellos, al combinarlos, según sus diferentes características bajo una *lógica de relaciones*.

Las operaciones lógicas resultan espontáneas cuando se trata de elaborar la comprensión de situaciones determinadas o lógico causales, pero no cuando se trata de situaciones indeterminadas o aleatorias, es decir, el sujeto comprende de manera natural que a una causa corresponde un solo resultado, pero no que a una causa pueden corresponder dos o más posibles resultados y que esos resultados posibles también se pueden clasificar y ordenar por medio de operaciones de *combinatoria*. Los autores señalan que para constituir la idea de lo fortuito o de mezcla aleatoria es necesaria la reversibilidad de las operaciones lógicas, a fin de contar con lo *necesario* para advertir la irreversibilidad de lo aleatorio, pues dado que las situaciones aleatorias se hacen evidentes en el terreno de lo *real*, la predicción de algún posible resultado requiere la advertencia de la irreversibilidad del azar y del desarrollo de estructuras deductivas que den cuenta de lo *posible*: "con la constitución del azar lógico aritmético, el sujeto puede comprender el azar físico" (Piaget, Inhelder 1951, p. 205) y establecer un juicio de probabilidad. Así, la falta de estructuras lógicas, de conjunciones y disyunciones, primero concretas y luego abstractas, para ordenar los posibles en una relación parte–parte y parte−todo, impide estructurar operaciones de *combinatoria*, pues la ausencia de operaciones lógicas "trae como consecuencia la falta de una síntesis entre el azar y los mecanismos operatorios en forma de un sistema de composición probabilística" (Piaget, Inhelder, 1951, p. 209). Este ordenamiento, primero del enlistado de los posibles resultados, luego de sus relaciones parte-todo, en eventos equiprobables e inequiprobables y, posteriormente, del desarrollo de operaciones de proporcionalidad para identificar esas relaciones con grandes números, es un proceso que puede darse de manera simple en niños pequeños, incluso de edades a 6–12 años. Para ello, según Fischbein (1975), se parte de un pensamiento intuitivo primario que se puede ver asistido por una enseñanza de estocásticos desde los 4 ó 5 años de edad. Esta asistencia toma el papel de andamiaje que tiene la intuición para la constitución de nuevas adquisiciones cognitivas; y asume el papel que juega la enseñanza en el desarrollo de intuiciones secundarias correctas, que apunten hacia un desarrollo del pensamiento de lo probable, "bajo un currículum apropiado al aprendizaje de la probabilidad que considere un sustrato intuitivo primario en la formación de nuevas intuiciones" (Fischbein, 1975, p. 131). Este andamiaje intuitivo secundario deberá constituirse con base en *ideas fundamentales* que, según Heitele (1975), orienten su formación bajo un currículo en espiral, a fin de desarrollar y superar, progresivamente, intuiciones primarias basadas en explicaciones "mágicas" o relativas a la "suerte", y que consideren situaciones de análisis probabilístico en la enseñanza para advertir que la probabilidad se mide en el intervalo 0-1, con base en el inventario del *espacio muestral* (formalmente, el σ- *campo* de probabilidades) e identificando las relaciones *aditivas* o *multiplicativas* entre sus elementos, con base en el desarrollo de operaciones de *combinatoria* para posibilitar el ordenamiento cuantitativo de los posibles resultados en sus relaciones de *equidistribución*. La constitución de la idea de *independencia* entre los eventos, la idea de *muestra*, de *variable estocástica* y su *simetría* estocástica en relación a la *ley de los grandes números*, con base en un modelo de *urnas* y *simulación* "que acerque al sujeto a la comprensión de una situación aleatoria específica" (Heitele, 1975, pp. 198-199). La puesta en el aula de este currículum en espiral requiere de un profesor con una formación sólida en estocásticos. Al respecto, Steinbring (1991) analiza el papel de su enseñanza en cuanto a la relación entre la naturaleza epistemológica del conocimiento matemático y su significado socialmente constituido en la interacción en el *aula*; afirma que la constitución progresiva del conocimiento estocástico requiere de la observancia del *triángulo epistemológico* (ver *Figura 1*), es decir, la constitución del concepto resulta de un balance en la relación entre los tres vértices, por ejemplo, al observar sistemáticamente la frecuencia relativa de una secuencia de eventos, como la manera natural del pensamiento de registrar los datos, luego, de organizar los resultados en una relación parte–parte y parte–todo, al asignarle una probabilidad y tomar conciencia de la experiencia al diferenciar la *variable aleatoria* y las frecuencias relativas de sus valores posibles.

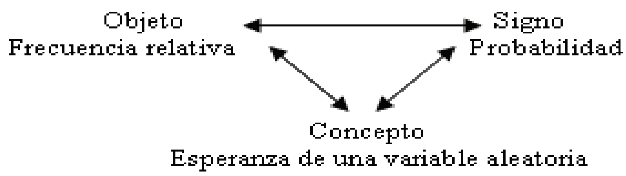

Figura 1. Forma relacional en la constitución del conocimiento, en particular, del concepto de probabilidad, según Steinbring (1991, p. 507).

Según el autor, la comprensión social común y el desarrollo del conocimiento requieren la estructura [de] "retroalimentación interactiva explícita para verificar, mejorar y modificar la comprensión que uno tiene de los conceptos matemáticos" (Steinbring, 1991, p. 519).

Proceso de investigación para el estudio

Con carácter cualitativo (Eisner, 1998, p. 52), el objetivo de la investigación fue identificar los elementos de probabilidad y de azar que requiere la docencia para orientar su enseñanza hacia la formación de modelos explicativos sobre "el pensamiento de lo posible" (Piaget, Inhelder, 1951). El estudio estuvo constituido en tres fases: la primera, documental, examinó la *propuesta institucional* (SEP, 1993); la segunda, la que ocupa la redacción de este documento, consistió en indagaciones en *estudio dirigido* a docentes sobre estrategias y experiencias de enseñanza de estocásticos en primaria, con base a once sesiones de investigación destinadas a estudiar y a reconocer los elementos de estocásticos implicados en la *propuesta institucional* (Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P., Castrejón, J. 1997; 2000 Matemáticas. Tercero y Cuarto grado. México: SEP), y algunas de las maneras en que la docencia los lleva al *aula*. La tercera fase tuvo en foco la *enseñanza* en el *aula* de contenidos de estocásticos planteados en los libros de texto respectivos a cada grado escolar Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P., Castrejón, J. (1997; 2000). Matemáticas. Tercer y Cuarto grado. México: SEP, en condiciones reales de enseñanza.

Espacios metodológicos

La función metodológica del *estudio dirigido* se basó en la interacción entre investigador y docente, a fin de estudiar cómo se ponen en juego las ideas de azar y de probabilidad en el *aula* del segundo ciclo escolar primario y observar, de manera directa, los cambios en las ideas de probabilidad y de azar manifestadas tanto en estas sesiones, como en las de su enseñanza en el *aula.* Esta interacción permitió precisar lo *necesario* para comprender progresivamente los elementos de formación ausentes al interpretar y poner en juego las lecciones del libro de texto para su enseñanza. Las carencias en la formación incidieron en el diseño, estructura y número de estas sesiones. Los espacios de interacción indagatoria se realizaron en sesiones de Consejo Técnico en tres escuelas primarias regulares oficiales y una escuela de educación especial privada, así como en un curso de verano realizado en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Criterios de análisis

La perspectiva teórica permitió examinar la *propuesta institucional* y la información recopilada en sesiones de *aula* y de *estudio dirigido*, bajo cinco criterios de análisis, a saber: ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975); la distinción de éstas de otros conceptos matemáticos, tales como el de número y el producto cartesiano; recursos semióticos gráficos para organizar y tratar los datos, como símbolos matemáticos, figuras, diagramas y gráficas, lengua natural escrita (Fischbein, 1975; Steinbring, 1991); términos empleados en referencia a estocásticos (Steinbring, 1991); y la estrategia de presentación en *la propuesta institucional* o de enseñanza en *estudio dirigido* y *aula* (Heitele, 1975).

Instrumentos utilizados

Con base en un enfoque cualitativo (Eisner, 1998), se acometió la tarea del acopio de datos mediante guiones de observación. La información recopilada en cada uno de los escenarios fue producto de guiones específicos, de acuerdo a lo indicado por los elementos teóricos en la sección *2*:

- Guión, según los criterios de análisis (ver 3.2), para examinar la *propuesta institucional*.
- Guión para el planteamiento y desarrollo del *estudio dirigido* a docentes, regido por los resultados del análisis de la *propuesta institucional*.
- Guión para la indagación en el *aula*, dictado por los resultados de sesiones de *estudio dirigido* y del análisis del eje *La predicción y el azar*, en los programas de estudio y en las lecciones correspondientes de los libros de texto (Carballo, 2004).

Técnicas. En todas las sesiones de *interacción indagatoria en el aula* y de *estudio dirigido*, se recurrió a la video grabación para el registro de datos, ya que esta técnica permite sus revisiones recurrentes y la transcripción de pasajes específicos video grabados proporcionó anclajes para el análisis de la información vertida en diálogos y sus referentes (Carballo, 2004).

La probabilidad y el azar en sesiones de estudio dirigido

Se constató una indiferenciación entre lo *posible*, lo *necesario* y lo *real*, ya que no se distinguió entre el azar físico y el lógico matemático (Piaget, Inhelder, 1951). Fueron recurrentes efectos de recencia (Fischbein, 1975a) y argumentos referidos a la “suerte”, “magia”, “adivinanza”, “lo que no se sabe”, “lo incierto”, “inseguro”, que expresan “la indiferenciación entre la necesidad deductiva y la posibilidad” (Piaget, Inhelder, 1951, p.200). Esta indiferenciación orientó hacia una propensión al uso del número para cálculos, pero sin advertir la necesidad de describir ni enlistar el espacio muestra correspondiente, con base en relaciones de combinatoria (Heitele, 1975), como es el caso para el lanzamiento de dos dados ordinarios en el que reiteradamente se presentaron juicios de probabilidad basados únicamente en uniones aditivas, con la advertencia de doce posibles resultados y no de treinta y seis.

La docencia y la idea de azar

En este escenario fueron motivo de estudio las revelaciones sobre las idea de *azar* y de probabilidad dadas por los docentes. Se plantearon diferentes situaciones para identificar argumentaciones que aludieran al *azar*; por ejemplo, explicaciones que implicaran el uso de términos como "posibilidad" y "probable" o "no probable" ó "algo que no es seguro", con "algo incierto", pero ni en un caso ni en otro se pudo evidenciar una distinción clara entre lo *necesario* y lo *posible*. El uso de términos o expresiones como "inseguro", "no se puede controlar" o "incierto", reflejan la advertencia de cierta indeterminación, pero no se podría asegurar la comprensión de la irreversibilidad en la ruptura del orden de una situación aleatoria, sino sólo de lo imprevisto en los resultados. La distinción entre lo *posible*, lo *necesario* y lo *real* no se evidencia, debido a la determinación operatoria con lo *real*, dado "que no hay diferenciación entre la noción de probabilidad y el simple conocimiento de lo fortuito o indeterminable" (Piaget, 1982, p. 11).

La docencia y las ideas fundamentales de estocásticos: algunas consideraciones

La revisión de la primera lección del eje *La predicción y el azar* para tercer grado, con profesores de escuela regular, evidenció la interpretación que se hace de los contenidos planteados en ella, advirtiéndose la no diferenciación entre la situación determinista, de la indeterminista; la dificultad para clasificar y ordenar las diferencias entre los posibles resultados al lanzar un dado ordinario y al lanzar dos dados de manera simultánea; confundir el algoritmo planteado al final de esta lección como la parte que "formaliza" ambas situaciones, y no como una confrontación con la idea de azar. El uso indistinto del término *adivina* provocó confusión al referirlo a una situación de azar, pues al interpretarlo no se logró distinguir entre "magia", "suerte" y "azar". Se examinó el espacio muestra asociado al lanzamiento de dos dados (propuesto en la segunda parte de esta lección), con el fin de que identificaran, para distintos eventos, las proporciones entre sus posibles resultados y advirtieran su distribución, con base en el trazo del diagrama de árbol para identificar el espacio muestra correspondiente, pero como se observa en la *Figura 2*, los profesores se vieron imposibilitados a trazarlo.

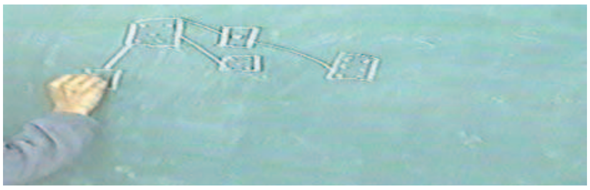

Figura 2. Trazo del diagrama de árbol para obtener el total de posibles, al lanzar dos dados ordinarios.

El nivel de complejidad manifestado se debió a que no están constituidas nociones de *transitividad* que ordenen las relaciones de los elementos de los conjuntos en juego, para que con base en estos *principios organizativos* se constituyan operaciones de *combinatoria* para identificar el total de posibles resultados. Esta manifestación incipiente determina la imposibilidad para identificar la *idea de medida de probabilidad*, *espacio muestra* y *suma de probabilidades*. Para los arreglos resultantes de la organización de los posibles resultados se identificó la equidistribución de cada par posible, pero al distinguir el máximo de probabilidad para la suma siete, se evidenciaron algunas dificultades respecto a la comprensión de la equidistribución de los posibles resultados, pues la distribución simétrica de las probabilidades de las sumas se confundió con la equiprobabilidad de las distintas parejas. A partir del reconocimiento del espacio muestra, de identificar las combinaciones posibles mediante el establecimiento de relaciones multiplicativas entre los espacios muestra respectivos, y de la probabilidad correspondiente a cada combinación para constatar que la suma de las probabilidades es igual a 1, al lanzar dos dados, se les propuso otra situación, como el cálculo de probabilidad para obtener "a lo más dos soles" en diez volados. Algunas maneras para dar respuesta fueron: establecer la fracción 2/10 como la probabilidad de dos "soles" en diez volados, al poner en juego relaciones aditivas y no multiplicativas Otro docente aludió a la simetría de los eventos para señalar que era la misma probabilidad de ocurrencia para "soles" o para "águilas", pues correspondía ½ para el "águila" y ½ para el "sol", pero no lo relacionó con la probabilidad de obtener dos soles en dos volados. Finalmente, otro docente logró la identificación de los posibles resultados al construir el diagrama de árbol correspondiente, pero sólo lo trazó para 136 posibilidades, pues advirtió el comportamiento de la situación en juego, determinando la probabilidad de obtener dos soles en diez volados, con base en un cálculo abstracto. Sin embargo, pasó inadvertido lo incompleto del espacio muestra, pues los eventos de “ninguna águila” y “ningún sol” no se consideraron.

Resultados del estudio dirigido

Se constató que los aspectos de diferenciación entre situaciones deterministas y aleatorias, de lo *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable*, con situaciones inequiprobables y equiprobables, se manifiestan de manera insuficiente, dadas las experiencias propuestas para avizorar la relación entre casos favorables y el total de casos posibles, pues los elementos combinatorios y las nociones de proporcionalidad utilizadas para esta advertencia no están constituidas ni las relaciones de proporcionalidad se identifican, por lo que los “juicios de probabilidad sólo están basados en relaciones aditivas y no multiplicativas” (Piaget, Inhelder, 1951, p. 216). La equivalencia entre fracciones fue una dificultad para decidir de cuál urna era más probable extraer una canica, y favoreció la expresión decimal y el uso de porcentajes para interpretar las proporciones de canicas en cada urna. Se manifestó la inconsistencia en la relación entre los tres vértices del triángulo epistemológico del conocimiento, en particular la desvinculación entre *objeto* y *signo* (Steinbring, 1991), dando prioridad al *signo*, sin la respectiva comprensión del *objeto*, al no tener constituidas *ideas fundamentales* como guías en la constitución de la idea de azar, pues se carece de sistemas operatorios que conduzcan a la formación de modelos explicativos relativos al azar desde lo deducible, es decir, con base en su comprensión probabilística (Heitele, 1975). Así mismo, se manifestaron efectos de *recencia negativa* o *positiva* al efectuar extracciones sin reemplazo y anticipar el siguiente resultado (Fischbein, 1975, p. 123), sin poder consolidar, al menos, un andamiaje intuitivo secundario que orientara hacia la constitución de un pensamiento probabilístico, basado en la formación de *ideas fundamentales* (Heitele, 1975) para su enseñanza.

Referencias bibliográficas

Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P., Castrejón, J. (1997; 2000). Matemáticas. Tercer grado.

México: SEP.

Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P. (1994; 1997). Matemáticas. Cuarto grado. México: SEP.

Carballo, M. T. (2004). *Estocásticos en el segundo ciclo de la educación primaria: Determinismo y azar*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, IPN.

Eisner, E. (1998). *El ojo Ilustrado.* Barcelona: Paidós.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205. Netherlands: Reidel

Piaget, J. Inhelder, B. (1951). *La Génese de l´idée de Hasard Chez l'Enfant*. Paris : PUF

Piaget, J. (1982). *Le possible et le nécessaire*. Vol. 2. Paris: PUF

SEP (1993). *Plan y Programas de Estudio. Educación Primaria*. México.

Steinbring, H. (1991). *The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge*. Educational Studies in Mathematics 22.